ORTAÖĞRETİM

Matematik

9

DERS KİTABI

YAZARLAR

Mehmet MAVİŞ
Güray GÜL
Himmet SOLAKLIOĞLU
Hakan TARKU
Fatih BULUT
Mahmut GÖKŞEN



DEVLET KİTAPLARI
BİRİNCİ BASKI
.........................., 2019

MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞI YAYINLARI ....: 6979
DERS KİTAPLARI DİZİSİ ....: 1834

HAZIRLAYANLAR

Editör
Prof. Dr. Gonca AYIK

Dil Uzmanı
Gülendam KARACA ÇETİN

Program Geliştirme Uzmanı
Doç Dr. Mahmut Oğuz KUTLU
Hasan NASIRCI

Rehberlik ve Gelişim Uzmanları
Hatice Müge UĞRAŞAN
Tuğba GÜL ŞEN

Görsel Tasarım Uzmanı
Volkan NUR

Grafik Tasarım Uzmanı
Ömer Engin BİLGİÇ
Taykut CENGİZ

ISBN 978-975-11-4903-9

Millî Eğitim Bakanlığı, Talim ve Terbiye Kurulunun 18.04.2019 gün ve 8 sayılı kararı ile ders kitabı olarak kabul edilmiş, Destek Hizmetleri Genel Müdürlüğünün 28.05.2019 gün ve 10443977 sayılı yazısı ile birinci defa 236.945 adet basılmıştır.



İSTİKLÂL MARŞI

Korkma, sönmez bu şafaklarda yüzen al sancak;
Sönmeden yurdumun üstünde tüten en son ocak.
O benim milletimin yıldızıdır, parlayacak;
O benimdir, o benim milletimindir ancak.

Çatma, kurban olayım, çehreni ey nazlı hilâl!
Kahraman ırkıma bir gül! Ne bu şiddet, bu celâl?
Sana olmaz dökülen kanlarımız sonra helâl.
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl.

Ben ezelden beridir hür yaşadım, hür yaşarım.
Hangi çılgın bana zincir vuracakmış? Şaşarım!
Kükremiş sel gibiyim, bendimi çiğner, aşarım.
Yırtarım dağları, enginlere sığmam, taşarım.

Garbın âfâkını sarmışsa çelik zırhlı duvar,
Benim iman dolu göğsüm gibi serhaddim var.
Ulusun, korkma! Nasıl böyle bir imanı boğar,
Medeniyyet dediğin tek dişi kalmış canavar?

Arkadaş, yurduma alçakları uğratma sakın;
Siper et gövdeni, dursun bu hayâsızca akın.
Doğacaktır sana va'dettiği günler Hakk'ın;
Kim bilir, belki yarın, belki yarından da yakın.

Bastığın yerleri toprak diyerek geçme, tanı:
Düşün altındaki binlerce kefensiz yatanı.
Sen şehit oğlusun, incitme, yazıktır, atanı:
Verme, dünyaları alsan da bu cennet vatanı.

Kim bu cennet vatanın uğruna olmaz ki feda?
Şüheda fışkıracak toprağı sıksan, şüheda!
Cânı, cânânı, bütün varımı alsın da Huda,
Etmesin tek vatanımdan beni dünyada cüda.

Ruhumun senden İlâhî, şudur ancak emeli:
Değmesin mabedimin göğsüne nâmahrem eli.
Bu ezanlar -ki şehadetleri dinin temeli-
Ebedî yurdumun üstünde benim inlemeli.

O zaman vecd ile bin secde eder -varsa- taşım,
Her cerîhamdan İlâhî, boşanıp kanlı yaşım,
Fışkırır ruh-ı mücerret gibi yerden na'şım;
O zaman yükselerek arşa değer belki başım.

Dalgalan sen de şafaklar gibi ey şanlı hilâl!
Olsun artık dökülen kanlarımın hepsi helâl.
Ebediyyen sana yok, ırkıma yok izmihlâl;
Hakkıdır hür yaşamış bayrağımın hürriyyet;
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl!

Mehmet Âkif Ersoy

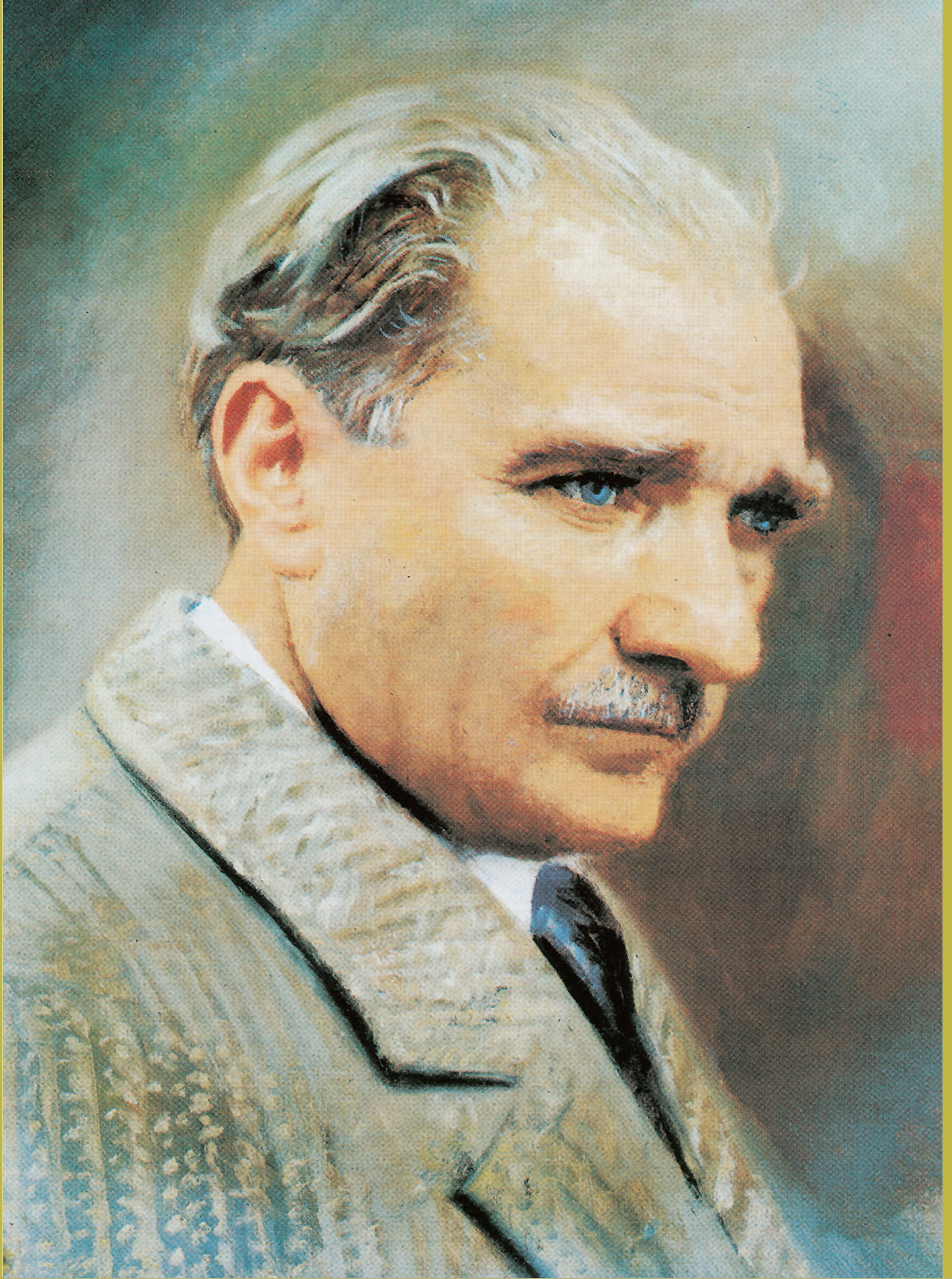
GENÇLİĞE HİTABE

Ey Türk gençliği! Birinci vazifen, Türk istiklâlini, Türk Cumhuriyetini, ilelebet muhafaza ve müdafaa etmektir.

Mevcudiyetinin ve istikbalinin yegâne temeli budur. Bu temel, senin en kıymetli hazinendir. İstikbalde dahi, seni bu hazineden mahrum etmek isteyecek dâhilî ve hâricî bedhahların olacaktır. Bir gün, istiklâl ve cumhuriyeti müdafaa mecburiyetine düşersen, vazifeye atılmak için, içinde bulunacağın vaziyetin imkân ve şeraitini düşünmeyeceksin! Bu imkân ve şerait, çok namüsait bir mahiyette tezahür edebilir. İstiklâl ve cumhuriyetine kastedecek düşmanlar, bütün dünyada emsali görülmemiş bir galibiyetin mümessili olabilirler. Cebren ve hile ile aziz vatanın bütün kaleleri zapt edilmiş, bütün tersanelerine girilmiş, bütün orduları dağıtılmış ve memleketin her köşesi bilfiil işgal edilmiş olabilir. Bütün bu şeraitten daha elîm ve daha vahim olmak üzere, memleketin dâhilinde iktidara sahip olanlar gaflet ve dalâlet ve hattâ hıyanet içinde bulunabilirler. Hattâ bu iktidar sahipleri şahsî menfaatlerini, müstevlîlerin siyasî emelleriyle tevhit edebilirler. Millet, fakr u zaruret içinde harap ve bîtap düşmüş olabilir.

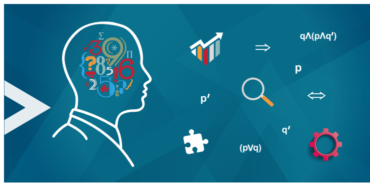
Ey Türk istikbalinin evlâdı! İşte, bu ahval ve şerait içinde dahi vazifen, Türk istiklâl ve cumhuriyetini kurtarmaktır. Muhtaç olduğun kudret, damarlarındaki asil kanda mevcuttur.

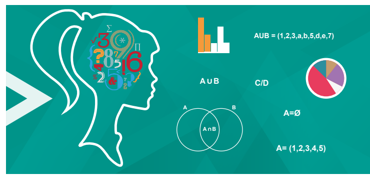
Mustafa Kemal Atatürk



MUSTAFA KEMAL ATATÜRK

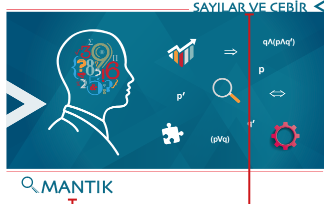
İÇİNDEKİLER






27%

KİTABIN TANITIMI



Sembol ve Gösterimler

p , p′ (veya ~ p) , ≡,
∀ , ∃ , ∧ , ∨ , ⊻ , ⇒ , ⇔

Alt öğrenme alanı ile ilgili sembol ve gösterimlerin bulunduğu bölümdür.

Öğrenme alanıdır.

MANTIK

Alt öğrenme alanıdır.

Terimler ve Kavramlar

- Küme
- Eleman
- Evrensel Küme
- Boş Küme
- Alt Küme
- Öz alt Küme
- Sonlu Küme
- Sonsuz Küme
- Eşit Kümeler

Alt öğrenme alanı ile ilgili terimlerin ve kavramların bulunduğu bölümdür.

Alt öğrenme alanındaki kazanımda nelerin öğrenileceğinin bulunduğu bölümdür.

Neler Öğreneceksiniz?

- Önerme, önermenin doğruluk değeri, iki önermenin denkliği ve önermenin değilini açıklama
- Bileşik önerme ...

ÖRNEK 1

Aşağıda verilen önermelerden birbirine denk olanları bulunuz.

- p : ″5 − 3 =3 − 5 tir.″
- q : “Dünya Güneş’ten büyüktür.”
- r : ″−7 tam sayıdır.″
- s : ″ En büyük asal rakam 7 dir.″

Örneklerin bulunduğu bölümdür.

ÇÖZÜM

p ve q önermeleri yanlış olduğundan doğruluk değerleri 0 dır. Dolayısıyla p ve q önermeleri denk önermelerdir ve p ≡ q olarak gösterilir.

r ve s önermeleri doğru olduğundan doğruluk değerleri 1 dir. Dolayısıyla r ve s önermeleri denk önermelerdir ve r ≡ s olarak gösterilir.

Örneklerin çözümlerinin bulunduğu bölümdür.



Karekod okuyucu ile taratarak resim, video, animasyon, soru ve çözümleri vb. ilave kaynaklara ulaşabileceğiniz barkod.

DÜŞÜNÜYORUM

Aşağıda verilen kümelerin eleman sayıları hakkında ne söyleyebilirsiniz?

$A = \{x \mid x$, 0 dan küçük doğal sayılar$\}$

$B = \{x \mid x$, mutlak değeri -10 olan sayılar$\}$

$C = \{x \mid x^2 = -5$, x pozitif tam sayı$\}$

$D = \{x \mid x$, negatif doğal sayılar$\}$

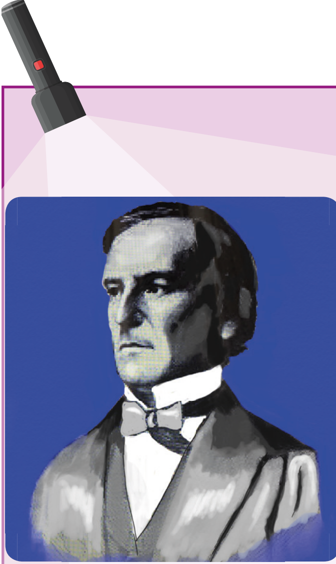
İlginç ve faydalı bilgilerin olduğu bölümdür.

$p \Rightarrow q$ önermesinin karşıt tersi olan $q' \Rightarrow p'$ önermesine denk olduğuna dikkat ediniz.

Soruların çözümünde yardımcı olacak bilgilerin bulunduğu bölümdür.

İki veya daha fazla önermenin "ve", "veya", "ya da", "ise", "ancak ve ancak" gibi bağlaçlarla birbirine bağlanmasıyla elde edilen yeni önermelere **bileşik önerme** denir.

Tanımların, teoremlerin ve formüllerin bulunduğu bölümdür.



GEORGE BOOLE (1815-1864)

2 Kasım 1815 günü İngiltere'de Lincoln'de (Linkoln) doğan George Boole (Corç Buul), bir İngiliz matematikçisi, mantıkçısı ve eğitimcisidir. Modern simgesel mantığın kurulmasına katkıda bulunmuş ve mantık cebirini geliştirmiştir.

Matematiğe katkısı bulunan bilim insanlarının bulunduğu bölümdür.

Ölçme değerlendirmenin bulunduğu bölümdür.

Alıştırma sorularının bulunduğu bölümdür.

9.1. ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

1. Aşağıdaki ifadelerden hangisi önerme değildir?
   A) Merkür kızıl gezegen adıyla bilinir.
   B) Türkiye yedi coğrafi bölgeye ayrılmıştır.
   C) Hadi ders çalışalım.
   D) 1.Dünya Savaşı İttifak Devletleri'nden birisi Alman İmparatorluğu'dur.
   E) $\sqrt{3}$ bir rasyonel sayıdır.

2. Aşağıdaki önermelerden hangisinin olumsuzunun doğruluk değeri "1" dir?
   A) Ankara Türkiye'nin başkentidir.
   B) İki basamaklı 45 tane çift sayı vardır.
   C) Üçgenlerin iç açıları toplamı 180 derecedir.
   D) Tavşan uçan bir hayvandır.
   E) Basketbol maçlarında her takım 5 oyuncu ile sahada mücadele eder.

3. p : "Fatih Sultan Mehmet İstanbul'u fethetti."
   q : "İstanbul'un Fethi Orta Çağ'ı kapattı."
   önermeleri kullanılarak aşağıdaki denklikler oluş-

ALIŞTIRMALAR

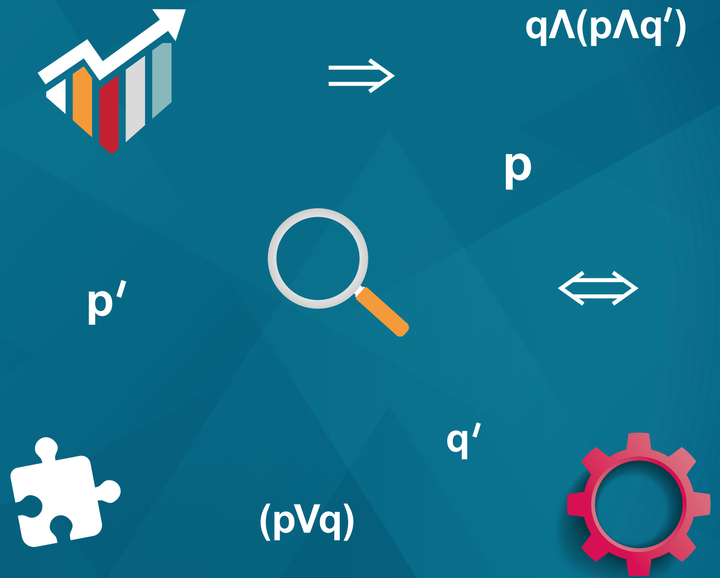
1. p: "İki basamaklı en küçük tam sayı -99 dur."
   q: "Camın ham maddelerinden biri kumdur."
   r: "Bir asal sayının 2 katının 1 fazlası daima bir asal sayıc
   önermelerine göre aşağıdaki bileşik önermelerin do
   bulunuz.
   a) $(p \vee q') \wedge r$ b) $(p \wedge q)' \vee r$
   c) $(p' \vee r) \vee (p \wedge q')'$ ç) $p \wedge (q \vee r')$

2. Aşağıdaki ifadelerin doğruluk değerini bulunuz.
   a) $(1 \vee 0) \wedge 1$ b) $(0 \wedge 1) \vee ($
   c) $(1' \wedge 0) \vee (0 \vee 1)$ ç) $(1 \wedge ((1 \wedge$

3. Aşağıdaki denkliklerden doğru olanın yanına (D), yanlı
   yazınız.
   a) $p' \vee p \equiv 1$ (....)
   b) $(p \wedge q')' \equiv p' \vee q$ (....)
   c) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (....)
   ç) $p \wedge 1 \equiv 1$ (....)

4. Aşağıdaki bileşik önermelerin en sade şeklini bulunuz





MANTIK

9.1.1. Önermeler ve Bileşik Önermeler

Terimler ve Kavramlar

- Önerme
- Bileşik Önerme
- Önermenin Değili
- Her, bazı, ve, veya, ya da bağlaçları
- De Morgan Kuralları
- Koşullu Önerme
- İki Yönlü Koşullu Önerme (veya gerek ve yeter şart)
- Açık Önerme
- Tanım
- Aksiyom
- Teorem
- İspat
- Hipotez
- Hüküm

Sembol ve Gösterimler

p, p' (veya $\sim p$), $\equiv$, $\forall, \exists, \wedge, \vee, \veebar, \Rightarrow, \Leftrightarrow$

Elektrik devrelerinde, bilgisayar yazılımlarında ve birçok teknolojik alanda sembolik mantığın kullanıldığını biliyor muydunuz?

9. 1. MANTIK



Mantık, doğru düşünce için nasıl düşünülmesi gerektiğine dair ilke ve kuralları araştıran bir disiplindir. İnsana serbest düşünme ve düşündüklerini anlaşılır bir şekilde ifade etme imkânı sağlar. Zihni yanlışlıklardan koruyan mantık, aynı zamanda kişiye ispat edilenle edilemeyeni ayırma becerisi kazandırır.

Yaşadığı dönem ve öncesine ait mantık bilgisi ile kurallarını sistemli bir şekilde ilk kez Yunan filozofu Aristoteles (Aristo) ortaya koymuştur. Aristo günümüzde klasik mantığın kurucusu olarak bilinir.

Sembolik mantık, klasik mantığın sembolleştirilmiş biçimidir. Günümüzde kullanılan sembolik mantık konusundaki ilk sistemli çalışmalar Alman filozofu G. W. Leibniz [Laypniz (1646-1716)] tarafından yapılmıştır.

Sembolik mantık günümüzde hem doğru düşünmenin bir yolu hem de matematiğin tüm dünyadaki ortak dilidir.

9.1.1. Önermeler ve Bileşik Önermeler

Neler Öğreneceksiniz?

- Önerme, önermenin doğruluk değeri, iki önermenin denkliği ve önermenin değilini açıklamayı,
- Bileşik önermeyi örneklerle açıklama, "ve, veya, ya da" bağlaçları ile kurulan bileşik önermelerin özelliklerini ve De Morgan kurallarını doğruluk tablosu yaparak göstermeyi,
- Koşullu önerme ve iki yönlü koşullu önermeyi kavramayı,
- Her ($\forall$) ve bazı ($\exists$) niceleyicilerini örneklerle açıklamayı,
- Tanım, aksiyom, teorem ve ispat kavramlarını açıklamayı öğreneceksiniz.

9.1.1.1. Önerme

Doğru ya da yanlış kesin bir hüküm (yargı) bildiren ifadelere **önerme** adı verilir. Matematikte önermeler genellikle p, q, r, s gibi küçük harflerle gösterilir.

ÖRNEK 1

Aşağıdaki ifadelerden hangilerinin bir önerme olduğunu bulunuz ve bu önermelerin doğruluk durumlarını inceleyiniz.

a) Bir ay otuz iki gündür.

b) Selimiye Camii Edirne'dedir.

c) Ödevini yaptın mı?

ç) İyi akşamlar!

d) 1001 bir asal sayıdır.

ÇÖZÜM

a, b ve d maddelerinde verilen ifadeler doğru ya da yanlış kesin bir hüküm bildirdiğinden birer önermedir. a ve d önermesi birer yanlış hüküm bildiren önerme, b önermesi ise doğru hüküm bildiren bir önermedir.

c ve ç maddelerinde verilen ifadeler bir hüküm bildirmediğinden önerme değillerdir.



Bir önermenin doğru ya da yanlış olmasına, o önermenin **doğruluk değeri** denir. Bir önerme doğru ise doğruluk değeri **D** veya **1** ile yanlış ise **Y** veya **0** ile gösterilir.

Bir **p** önermesi doğru bir önerme ise "**p** $\equiv$ **1**" , yanlış bir önerme ise "**p** $\equiv$ **0**" şeklinde gösterilir ve "**p** önermesi **1** e denktir. " ya da " **p** önermesi **0** a denktir. " şeklinde okunur.

ÖRNEK 2

Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

- p : "7 tek sayıdır."
- q : "İki basamaklı en büyük doğal sayı 99 dur."
- r : "$2^4 > 4^2$ tür."
- s : "Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 360 derecedir."
- t : "En küçük doğal sayı 0 dır."

ÇÖZÜM

- "7 tek sayıdır." hükmü doğru olduğundan p önermesinin doğruluk değeri 1 dir. p $\equiv$ 1 olarak gösterilir.
- "İki basamaklı en büyük doğal sayı 99 dur." hükmü doğru olduğundan q önermesinin doğruluk değeri 1 dir. q $\equiv$ 1 olarak gösterilir.
- $2^4 = 4^2$ olduğundan r önermesi yanlış hüküm belirtir. r önermesinin doğruluk değeri 0 dır. r $\equiv$ 0 olarak gösterilir.
- Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 180 derece olduğundan s önermesi yanlış hüküm belirtir. s önermesinin doğruluk değeri 0 dır. s $\equiv$ 0 olarak gösterilir.
- "En küçük doğal sayı 0 dır." hükmü doğru olduğundan t önermesinin doğruluk değeri 1 dir. t $\equiv$ 1 olarak gösterilir.

Doğruluk değerleri aynı olan iki önermeye **denk önermeler** denir. p önermesi q önermesine denk ise **p** $\equiv$ **q**, p önermesi q önermesine denk değil ise "**p** $\not\equiv$ **q**" ile gösterilir.

ÖRNEK 3

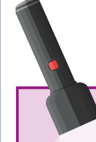
Aşağıda verilen önermelerden birbirine denk olanları bulunuz.

- p : "5 – 3 =3 – 5 tir."
- q : "Dünya Güneş'ten büyüktür."
- r : "–7 tam sayıdır."
- s : " En büyük asal rakam 7 dir."

ÇÖZÜM

p ve q önermeleri yanlış olduğundan doğruluk değerleri 0 dır. Dolayısıyla p ve q önermeleri denk önermelerdir ve p $\equiv$ q olarak gösterilir.

r ve s önermeleri doğru olduğundan doğruluk değerleri 1 dir. Dolayısıyla r ve s önermeleri denk önermelerdir ve r $\equiv$ s olarak gösterilir.

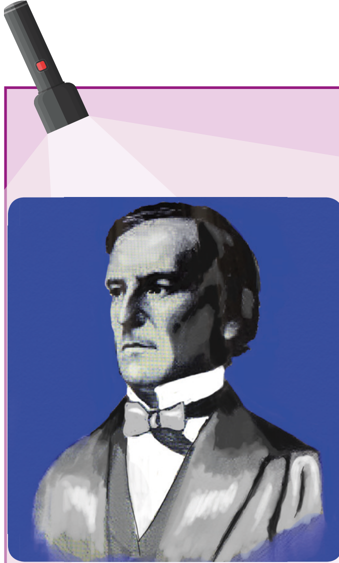




Temsilî G. W. Leibniz (1646 – 1716)

Alman matematikçi ve filozof Gottfried Wilhelm Leibniz (Gotfriid Wilhelm Laypniz), 1 Temmuz 1646 günü Leibzig'de doğdu. Babası Leipzig'de ahlak felsefesi profesörü olan Friedrich Leibniz'dir (Fridrih Laypniz). Leibniz, babasının geniş kütüphanesinde bulunan kitapları sürekli okuyordu. Leibniz, on beş yaşındayken Leipzig Üniversitesine bir hukuk öğrencisi olarak girdi. Zamanının filozofları olan Kepler (Kepler), Galileo (Galile) ve Descartes'ın (Dekart) keşfettikleri yeni dünya hakkında bilgiler edindi. Yaptığı çalışmalarla mantık ve matematik biliminin sembollerle gösterimine büyük katkıda bulundu. Toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleriyle karekök alma işlemini yapabilen hesap makinesini geliştirerek bilgisayarın icadı için ilk adımı attı. Leibniz, matematik ve mantık dışında hukuk, din, siyaset, tarih, edebiyat, metafizik ve kuramsal felsefe konularında da birçok eser bıraktı. Matematik öğrenmeden bu ilimleri kavramanın olanaksız olduğu kanaatine vardı. Leibniz eşitlik için =, çarpma için x simgelerini ve "fonksiyon", "koordinat" gibi terimleri ortaya koyan bilim insanıdır. **Düzenlenmiştir.**





Temsilî George Boole (1815-1864)

2 Kasım 1815 günü İngiltere'de Lincoln'de (Linkoln) doğan George Boole (Corç Buul), bir İngiliz matematikçisi, mantıkçısı ve eğitimcisidir. Modern simgesel mantığın kurulmasına katkıda bulunmuş ve mantık cebirini geliştirmiştir. Mantık alanında çalışmalar yapan ilk İngilizlerden olan Boole, nicelik simgelerini işlem simgelerinden ayırma yollarını göstermiştir. Cebirsel simgeler ile mantıksal biçimlere ve tasarımlara karşılık gelen simgeler arasındaki benzeşmeyi ortaya koymuştur. Boole'un 1847 ve 1854 yılları arasındaki buluşları, mantık cebirinin ya da bugünkü adıyla "Boole Cebiri"nin doğmasını sağlamıştır. Günümüzde Boole Cebiri adıyla anılan mantık cebiri, sayısal bilgisayar devreleri tasarımının matematiksel temelini oluşturur. "Mantığın Matematiksel Analizi" adıyla yayımladığı kitabında mantığın felsefe ile değil matematik ile ele alınması gerektiğini savunmuştur.

Düzenlenmiştir.

Önermelerin doğruluk değerlerinin gösterildiği tabloya **doğruluk tablosu** denir.

ÖRNEK 4

p önermesinin doğruluk tablosunu oluşturunuz.

ÇÖZÜM

p önermesinin 2 farklı doğruluk durumu vardır ve tablosu aşağıdaki gibidir.

p	
1	→ p doğru
0	→ p yanlış

ÖRNEK 5

p ve q önermeleri için doğruluk tablosu oluşturunuz.

ÇÖZÜM

p önermesinin 2, q önermesinin 2 farklı doğruluk değeri olduğundan p ve q önermelerinin $2 \cdot 2 = 2^2 = 4$ farklı doğruluk durumu vardır. Önermelerin doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir.

p	q	
1	1	p doğru iken q doğru
1	0	p doğru iken q yanlış
0	1	p yanlış iken q doğru
0	0	p yanlış iken q yanlış

ÖRNEK 6

p, q ve r önermeleri için doğruluk tablosu oluşturunuz.

ÇÖZÜM

Her önermenin 2 farklı doğruluk değeri olduğundan verilen üç önerme için

$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ farklı doğruluk durumu vardır. Önermelerin doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir.

p	q	r
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0



n farklı önermenin birbirine göre **2^n** tane doğruluk durumu vardır.

ÖRNEK 7

5 farklı önermenin birbirine göre kaç farklı doğruluk durumu olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

5 farklı önermenin $2^5=32$ farklı doğruluk durumu vardır.

Bir önermenin hükmünün değiştirilip yerine olumsuzunun kullanılması ile elde edilen önermeye ilk önermenin **değili (olumsuzu)** denir. p önermesinin değili **p′** veya ~ **p** ile gösterilir.

p önermesi doğru ise doğruluk değeri **1** dir ve **p′** önermesinin doğruluk değeri **0** dır. **p** ≡ **1** ise **p′** ≡ **0** ile gösterilir.

Bir önermenin değilinin değili önermenin kendisine denktir. **[(p′)′ ≡ p]**

Bu özelliğin doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir.

p	p′	(p′)′
1	0	1
0	1	0



$1' \equiv 0$
$0' \equiv 1$
$(1')' \equiv 1$
$(0')' \equiv 0$

ÖRNEK 8

Aşağıda verilen önermelerin değilini bulunuz.

a) p : "Antalya ili Akdeniz Bölgesi'ndedir."
b) q : "Bir hafta 6 gün değildir."
c) r : "2 sayısı 10 dan küçüktür."

ÇÖZÜM

a) p′ : "Antalya ili Akdeniz Bölgesi'nde değildir."
b) q′ : "Bir hafta 6 gündür."
c) r′ : "2 sayısı 10 dan büyük veya 10 a eşittir."

ÖRNEK 9

Aşağıda verilen önermelerin değilini bulunuz.

a) p : "$-6+11=5$ tir."
b) q′ : "$-3>6$ dır."
c) s : "$3\leq 2$ dir."

ÇÖZÜM

a) p′ : "$-6+11\neq 5$ tir."
b) q : "$-3\leq 6$ dır."
c) s′ : "$3>2$ dir."



ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki ifadelerin birer önerme olup olmadığını yanındaki boşluklara yazınız.

a) Birbirinden farklı en küçük üç asal sayının toplamı 10 dur. (....................)

b) Türkiye Cumhuriyeti Asya kıtasındadır. (....................)

c) Fatih bu okulda mı? (....................)

ç) Ay Dünya'nın uydusudur. (....................)

d) Bugün hava güzel mi? (....................)

2. Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini yanındaki boşluklara yazınız.

a) "$6 + 3 > 7$ dir." (.....)

b) "En büyük iki negatif tam sayının toplamı -2 dir." (.....)

c) "Dünyada ilk kalorifer sistemi İshakpaşa Sarayı'nda kullanılmıştır." (.....)

ç) "10 ile 19 arasında 8 gerçek sayı vardır." (.....)

d) "2 sayısı, $2x - 3 = 1$ denkleminin çözüm kümesinin bir elemanıdır." (.....)

3. Aşağıdaki önermelerden hangilerinin birbirine denk önerme olduğunu bulunuz.

a) p : "Mardin ili, Güney Doğu Anadolu Bölgesi'ndedir."

b) q : "$3^2 - 2^2 < (-2)^2$ dir."

c) r : "Negatif asal sayı yoktur."

ç) s : "$\dfrac{(-2)^2 \cdot (-1)^{101}}{(-3)^2 + (-5)} > 0$ dır."

4. Aşağıdaki önermelerin olumsuzlarını yazınız.

a) p : "Fındık üretiminde Türkiye dünya birincisidir."

b) q : "$3x + 5 > -2$ ifadesini sağlayan en küçük x tam sayı değeri -3 tür."

c) r : "$\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} : \dfrac{1}{2} = 1$dir."

5. 7 farklı önermenin birbirine göre kaç tane doğruluk durumu olacağını bulunuz.

6. $n + 2$ tane farklı önermenin birbirine göre 64 farklı doğruluk durumu olduğuna göre n sayısını bulunuz.



9.1.1.2. Bileşik Önermeler

İki veya daha fazla önermenin "ve", "veya", "ya da", "ise", "ancak ve ancak" gibi bağlaçlarla birbirine bağlanmasıyla elde edilen yeni önermeye **bileşik önerme** denir.

"ve" Bağlacı ile Kurulan Bileşik Önermeler



ve bağlacı " $\wedge$ " sembolü ile gösterilir.

p ile q önermelerinin "ve" bağlacı ile bağlanmasından oluşan bileşik önermeye,

p ve q bileşik önermesi denir ve bu önerme **$p \wedge q$** biçiminde gösterilir.

$p \wedge q$ bileşik önermesinin doğruluk değeri; p ile q önermelerinin her ikisi de doğru iken doğru, diğer durumlarında ise yanlıştır.

p ve q önermeleri için $p \wedge q$ önermesinin doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir.

p	**q**	**$p \wedge q$**
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

ÖRNEK 10

"Mert ve Utku birlikte sinemaya gitti." ifadesindeki olası durumların doğruluğunu ya da yanlışlığını inceleyiniz.

ÇÖZÜM

Sinemaya yalnız Mert'in gidip Utku'nun gitmemiş olması **yanlış**,
Yalnız Utku'nun gidip Mert'in gitmemiş olması **yanlış**,
Hiçbirinin gitmemiş olması **yanlış**,
Utku ile Mert'in birlikte gitmiş olması **doğru** bir ifade belirtir.

ÖRNEK 11

p: "$2 < 5$ tir."
q: "$(-2)^3 > -4$ tür."
Önermeleri için $p \wedge q$ önermesini yazıp önermenin doğruluk değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$p \wedge q$: "$2 < 5$ ve $(-2)^3 > -4$ tür." şeklinde yazılır.

$p \equiv 1$ ve $q \equiv 0$ olduğundan $p \wedge q \equiv 1 \wedge 0 \equiv 0$ olur.



ÖRNEK 12

Aşağıdaki ifadelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

a) $1 \wedge (0 \wedge 1)$ **b)** $(1' \wedge 0) \wedge 1$ **c)** $(1 \wedge 1) \wedge (0' \wedge 1)$

ÇÖZÜM

a) $1 \wedge (0 \wedge 1) \equiv 1 \wedge 0 \equiv 0$

b) $(1' \wedge 0) \wedge 1 \equiv (0 \wedge 0) \wedge 1 \equiv 0 \wedge 1 \equiv 0$

c) $(1 \wedge 1) \wedge (0' \wedge 1) \equiv 1 \wedge (1 \wedge 1) \equiv 1 \wedge 1 \equiv 1$

"ve" Bağlacı ile Kurulan Bileşik Önermelerin Özellikleri

1. Tek Kuvvet Özelliği

Her p önermesi için $p \wedge p \equiv p$ dir. Bu özelliğin doğruluk tablosu ile gösterimi aşağıdaki gibidir.

p	p	$p \wedge p$
1	1	1
0	0	0

2. Değişme Özelliği

Her p, q önermesi için $p \wedge q \equiv q \wedge p$ olur. Bu özelliğin doğruluk tablosu ile gösterimi aşağıdaki gibidir.

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	0

$p \wedge q \equiv q \wedge p$

3. Birleşme Özelliği

Her p, q, r önermesi için $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ dir. Bu özelliğin doğruluk tablosu ile gösterimi aşağıdaki gibidir.

p	q	r	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$(p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

ÖRNEK 13

Aşağıda verilen bileşik önermelerin en sade hâllerini yazınız.

a) $1 \wedge (p \wedge p)$

b) $(0' \wedge p) \wedge (p \wedge 1)$

ÇÖZÜM

a) $1 \wedge (p \wedge p) \equiv 1 \wedge p \equiv p$

b) $(0' \wedge p) \wedge (p \wedge 1) \equiv (1 \wedge p) \wedge (p \wedge 1)$
$\equiv p \wedge p$
$\equiv p$



- $p \wedge p' \equiv 0$
- $p \wedge 0 \equiv 0$
- $p \wedge 1 \equiv p$

ÖRNEK 14

Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

a) $(p \wedge p') \wedge 1$

b) $(p \wedge q') \wedge q$

c) $(p \wedge q) \wedge (p' \wedge q')$

ç) $(p \wedge 0) \wedge (q \wedge 1)$

ÇÖZÜM

a) $(p \wedge p') \wedge 1 \equiv 0 \wedge 1 \equiv 0$

b) $(p \wedge q') \wedge q \equiv p \wedge (q' \wedge q) \equiv p \wedge 0 \equiv 0$

c) $(p \wedge q) \wedge (p' \wedge q') \equiv (p \wedge p') \wedge (q \wedge q') \equiv 0 \wedge 0 \equiv 0$

ç) $(p \wedge 0) \wedge (q \wedge 1) \equiv 0 \wedge q \equiv 0$

“veya” Bağlacı ile Oluşan Bileşik Önermeler

p ile q önermelerinin **“veya”** bağlacı ile bağlanmasından oluşan bileşik önermeye, **p veya q bileşik önermesi** denir ve önerme **$p \vee q$** biçiminde gösterilir.

$p \vee q$ bileşik önermesi; p ile q önermelerinden en az biri doğru iken doğru, her ikisi de yanlış iken yanlıştır.

p ve q önermeleri için **$p \vee q$** önermesinin doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir.



veya bağlacı “ $\vee$ ” sembolü ile gösterilir.

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

ÖRNEK 15

“Matematik öğretmeni Tuğba Hanım’ın öğrencilerine sorduğu soruyu Eylül **veya** Yağız cevaplamıştır.” ifadesindeki olası durumların doğruluğunu ya da yanlışlığını inceleyiniz.

ÇÖZÜM

Soruyu yalnız Eylül’ün cevaplayıp Yağız’ın cevaplamamış olması **doğru**,
Yalnız Yağız’ın cevaplayıp Eylül’ün cevaplamamış olması **doğru**,
Her ikisinin de cevaplamış olması **doğru**,
Her ikisinin de cevaplamamış olması **yanlış** bir ifade belirtir.

- $p \vee p' \equiv 1$
- $p \vee 0 \equiv p$
- $p \vee 1 \equiv 1$

ÖRNEK 16

Aşağıdaki ifadelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

a) $1 \vee 1$
b) $(0 \vee 1) \vee 1$
c) $(1' \vee 0) \vee 1'$
ç) $(1 \vee 0) \wedge (0 \vee 1')$

ÇÖZÜM

a) $1 \vee 1 \equiv 1$
b) $(0 \vee 1) \vee 1 \equiv 1 \vee 1 \equiv 1$
c) $(1' \vee 0) \vee 1' \equiv (0 \vee 0) \vee 0 \equiv 0 \vee 0 \equiv 0$
ç) $(1 \vee 0) \wedge (0 \vee 1') \equiv 1 \wedge (0 \vee 0) \equiv 1 \wedge 0 \equiv 0$

“veya” Bağlacı ile Kurulan Bileşik Önermelerin Özellikleri

1. Tek Kuvvet Özelliği

Her p önermesi için $p \vee p \equiv p$ dir. Bu özelliğin doğruluk tablosu ile gösterimi aşağıdaki gibidir.

p	p	p ∨ p
1	1	1
0	0	0

$p \equiv p \vee p$

2. Değişme Özelliği

Her p, q önermeleri için $p \vee q \equiv q \vee p$ dir. Bu özelliğin doğruluk tablosu ile gösterimi aşağıdaki gibidir.

p	q	p ∨ q	q ∨ p
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

$p \vee q \equiv q \vee p$



3. Birleşme Özelliği

Her p, q, r önermesi için $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ dir. Bu özelliğin doğruluk tablosu ile gösterimi aşağıdaki gibidir.

p	q	r	p ∨ q	q ∨ r	(p ∨ q) ∨ r	p ∨ (q ∨ r)
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0

$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

ÖRNEK 17

Aşağıda verilen bileşik önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

a) $(p \vee 0) \vee (p' \vee p)$
b) $(1 \vee p') \vee (0 \vee p)$
c) $(p \vee q) \vee (p' \vee q')$
ç) $(p' \vee 1') \vee (0 \vee p)$

ÇÖZÜM

a) $(p \vee 0) \vee (p' \vee p) \equiv p \vee 1 \equiv 1$
b) $(1 \vee p') \vee (0 \vee p) \equiv 1 \vee p \equiv 1$
c) $(p \vee q) \vee (p' \vee q') \equiv (p \vee p') \vee (q \vee q') \equiv 1 \vee 1 \equiv 1$
ç) $(p' \vee 1') \vee (0 \vee p) \equiv (p' \vee 0) \vee p \equiv p' \vee p \equiv 1$

ÖRNEK 18

$p \equiv 1$, $q \equiv 0$ ve $r \equiv 1$ ifadeleri için aşağıdaki bileşik önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

a) $(p \vee q') \wedge r$
b) $(q \wedge r') \vee (p \vee r)$
c) $(p \wedge q) \vee r$
ç) $p' \wedge (q' \vee r)$

ÇÖZÜM

a) $(p \vee q') \wedge r \equiv (1 \vee 0') \wedge 1 \equiv (1 \vee 1) \wedge 1 \equiv 1 \wedge 1 \equiv 1$
b) $(q \wedge r') \vee (p \vee r) \equiv (0 \wedge 1') \vee (1 \vee 1) \equiv (0 \wedge 0) \vee 1 \equiv 0 \vee 1 \equiv 1$
c) $(p \wedge q) \vee r \equiv (1 \wedge 0) \vee 1 \equiv 0 \vee 1 \equiv 1$
ç) $p' \wedge (q' \vee r) \equiv 1' \wedge (0' \vee 1) \equiv 0 \wedge (1 \vee 1) \equiv 0 \wedge 1 \equiv 0$



Dağılma Özelliği

1. "ve" nin "veya" üzerine soldan dağılma özelliği, $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ dir. Bu özelliğin doğruluk tablosu ile gösterimi aşağıdaki gibidir.

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

"ve" nin "veya" üzerine sağdan dağılma özelliği $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ dir. Siz de bu özelliği doğruluk tablosu kullanarak gösteriniz.

2. "veya" nın "ve" üzerine soldan dağılma özelliği $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ dir. Bu özelliğin doğruluk tablosu ile gösterimi aşağıdaki gibidir.

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee q$	$p \vee r$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

"veya" nın "ve" üzerine sağdan dağılma özelliği $(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ dir. Siz de bu özelliği doğruluk tablosu kullanarak gösteriniz.

ÖRNEK 19

Aşağıda verilen önermelerin en sade hâllerini bulunuz.

a) $q' \wedge (p \vee q)$

b) $(p \wedge q') \vee p'$

ÇÖZÜM

a) $q' \wedge (p \vee q) \equiv (q' \wedge p) \vee (q' \wedge q)$

$\equiv (q' \wedge p) \vee 0 \equiv q' \wedge p$

b) $(p \wedge q') \vee p' \equiv (p \vee p') \wedge (q' \vee p')$

$\equiv 1 \wedge (q' \vee p') \equiv q' \vee p'$



De Morgan kuralları

- p veya q nun değili $(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$
- p ve q nun değili $(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$

şeklinde verilen kurallara **De Morgan kuralları** denir.

Bu kuralların doğruluk tablosu ile gösterimi aşağıdaki gibidir.

p	q	p′	q′	$p \wedge q$	$p \vee q$	$(p \wedge q)'$	$p' \vee q'$	$(p \vee q)'$	$p' \wedge q'$
1	1	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1	1	1

$(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$ $\quad$ $(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$

ÖRNEK 20

Aşağıda verilen önermelerin en sade hâllerini bulunuz.

a) $(p' \wedge q)' \vee q$

b) $(p \vee q')' \wedge q'$

ÇÖZÜM

a) $(p' \wedge q)' \vee q \equiv ((p')' \vee q') \vee q$

$\equiv (p \vee q') \vee q$

$\equiv p \vee (q' \vee q)$

$\equiv p \vee 1$

$\equiv 1$

b) $(p \vee q')' \wedge q' \equiv (p' \wedge (q')') \wedge q'$

$\equiv (p' \wedge q) \wedge q'$

$\equiv p' \wedge (q \wedge q')$

$\equiv p' \wedge 0$

$\equiv 0$

ÖRNEK 21

Aşağıda verilen önermelerin en sade hâllerini bulunuz.

a) $(p' \vee 0)' \wedge (q \wedge 1)'$

b) $(p \vee q) \wedge (p \wedge q')'$

ÇÖZÜM

a) $(p' \vee 0)' \wedge (q \wedge 1)' \equiv ((p')' \wedge 0') \wedge (q' \vee 1')$

$\equiv (p \wedge 1) \wedge (q' \vee 0) \equiv p \wedge q'$

b) $(p \vee q) \wedge (p \wedge q')' \equiv (p \vee q) \wedge (p' \vee (q')')$

$\equiv (p \vee q) \wedge (p' \vee q)$

$\equiv (p \wedge p') \vee q$

$\equiv 0 \vee q \equiv q$





"ya da" bağlacı " $\veebar$ " sembolü ile gösterilir.

"ya da" Bağlacı ile Oluşan Bileşik Önermeler

p ile q önermelerinin "ya da" bağlacı ile bağlanmasından oluşan bileşik önermeye, **p ya da q bileşik önermesi** denir ve önerme $p \veebar q$ biçiminde gösterilir.

$p \veebar q$ bileşik önermesi; p ile q önermelerinden yalnız biri doğru iken doğru, diğer durumlarda yanlıştır.

p ve q önermeleri için $p \veebar q$ önermesinin doğruluk değerleri tablosu aşağıdaki gibidir.

p	q	$p \veebar q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

ÖRNEK 22

"Babası, Büşra'ya cep telefonu **ya da** bilgisayar aldı." ifadesindeki olası durumların doğruluğunu ya da yanlışlığını inceleyiniz.

ÇÖZÜM

Babası'nın Büşra'ya cep telefonu alıp bilgisayar almamış olması **doğru**,
Bilgisayar alıp cep telefonu almamış olması **doğru**,
Hem cep telefonu hem de bilgisayar almış olması **yanlış**,
Her ikisini almamış olması **yanlış** bir ifade belirtir.
(Yalnız birinin alındığı durumda ifadenin doğru olduğuna dikkat ediniz.)

ÖRNEK 23

p : "2 en küçük asal sayıdır."

q : "2 en küçük pozitif çift tam sayıdır." önermeleri için $p \veebar q$ bileşik önermesini yazıp önermenin doğruluk değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$p \veebar q$: "2 en küçük asal sayıdır ya da 2 en küçük pozitif çift tam sayıdır."

p önermesi doğru, q önermesi de doğru bir önerme olduğunda p ya da q önermesi yanlış bir önermedir.

ÖRNEK 24

Aşağıdaki ifadelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

a) $1 \veebar (0 \veebar 1)$
b) $(0' \veebar 0) \veebar 0'$
c) $(1 \veebar 1') \veebar (0' \veebar 1)$
ç) $(1' \veebar 0) \veebar 1$

ÇÖZÜM

a) $1 \veebar (0 \veebar 1) \equiv 1 \veebar 1 \equiv 0$

b) $(0' \veebar 0) \veebar 0' \equiv (1 \veebar 0) \veebar 1$
$\equiv 1 \veebar 1 \equiv 0$

c) $(1 \veebar 1') \veebar (0' \veebar 1) \equiv (1 \veebar 0) \veebar (1 \veebar 1)$
$\equiv 1 \veebar 0 \equiv 1$

ç) $(1' \veebar 0) \veebar 1 \equiv (0 \veebar 0) \veebar 1$
$\equiv 0 \veebar 1 \equiv 1$



" ya da" Bağlacı İle Kurulan Bileşik Önermelerin Özellikleri

1. Değişme Özelliği

Her p ve q önermesi için $p \veebar q \equiv q \veebar p$ dir. Bu özelliğin doğruluk tablosu ile gösterimi aşağıdaki gibidir.

p	q	$p \veebar q$	$q \veebar p$
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

$p \veebar q \equiv q \veebar p$

2. Birleşme Özelliği

Her p, q, r önermesi için $(p \veebar q) \veebar r \equiv p \veebar (q \veebar r)$ dir. Bu özelliğin doğruluk tablosu ile gösterimi aşağıdaki gibidir.

p	q	r	$p \veebar q$	$q \veebar r$	$(p \veebar q) \veebar r$	$p \veebar (q \veebar r)$
1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0

$(p \veebar q) \veebar r \equiv p \veebar (q \veebar r)$



$p \veebar p' \equiv 1$
$p \veebar p \equiv 0$
$p \veebar 1 \equiv p'$
$p \veebar 0 \equiv p$

ÖRNEK 25

Aşağıdaki önermelerin en sade hâllerini bulunuz.

a) $(p \veebar p')' \veebar q$
b) $q' \veebar (1 \veebar q)$
c) $(1 \veebar q') \vee (0 \veebar 0)$
ç) $(p \wedge p') \veebar (q \vee q')$

ÇÖZÜM

a) $(p \veebar p')' \veebar q \equiv 1' \veebar q$
$\equiv 0 \veebar q \equiv q$

b) $q' \veebar (1 \veebar q) \equiv q' \veebar q' \equiv 0$

c) $(1 \veebar q') \vee (0 \veebar 0) \equiv q \vee 0 \equiv q$

ç) $(p \wedge p') \veebar (q \vee q') \equiv 0 \veebar 1 \equiv 1$



ALIŞTIRMALAR

1. p : "İki basamaklı en küçük tam sayı -99 dur."
q : "Camın ham maddelerinden biri kumdur."
r : "Bir asal sayının 2 katının 1 fazlası daima bir asal sayıdır."
önermelerine göre aşağıdaki bileşik önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

a) $(p \vee q') \wedge r$ **b)** $(p \wedge q)' \vee r$

c) $(p' \vee r) \vee (p \wedge q')'$ **ç)** $p \wedge (q \vee r')$

2. Aşağıdaki ifadelerin doğruluk değerini bulunuz.

a) $(1 \vee 0) \wedge 1$ **b)** $(0 \wedge 1) \vee (1 \vee 0)'$

c) $(1' \wedge 0) \vee (0 \vee 1)$ **ç)** $(1 \wedge ((1 \wedge 1) \wedge 1) \wedge 1')$

3. Aşağıdaki denkliklerden doğru olanın yanına (D), yanlış olanın yanına (Y) yazınız.

a) $p' \vee p \equiv 1$ (....)
b) $(p \wedge q')' \equiv p' \vee q$ (....)
c) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (....)
ç) $p \wedge 1 \equiv 1$ (....)

4. Aşağıdaki bileşik önermelerin en sade hâlini bulunuz.

a) $p \vee (p \wedge q)'$ **b)** $(p \vee q')' \wedge p$

c) $(p \vee q') \wedge (p' \wedge q)'$ **ç)** $(p \vee q')' \vee (p' \wedge q')$

5. $(p \vee q')' \wedge (q \wedge r) \equiv 1$ olduğuna göre p, q ve r önermelerinin doğruluk değerlerini bulunuz.

6. Aşağıdaki ifadelerin en sade hâlini bulunuz.

a) $(p \wedge 0) \vee (p \vee 1)$ **b)** $(p \vee 0) \wedge (p' \wedge 1)$

7. 19 Mayıs Lisesinde görev yapan Müdür Yardımcısı Selin Hanım, nöbetçi öğrenciyi çağırarak ona 9-C sınıfından Kemal veya Yağmur'un, odasına gelmesini söylemiştir. Nöbetçi öğrenci 9-C sınıfına girerken çağrılan iki öğrenci için arada kullanılan " veya" bağlacını unutmuştur. Buna göre

a) Nöbetçi öğrenci bağlacı "ve" olarak hatırlarsa hangi olası durumların gerçekleşeceğini bulunuz.
b) Nöbetçi öğrenci bağlacı "ya da" olarak hatırlarsa hangi olası durumların gerçekleşeceğini bulunuz.
c) Nöbetçi öğrenci Selin Hanım'ın söylediğini doğru hatırlarsa hangi olası durumların gerçekleşeceğini bulunuz.

8. $(1 \veebar 1') \vee (0 \veebar 0')$ bileşik önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

9. $(p' \vee q') \veebar (p \wedge q)$ bileşik önermesini en sade biçimde yazınız.



9.1.1.3. Koşullu Önerme ve İki Yönlü Koşullu Önerme

"ise" Bağlacı ile Oluşan Bileşik Önermeler

p ile q önermelerinin "ise" bağlacı ile bağlanmasından oluşan bileşik önermeye **koşullu önerme** denir ve bu koşullu önerme $\mathbf{p \Rightarrow q}$ biçiminde gösterilir.

$\mathbf{p \Rightarrow q}$ önermesi; p doğru, q yanlış iken yanlış diğer durumlarda doğrudur.

p ve q önermeleri için $\mathbf{p \Rightarrow q}$ önermesinin doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir.

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1



"ise" bağlacı " $\Rightarrow$ " sembolü ile gösterilir.

ÖRNEK 26

- p : "Batuhan evinde boşa yanan lambayı söndürür."
- q : "Batuhan parasından tasarruf eder."

Yukarıda verilen önermelere göre $p \Rightarrow q$ önermesini yazınız.

ÇÖZÜM

$p \Rightarrow q$: "Batuhan evinde boşa yanan lambayı söndürür **ise** parasından tasarruf eder." şeklinde yazılır.

ÖRNEK 27

- p : "TBMM Ankara'dadır."
- q : "Türkiye'nin başkenti Ankara'dır."

şeklinde verilen p ile q önermelerini "ise" bağlacını kullanarak yazıp önermenin doğruluk değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$p \Rightarrow q$: "TBMM Ankara'da ise Türkiye'nin başkenti Ankara'dır." olarak yazılır.
p nin doğruluk değeri 1, q nun doğruluk değeri 1olur.
Dolayısıyla doğruluk değeri $p \Rightarrow q \equiv 1 \Rightarrow 1 \equiv 1$ olur.

ÖRNEK 28

$p \equiv 1$ ve $q \equiv 0$ olmak üzere aşağıdaki bileşik önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

a) $p \Rightarrow q'$

b) $p' \Rightarrow q'$

c) $(p \Rightarrow q)' \Rightarrow q'$

ç) $(p' \Rightarrow q) \wedge q$

ÇÖZÜM

a) $p \Rightarrow q' \equiv 1 \Rightarrow 0'$
$\equiv 1 \Rightarrow 1 \equiv 1$

b) $p' \Rightarrow q' \equiv 1' \Rightarrow 0'$
$\equiv 0 \Rightarrow 1 \equiv 1$

c) $(p \Rightarrow q)' \Rightarrow q' \equiv (1 \Rightarrow 0)' \Rightarrow 0'$
$\equiv 0' \Rightarrow 1$
$\equiv 1 \Rightarrow 1 \equiv 1$

ç) $(p' \Rightarrow q) \wedge q \equiv (1' \Rightarrow 0) \wedge 0$
$\equiv (0 \Rightarrow 0) \wedge 0$
$\equiv 1 \wedge 0 \equiv 0$



$p \Rightarrow q$ önermesi $p' \vee q$ önermesine denktir.

$p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$ denkliğinin doğruluk tablosu ile gösterimi aşağıdaki gibidir.

p	q	p'	$p' \vee q$	$p \Rightarrow q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

$p' \vee q \equiv p \Rightarrow q$

ÖRNEK 29

$(p' \Rightarrow q) \vee q'$ bileşik önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}(p' \Rightarrow q) \vee q' &\equiv ((p')' \vee q) \vee q' \\ &\equiv (p \vee q) \vee q' \\ &\equiv p \vee (q \vee q') \\ &\equiv p \vee 1 \\ &\equiv 1 \text{ dir.}\end{aligned}$$



- $p \Rightarrow p \equiv 1$
- $p \Rightarrow 0 \equiv p'$
- $0 \Rightarrow p \equiv 1$
- $p \Rightarrow 1 \equiv 1$
- $1 \Rightarrow p \equiv p$

ÖRNEK 30

Aşağıda verilen önermelerin en sade hâllerini bulunuz.

a) $(p \Rightarrow 1) \wedge p$ **b)** $(1 \Rightarrow p)' \Rightarrow 0$ **c)** $(0 \Rightarrow p)' \vee (p \Rightarrow 0)$

ÇÖZÜM

a) $(p \Rightarrow 1) \wedge p \equiv (p' \vee 1) \wedge p$
$\equiv 1 \wedge p \equiv p$ olur.

b) $(1 \Rightarrow p)' \Rightarrow 0 \equiv (1' \vee p)' \Rightarrow 0$
$\equiv [(1' \vee p)']' \vee 0$
$\equiv (0 \vee p) \vee 0 \equiv p$ olur.

c) $(0 \Rightarrow p)' \vee (p \Rightarrow 0) \equiv (0' \vee p)' \vee (p' \vee 0)$
$\equiv (1 \vee p)' \vee p'$
$\equiv 1' \vee p'$
$\equiv 0 \vee p' \equiv p'$ olur.

ÖRNEK 31

$(p \Rightarrow q)' \wedge r' \equiv 1$ bileşik önermesinde p, q ve r önermelerinin doğruluk değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$(p \Rightarrow q)' \wedge r' \equiv 1$ olduğundan $(p \Rightarrow q)' \equiv 1$ ve $r' \equiv 1$ dir.

$(p \Rightarrow q)' \equiv 1$ ise $p \Rightarrow q \equiv 0$ olur.
$p \Rightarrow q \equiv 0$ ise $p \equiv 1$ ve $q \equiv 0$ olur.
$r' \equiv 1$ ise $r \equiv 0$ olur.



Önermenin Karşıtı, Tersi ve Karşıt Tersi

- $p \Rightarrow q$ önermesinin **karşıtı** $q \Rightarrow p$,
- $p \Rightarrow q$ önermesinin **tersi** $p' \Rightarrow q'$,
- $p \Rightarrow q$ önermesinin **karşıt tersi** $q' \Rightarrow p'$ olur.

Bu özelliklerin doğruluk tablosu ile gösterimi aşağıdaki gibidir.

p	q	p′	q′	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p' \Rightarrow q'$	$q' \Rightarrow p'$
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1

$q \Rightarrow p \equiv p' \Rightarrow q'$

$p \Rightarrow q \equiv q' \Rightarrow p'$



$p \Rightarrow q$ önermesinin karşıt tersi olan $q' \Rightarrow p'$ önermesine denk olduğuna dikkat ediniz.

ÖRNEK 32

p : "Efe'nin kitap okuma alışkanlığı vardır." ile q : "Efe başarılı bir öğrencidir." önermeleri için $p \Rightarrow q$ önermesinin karşıtını, tersini ve karşıt tersini yazınız.

ÇÖZÜM

$q \Rightarrow p$: "Efe başarılı bir öğrenciyse kitap okuma alışkanlığı vardır."
$p' \Rightarrow q'$: "Efe'nin kitap okuma alışkanlığı yoksa başarılı bir öğrenci değildir."
$q' \Rightarrow p'$: "Efe başarılı bir öğrenci değilse kitap okuma alışkanlığı yoktur."

ÖRNEK 33

$p \Rightarrow q$ bileşik önermesinin olumsuzunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$(p \Rightarrow q)' \equiv (p' \vee q)'$
$\equiv (p')' \wedge q'$
$\equiv p \wedge q'$ dir.

ÖRNEK 34

İki arkadaş izledikleri bir voleybol maçı dönüşünde Ali ile karşılaşıyor.

- Bir voleybol maçında iki farklı sonuç vardır.
- Ali bu arkadaşlardan birinin doğru bir davranış olmamasına rağmen daima yalan, diğerinin ise erdemli bir şekilde daima doğruyu söylediğini bilmektedir.
- Ali hangi arkadaşının doğru hangi arkadaşının yalan söylediğini unutmuştur.
- Ali bu arkadaşlarından yalnız birine sadece bir soru soracaktır.

Buna göre Ali'nin maçı hangi takımın kazandığını öğrenmesi için sorması gereken soruyu bulunuz.

ÇÖZÜM

Bu iki arkadaştan birinin maç sonucu hakkında söylediği cevaba p denilirse diğer arkadaşın cevabı p' olur. Dolayısıyla $p \wedge p' \equiv 0$ dır.

Ali'nin doğru cevaba ulaşabilmesi için her iki arkadaşın da cevabını kapsayan bir soru sorması gerekir. Bu soru ise karşılaştığı iki arkadaştan herhangi birine "Yanındaki arkadaşına sorsam bana hangi takımın kazandığını söyler?" şeklinde olmalıdır. Ali'nin alacağı cevap ne olursa olsun hep yanlıştır. Bu durumda alınan cevabın değili, doğru cevaptır.





$p \Rightarrow q$ koşullu önermesinin doğruluk değeri 1 ise bu koşullu önermeye **gerektirme** denir.



ancak ve ancak bağlacı " $\Leftrightarrow$ " sembolü ile gösterilir.



$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

ÖRNEK 35

p : "$-5 > 3$ tür."
q : "$7 < -1$ dir."
verilen önermelere göre $p \Rightarrow q$ koşullu önermesini yazıp bu önermenin bir gerektirme olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM

$p \Rightarrow q$: "$-5 > 3$" ise $7 < -1$ dir. $p \equiv 0$ ve $q \equiv 0$ olduğundan $p \Rightarrow q \equiv 0 \Rightarrow 0 \equiv 1$ olur.
Böylece $p \Rightarrow q$ koşullu önermesinin bir gerektirme olduğu görülür.

"ancak ve ancak" Bağlacı ile Kurulan Bileşik Önermeler

p ve q iki önerme olmak üzere $p \Rightarrow q$ ile $q \Rightarrow p$ koşullu önermelerinin $\wedge$ bağlacı ile birbirine bağlanmasından oluşan $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ bileşik önermesine **iki yönlü koşullu** önerme denir.

İki yönlü koşullu önerme $\mathbf{p \Leftrightarrow q}$ şeklinde yazılır ve "p ancak ve ancak q" olarak okunur.

$p \Leftrightarrow q$ iki yönlü koşullu önermesi p ile q nun doğruluk değerleri aynı iken doğru, farklı iken yanlıştır.

p ve q önermeleri için $p \Leftrightarrow q$ önermesinin doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

p ve q önermeleri için $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ önermesinin doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

$\mathbf{(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv p \Leftrightarrow q}$

ÖRNEK 36

p : "Sevcan müziği sever."
q : "Sevcan saz çalar." olarak verilen önermeleri ancak ve ancak bağlacı kullanarak iki yönlü koşullu önerme durumuna getiriniz.

ÇÖZÜM

$p \Leftrightarrow q$: "Sevcan, müziği sever ancak ve ancak saz çalar." şeklinde yazılır.

ÖRNEK 37

Aşağıda verilen ifadelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

a) $1 \Leftrightarrow 1'$

b) $(0 \Leftrightarrow 1)' \Leftrightarrow 0'$

c) $(0 \Leftrightarrow 0) \Leftrightarrow (1 \Leftrightarrow 1')$

ç) $(1 \Rightarrow 1)' \Leftrightarrow (0 \vee 1)'$

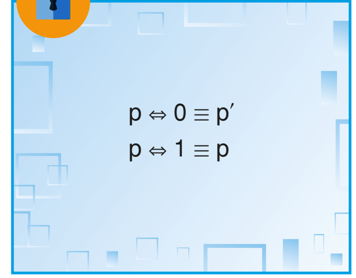
ÇÖZÜM

a) $1 \Leftrightarrow 1' \equiv 1 \Leftrightarrow 0$
$\equiv 0$ olur.

b) $(0 \Leftrightarrow 1)' \Leftrightarrow 0' \equiv 0' \Leftrightarrow 1$
$\equiv 1 \Leftrightarrow 1$
$\equiv 1$ olur.

c) $(0 \Leftrightarrow 0) \Leftrightarrow (1 \Leftrightarrow 1') \equiv 1 \Leftrightarrow (1 \Leftrightarrow 0)$
$\equiv 1 \Leftrightarrow 0$
$\equiv 0$ olur.

ç) $(1 \Rightarrow 1)' \Leftrightarrow (0 \vee 1)' \equiv 1' \Leftrightarrow 1'$
$\equiv 0 \Leftrightarrow 0$
$\equiv 1$ olur.



$p \Leftrightarrow 0 \equiv p'$
$p \Leftrightarrow 1 \equiv p$

"ancak ve ancak" Bağlacının Özellikleri

- $p \Leftrightarrow q \equiv q \Leftrightarrow p$
- $p \Leftrightarrow p \equiv 1$
- $p \Leftrightarrow p' \equiv 0$
- $p \Leftrightarrow q \equiv p' \Leftrightarrow q'$
- $(p \Leftrightarrow q)' \equiv p' \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow q'$

$p \Leftrightarrow q \equiv q \Leftrightarrow p$ denkliğinin doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir.

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$q \Leftrightarrow p$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	1

$p \Leftrightarrow q \equiv q \Leftrightarrow p$

ÖRNEK 38

$(p \Leftrightarrow p') \vee p$ bileşik önermesini en sade hâliyle yazınız.

ÇÖZÜM

$(p \Leftrightarrow p') \vee p \equiv 0 \vee p$
$\equiv p$ olur.

ÖRNEK 39

Aşağıdaki önermeleri en sade hâliyle yazınız.

a) $(p \Leftrightarrow p') \Leftrightarrow p$

b) $(p \Rightarrow 1)' \Leftrightarrow (1 \Rightarrow q)$

ÇÖZÜM

a) $(p \Leftrightarrow p') \Leftrightarrow p \equiv 0 \Leftrightarrow p$
$\equiv p'$ olur.

b) $(p \Rightarrow 1)' \Leftrightarrow (1 \Rightarrow q) \equiv 1' \Leftrightarrow q$
$\equiv 0 \Leftrightarrow q$
$\equiv q'$ olur.

ÖRNEK 40

$(p \Leftrightarrow q') \wedge (p \wedge q)$ bileşik önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$(p \Leftrightarrow q') \wedge (p \wedge q) \equiv [(p \Rightarrow q') \wedge (q' \Rightarrow p)] \wedge (p \wedge q)$
$\equiv [(p' \vee q') \wedge ((q')' \vee p)] \wedge (p \wedge q)$
$\equiv [(p \wedge q)' \wedge (q \vee p)] \wedge (p \wedge q)$
$\equiv [(q \vee p) \wedge (p \wedge q)'] \wedge (p \wedge q)$
$\equiv (q \vee p) \wedge \underbrace{(p \wedge q)' \wedge (p \wedge q)}_{0}$
$\equiv (q \vee p) \wedge 0 \equiv 0$ olur.



$p \Leftrightarrow q$ önermesinin doğruluk değeri 1 ise bu önermeye **çift gerektirme** denir.

ÖRNEK 41

p : " $-5+2=-3$ tür."
q : "3 bir asal sayıdır."
Verilen önermelere göre $p \Leftrightarrow q$ önermesinin bir çift gerektirme olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM

p önermesinin doğruluk değeri 1 ve q önermesinin doğruluk değeri 1 dir.
$p \Leftrightarrow q \equiv 1 \Leftrightarrow 1 \equiv 1$ olduğundan $p \Leftrightarrow q$ önermesi bir çift gerektirmedir.

ALIŞTIRMALAR

1. $p \equiv 1,\ q \equiv 0,\ r \equiv 1$ doğruluk değerlerine göre aşağıdaki bileşik önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

a) $p \Rightarrow (q \wedge r)$
b) $(p \vee q) \Rightarrow r$
c) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow r)$
ç) $(q' \Rightarrow p) \Rightarrow r'$

2. $(p \wedge q') \Rightarrow r \equiv 0$ ise $(p \Rightarrow r)' \Rightarrow (q \vee r')$ bileşik önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

3. $(p' \Rightarrow q)' \Rightarrow p'$ bileşik önermesini en sade biçimde yazınız.

4. $(p \Rightarrow q)' \vee (p \Rightarrow q)$ bileşik önermesini en sade biçimde yazınız.

5. $(p \Rightarrow q')' \vee (q \Rightarrow p)'$ bileşik önermesini en sade biçimde yazınız.

6. "Bayrak dalgalanırsa vatan düşmez." önermesinin tersini, karşıtını ve karşıt tersini yazınız.

7. $(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \wedge p')$ bileşik önermesini en sade biçimde yazınız.

8.

p	q	q′	$p \Leftrightarrow q$	$p \Leftrightarrow q'$
1	1	a		
1	0	b		y
0	1		x	
0	0			

Tabloda verilenlere göre aşağıdaki denkliklerden hangisi ya da hangilerinin doğru olduğunu bulunuz.

I. $a \Leftrightarrow b \equiv 1$ II. $x \Leftrightarrow y \equiv 0$ III. $a \Leftrightarrow x \equiv 1$ IV. $b \Rightarrow y \equiv 0$

9.

I. $p \Leftrightarrow p' \equiv 0$
II. $(p \Leftrightarrow q)' \equiv p' \Leftrightarrow q$
III. $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$
IV. $p \Leftrightarrow 1 \equiv p$

Yukarıdaki denkliklerden hangisi ya da hangilerinin doğru olduğunu bulunuz.



9.1.1.4. Her (∀) ve Bazı (∃) Niceleyicileri

Açık Önerme

İçinde en az bir değişken bulunan ve bu değişkenlere verilen değerlerle doğru ya da yanlış olduğu belirlenen önermelere **açık önerme** denir.

Bir açık önermeyi doğrulayan elemanların kümesine o açık önermenin **doğruluk kümesi** denir.

Bir a sayısı p(x) açık önermesinin doğruluk kümesinin elemanı ise $p(a) \equiv 1$ dir.

Bir b sayısı p(x) açık önermesinin doğruluk kümesinin elemanı değil ise $p(b) \equiv 0$ dır.

ÖRNEK 42

p(x) : "x bir tam sayı, $x^2=9$" açık önermesi için

a) Doğruluk kümesini bulunuz.

b) p(3) , p(−2) , p(0) ifadelerinin doğruluk değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

a) $x^2=9$ denklemini sağlayan 3 ve −3 tam sayıları bu açık önermenin doğruluk kümesini oluşturur. Doğruluk kümesi D olmak üzere D={−3 , 3} ile gösterilir.

b) x = 3 için $3^2=9$ ve 9=9 olduğundan $p(3) \equiv 1$ olur.

x = −2 için $(-2)^2=4$ ve $4 \neq 9$ olduğundan $p(-2) \equiv 0$ olur.

x = 0 için $0^2=0$ ve $0 \neq 9$ olduğundan $p(0) \equiv 0$ olur.



Doğruluk kümesinin elemanları { } içine aralarına virgül koyularak yazılır.

ÖRNEK 43

Aşağıda verilen açık önermelerin doğruluk kümelerini bulunuz.

a) p(x) : "x bir tam sayı, $5 \leq x < 12$"

b) q(x) : "x bir doğal sayı, $2 < x^2 < 20$"

c) r(x) : "x bir pozitif tam sayı, $3x - 2 \leq 7$"

ç) s(x) : "x bir gerçek sayı, $2x + 3 . (x - 1) = 7$"

ÇÖZÜM

a) p önermesinin doğruluk kümesi, D={5, 6, 7, 8, 9, 10, 11} olur.

b) q önermesinin doğruluk kümesi, D={2, 3, 4} olur.

c) $3x - 2 \leq 7$ ise $3x - 2 + 2 \leq 7 + 2$

$$3x \cdot \frac{1}{3} \leq 9 \cdot \frac{1}{3}$$

$$x \leq 3$$

olup r önermesinin doğruluk kümesi, D={1, 2, 3} olur.

ç) $2x + 3 \cdot (x-1) = 7$ ise $2x + 3x - 3 = 7$

$$5x - 3 + 3 = 7 + 3$$

$$5x = 10$$

$$x = 2$$

olup s önermesinin doğruluk kümesi, D = {2} olur.



Her denklem ve her eşitsizlik aynı zamanda bir açık önerme belirtir. Denklemler ve eşitsizliklerin çözüm kümeleri ise bu açık önermelerin doğruluk kümesidir.





Doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$, tam sayılar kümesi $\mathbb{Z}$, rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}$, gerçek sayılar kümesi $\mathbb{R}$, sembolleri ile gösterilir.

Niceleyiciler

"Her" sözcüğü, bütün ve tamamı sözcükleri ile aynı anlamdadır.

"Her" niceleyicisi, önüne geldiği elemanların tamamını anlattığı için bu niceleyiciye **evrensel niceleyici** denir ve " $\forall$ " sembolü ile gösterilir.

"Bazı" sözcüğü, en az bir ifadesi ile aynı anlamdadır.

"Bazı" niceleyicisi, en az bir tane anlamında kullanıldığı için bu niceleyiciye **varlıksal niceleyici** denir ve " $\exists$ " sembolü ile gösterilir.

ÖRNEK 44

Sembolik mantık kullanılarak verilen " $\forall x \in \mathbb{Z}^+, x^2 > 0$ " ifadesini sözel olarak ifade ediniz.

ÇÖZÜM

"Her pozitif tam sayının karesi sıfırdan büyüktür." şeklinde ifade edilir.

ÖRNEK 45

Sembolik mantık kullanılarak verilen " $\exists x \in \mathbb{Z}, x-2 \le 8$ " ifadesini sözel olarak ifade ediniz.



Bir elemanın hangi kümeye ait olduğunu belirtmek için " $\in$ " sembolü kullanılır. Örneğin a sayısının tam sayılar kümesinin bir elemanı olduğu " $a \in \mathbb{Z}$ " şeklinde gösterilir ve "a elemanıdır tam sayılar kümesi" biçiminde okunur

ÇÖZÜM

"Bazı tam sayıların 2 eksiği 8 e eşit veya 8 den küçüktür." veya " En az bir tam sayının 2 eksiği 8 e eşit veya 8 den küçüktür." şeklinde ifade edilir.

ÖRNEK 46

Aşağıda verilen önermeleri sembolik mantık kullanarak yazıp önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

a) p : "Her tam sayı kendisinin karesinden küçüktür."

b) q : "Bazı gerçek sayıların 3 fazlası 7 den büyüktür."

ÇÖZÜM

a) $p(x)$: " $\forall x \in \mathbb{Z}, x < x^2$ " şeklinde ifade edilir. Bu kurala uymayan herhangi bir tam sayının bulunması bu önermenin doğruluk değerini 0 yapar. 0 ve 1 tam sayıları için bu açık önerme yanlıştır ve $p \equiv 0$ olur.

b) $q(x)$: " $\exists x \in \mathbb{R}, x+3 > 7$ " şeklinde ifade edilir. Bu kurala uyan herhangi bir gerçek sayının bulunması bu önermenin doğruluk değerini 1 yapar. Örneğin 5 sayısı için bu açık önerme doğrudur ve $q \equiv 1$ olur.



Gösterim	Değili
$\forall$	$\exists$
$\exists$	$\forall$
$=$	$\neq$
$\neq$	$=$
$<$	$\geq$
$>$	$\leq$
$\leq$	$>$
$\geq$	$<$

Açık Önermenin Değili (Olumsuzu)

$\exists x,\ p(x)$ açık önermesinin değili $\forall x, p'(x)$ tir. Bu özellik sembol ile $[\exists x,\ p(x)]' \equiv \forall x,\ p'(x)$ şeklinde ifade edilir.

$\forall x, p(x)$ açık önermesinin değili $\exists x, p'(x)$ tir. Bu özellik sembol ile $[\forall x, p(x)]' \equiv \exists x, p'(x)$ şeklinde ifade edilir.

ÖRNEK 47

p : "Her asal sayı bir doğal sayıdır." önermesinin değilini bulunuz.

ÇÖZÜM

p′ : "Bazı asal sayılar bir doğal sayı değildir."



ÖRNEK 48

Aşağıda verilen önermelerin değilini bulunuz.

a) $p(x)$: "$\exists x \in \mathbb{Z}, x^2 + x > 0$"

b) $q(x)$: "$\forall x, y \in \mathbb{N}, x \cdot y = 6$"

c) $r(x)$: "$\exists x \in \mathbb{Z}, x^2 \neq 9$"

ç) $s(x)$: "$\forall x \in \mathbb{Z}^+, 2x - 1 \leq 10$"

ÇÖZÜM

a) $p'(x)$: "$\forall x \in \mathbb{Z}, x^2 + x \leq 0$"

b) $q'(x)$: "$\exists x, y \in \mathbb{N}, x \cdot y \neq 6$"

c) $r'(x)$: "$\forall x \in \mathbb{Z}, x^2 = 9$"

ç) $s'(x)$: "$\exists x \in \mathbb{Z}^+, 2x - 1 > 10$"

ÖRNEK 49

Aşağıda verilen önermelerin değilini bulunuz.

a) $p(x)$: "$(\forall x \in \mathbb{N}, x^2 > 0) \wedge (\exists x \in \mathbb{Z}, x^2 = 2x + 3)$"

b) $q(x)$: "$(\exists x \in \mathbb{N}, x = 4) \vee (\forall x \in \mathbb{Z}^+, 3x + 4 \leq 5)$"

ÇÖZÜM

a) $p'(x)$: "$(\exists x \in \mathbb{N}, x^2 \leq 0) \vee (\forall x \in \mathbb{Z}, x^2 \neq 2x + 3)$"

b) $q'(x)$: "$(\forall x \in \mathbb{N}, x \neq 4) \wedge (\exists x \in \mathbb{Z}^+, 3x + 4 > 5)$"

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıda verilen açık önermelerin doğruluk kümelerini bulunuz.

a) $p(x)$: "$x \in \mathbb{Z}, -7 \leq x^2 < 8$"

b) $q(x)$: "$x \in \mathbb{Z}^+, 0 \leq x^x < 36$"

c) $r(x)$: "$x \in \mathbb{Z}, \frac{x+1}{x+2} = 2$"

2. Aşağıda verilen önermelerin değilini bulunuz.

a) $p(x)$: "$(\forall x \in \mathbb{Z}, -3 < x < 5) \vee (\exists x \in \mathbb{N}, 5x = x + 12)$"

b) $q(x)$: "$(\exists x \in \mathbb{Z}, x \neq 4) \wedge (\forall x \in \mathbb{Z}^+, |x - 1| = 5)$"

3. "$\forall x \in \mathbb{Z}, x \geq 0$ ise $x^2 - 1 < 7$" önermesinin karşıt tersini bulunuz.

4. $p(x)$: "$(-2x > 6) \Rightarrow (3x - 6 = 12)$" önermesinin değilini bulunuz.

9.1.1.5. Tanım, Aksiyom, Teorem ve İspat Kavramları

Anlamı bilinen sözcükler, tanımsız terimler ve daha önceden tanımlanmış terimler yardımıyla terimlerin özelliklerini belirtmeye bu terimleri **tanımlama** denir. Anlamları bilinen terimler tanımlı ya da tanımsız olabilir.

İyi bir tanımda olması gereken özellikler aşağıdaki gibidir.

I. Anlamı bilinen sözcükler, tanımsız terimler veya tanımlı terimlerle yapılmalıdır.

II. Tutarlı, açık ve anlaşılır olmalıdır.

III. Tanım; belirtilmesi gereken özelliği kapsamalı, başka özellikleri kapsamayacak biçimde kesin olmalıdır.





Her bilim dalının kendine özgü sözcükleri vardır. Bu sözcüklere o bilim dalına ait **terim** denir.

Asal sayı, açı, üçgen, dörtgen gibi kavramlar matematiksel birer terimdir. Bu terimler diğer matematiksel terimler yardımıyla tanımlanabilir. Bu tür terimlere tanımlı **terimler** denir.

Çeşitli örnekler ile sezgiler kullanılarak kavranabilen terimlere tanımsız terim denir. Nokta, doğru, düzlem, küme kavramları tanımsız birer terimdir.

ÖRNEK 50

"İki ya da daha çok kümenin tüm elemanlarının oluşturduğu kümeye birleşim kümesi denir." Bu tanımda kullanılan terimleri yazınız.

ÇÖZÜM

Verilen birleşim kümesi tanımında küme ve eleman terimleri kullanılmıştır.

Doğruluğu ispatsız olarak kabul edilen önermelere **aksiyom** denir. Aksiyomlarda bulunması gereken özellikler aşağıdaki gibidir.

I. Birbirleri ile çelişmemelidir.
II. Birbirlerinden bağımsız olmalıdır. (Bir aksiyom diğer aksiyomlardan çıkarılmamalıdır.)
III. Mümkün olduğu kadar az sayıda olmalıdır.

ÖRNEK 51

p : "A noktası d doğrusunun dışında bir nokta ise A noktasından geçen ve d doğrusuna paralel olan yalnızca bir doğru vardır." önermesinin aksiyom olup olmadığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Bu önerme kendisinden önceki tanım, teorem ya da aksiyomlarla ispatlanamaz. Bu durumda p önermesi aksiyomdur.

p ve q önermeler olmak üzere p önermesi doğru iken $p \Rightarrow q$ önermesinin doğruluğu ispatlanabiliyorsa $p \Rightarrow q$ önermesi bir teoremdir. Başka bir ifadeyle doğruluğu ispatlanabilen önermelere **teorem** denir.

$p \Rightarrow q$ teorem olmak üzere p önermesine **hipotez**, q önermesine **hüküm** denir.



Bir teoremin doğru önerme olduğunu göstermeye teoremin **ispatlanması** denir. $p \Rightarrow q$ teoreminde p önermesi doğru olduğundan teoremi ispatlamak için q önermesinin doğru olduğunu göstermek gereklidir. Teorem ispatlanırken teoremde verilenlerden (hipotezlerden), daha önce ispatlanmış teoremlerden, tanımlardan ve aksiyomlardan yararlanılır.

ÖRNEK 52

Teorem : "ABC üçgeni eşkenar üçgen ise ABC üçgeninin tüm iç açı ölçüleri birbirine eşittir."

Yukarıda verilen teoremi $p \Rightarrow q$ şeklinde ifade ederek teoremin hipotezini ve hükmünü belirtiniz.

ÇÖZÜM

p : " ABC üçgeni eşkenar üçgendir." ve q : " ABC üçgeninin tüm iç açı ölçüleri birbirine eşittir." alınırsa verilen teorem $p \Rightarrow q$ şeklinde ifade edilmiş olur. Bu durumda teoremin hipotezi p : " ABC üçgeni eşkenar üçgendir." önermesi olurken hükmü q : " ABC üçgeninin tüm iç açı ölçüleri birbirine eşittir." önermesi olur.

ALIŞTIRMALAR

1. Bir teoremin hipotezi ile hükmünün doğru önermeler olduğunu gösteriniz.
2. "Çember, düzlemde sabit bir noktaya eşit uzaklıktaki noktaların kümesidir." ifadesinin iyi bir tanım olup olmadığını belirterek kullanılan terimleri bulunuz.
3. $(p' \vee q) \Rightarrow r$ teoreminin hipotezi olan önerme ile hükmü olan önermeyi belirtiniz. Bu teoremin doğruluğunu göstermek için hangi önermenin doğruluğunu göstermenin yeterli olduğunu bulunuz.
4. Aşağıdaki önermelerden hangilerinin teorem hangilerinin aksiyom olduğunu bulunuz.
   a) p : " iki tek sayının çarpımı tek sayıdır."
   b) r : " $x = 2 \Rightarrow x^2 - 4 = 0$ dır."
   c) s : " İki üçgen eş ise benzerdir."



9.1. ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

1. Aşağıdaki ifadelerden hangisi önerme değildir?

A) Merkür kızıl gezegen adıyla bilinir.
B) Türkiye yedi coğrafi bölgeye ayrılmıştır.
C) Hadi ders çalışalım.
D) 1.Dünya Savaşı İttifak Devletleri'nden birisi Alman İmparatorluğu'dur.
E) $\sqrt{3}$ bir rasyonel sayıdır.

2. Aşağıdaki önermelerden hangisinin olumsuzunun doğruluk değeri "1" dir?

A) Ankara Türkiye'nin başkentidir.
B) İki basamaklı 45 tane çift sayı vardır.
C) Üçgenlerin iç açıları toplamı 180 derecedir.
D) Tavşan uçan bir hayvandır.
E) Basketbol maçlarında her takım 5 oyuncu ile sahada mücadele eder.

3. p : "Fatih Sultan Mehmet İstanbul'u fethetti."
q : "İstanbul'un Fethi Orta Çağ'ı kapattı."
önermeleri kullanılarak aşağıdaki denklikler oluşturulmuştur.

I. $p \wedge q \equiv 1$
II. $(p' \vee q) \wedge q' \equiv 0$
III. $(p \vee q)' \equiv 0$
IV. $(p \wedge q')' \vee p' \equiv 0$

Yukarıdaki denkliklerden hangileri doğrudur?

A) I - III B) II - III C) I - II - III D) II - III-IV E) I- II - IV

4. $(p \vee q') \wedge (p \vee q)$ bileşik önermesinin en sade hâli aşağıdakilerden hangisidir?

A) p B) p′ C) q D) q′ E) 1

5. $[p \vee (p' \wedge q)] \wedge (p' \wedge q')$ önermesi aşağıdakilerden hangisine denktir?

A) $p \vee p'$ B) 0 C) $p \wedge q'$ D) p E) 1

6. $p \Rightarrow (q \vee r) \equiv 0$ olduğuna göre $(p' \Rightarrow q) \Rightarrow (q' \Rightarrow r')$ önermesi aşağıdakilerden hangisine denktir?
A) p B) q C) q′ D) 1 E) p′

7. $(p \Rightarrow q) \wedge (q' \Rightarrow p)$ bileşik önermesinin en sade hâli aşağıdakilerden hangisidir?

A) p B) q C) 1 D) q′ E) p′

8. p : "Beyazla siyah zıt renklerdir."
q : "111 sayısı bir asal sayıdır."
r : "Balıklar suda yaşar."
Önermeleri kullanılarak aşağıdaki bileşik önermelerin doğruluk değerleri bulunmuştur.

I. $(p \Rightarrow q) \wedge r \equiv 0$
II. $(p \Rightarrow q') \vee r' \equiv 0$
III. $(q \Rightarrow p) \Rightarrow (r \Rightarrow p') \equiv 1$
IV. $(p \vee q') \Rightarrow (p \wedge r) \equiv 1$

Yukarıdaki denkliklerden hangileri doğrudur?

A) I - III B) I - IV C) II - III D) II - IV E) I - III - IV

9. " Toplum duyarlı olursa engellilere engel kalmaz." önermesinin olumsuzu aşağıdakilerden hangisidir?

A) "Toplum duyarlı olmaz ise engellilere engel kalmaz."
B) "Toplum duyarlı olursa engellilere engel kalır."
C) "Toplum duyarlı olmazsa engellilere engel kalır."
D) "Toplum duyarlı olur ve engellilere engel kalır."
E) "Toplum duyarlı olur veya engellilere engel kalmaz."

10. Matematik öğretmeni İhsan Bey, Beyhan'ı tahtaya kaldırarak "$p \Rightarrow (q \wedge p')$" önermesinin olumsuzunu en sade biçime getirmesini istiyor. Beyhan çözüm için aşağıdaki adımları izliyor.

I. $[p \Rightarrow (q \wedge p')]' \equiv p' \vee (q \wedge p')'$
II. $\equiv p' \vee (q' \vee (p')')$
III. $\equiv p' \vee (q' \vee p)$
IV. $\equiv (p' \vee p) \vee q'$
V. $\equiv q'$

Beyhan kaçıncı adımda hata yapmıştır?

A) I B) II C) III D) IV E) V



11. p : "x=2"
q : "$x^2-4=0$"
r : "x=−2"
önermeleri veriliyor.

I. $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$
II. $(p \vee r) \Rightarrow q$
III. $q \Rightarrow (p \vee r)$
IV. $q \Leftrightarrow (p \vee r)$

Yukarıdaki bileşik önermelerden hangilerinin doğruluk değeri "1" dir?

A) I-II-IV B) I-II-II C) II-III-IV D) I-III E) I-III-IV

12. p(x) : "x tam sayı, $2x+1 \leq 9$" açık önermesi için p(−1), p(2) ve p(5) ifadelerinin doğruluk değerleri sırasıyla aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1, 0, 1 B) 0, 1, 0 C) 1, 1, 0 D) 1, 1, 1 E) 0, 0, 1

13. q(x) : "x rasyonel sayı, $1 < x \leq 2$" açık önermesi veriliyor. Aşağıdaki sayılardan hangisi bu önermenin doğruluk kümesinin bir elemanıdır?

A) $\frac{7}{8}$ B) $\frac{9}{11}$ C) 1 D) $\frac{13}{12}$ E) $\frac{22}{9}$

14.

I. $p \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow 0)$
II. $p \vee (p \Rightarrow q)$
III. $(p \vee q') \wedge (p \vee q')'$
IV. $q' \vee (p \Rightarrow q)$

Yukarıda verilen önermelerin kaç tanesinin doğruluk değeri 1 dir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

15.

I. "$\forall x \in \mathbb{Z}, x^4+1 > 0$"
II. "$\exists x \in \mathbb{Z}, 5x-4 = 16$"
III. "$\forall x \in \mathbb{N}, 3x-1 = 2$"
IV. "$\exists x \in \mathbb{Z}, 4x^2+3 \leq 0$"

Yukarıda verilen önermelerin kaç tanesinin doğruluk değeri 0 dır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

16.

I. $p(x)$: "$\exists x \in \mathbb{N}, 3x-4 > 0$" $\Rightarrow p'(x)$: "$\forall x \in \mathbb{N}, 3x-4 < 0$"

II. $q(x)$: "$\forall x \in \mathbb{Z}, 5x-4 = 16$" $\Rightarrow q'(x)$: "$\exists x \in \mathbb{Z}, 5x-4 \neq 16$"

III. $r(x)$: "$\exists x \in \mathbb{Z}, 7x+3 \leq 1$" $\Rightarrow r'(x)$: "$\forall x \in \mathbb{Z}, 7x+3 > 1$"

Yukarıdakilerden hangisi ya da hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I-II D) I-III E) II-III

17. $(p \wedge q') \Rightarrow q'$ teoreminin hipotezi a önermesi, hükmü b önermesi olduğuna göre $a' \vee b$ ifadesine karşılık gelen değer aşağıdakilerden hangisidir?

A) p B) p′ C) q D) q′ E) 1

18. 30 kişilik bir sınıfta Pınar, Remzi, Kaan ve Nilgün dışındaki öğrencilerin devamsızlık yapmadığı bilinmektedir.
Matematik öğretmeni Gülendam Hanım, bu öğrenciler için aşağıdaki tablodaki sembolik mantık kurallarını belirlemiştir.

	Sınıfta ise	**Sınıfta değil ise**
Pınar	p	p′
Remzi	r	r′
Kaan	k	k′
Nilgün	n	n′

Gülendam Hanım bu sınıfa derse girdiğinde yoklama sonucunu tahtaya sembolik mantık kurallarını kullanarak aşağıdaki şekilde yazmıştır.

I. $p' \wedge r \equiv 1$
II. $k \Rightarrow p \equiv 0$
III. $p' \veebar n \equiv 0$

Yukarıda verilen denkliklere göre

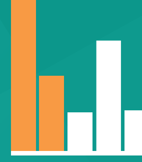
a) Pınar, Remzi, Kaan ve Nilgün arasından sınıfta olanları bulunuz.

b) Sınıfta var olan öğrenci sayısını bulunuz.

c) "Kaan sınıfta ise Pınar sınıfta değildir." önermesinin doğruluk değerini bulunuz.





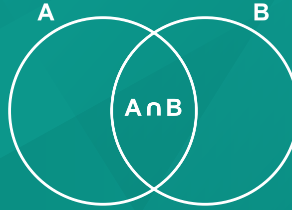


AUB = {1, 2, 3, a, b, 5, d, e, 7}

AUB

C \ D





A = Ø

A= {1, 2, 3, 4, 5}

KÜMELER

9.2.1. Kümelerde Temel Kavramlar
9.2.2. Kümelerde İşlemler



Terimler ve Kavramlar

- Küme
- Eleman
- Evrensel Küme
- Boş Küme
- Alt Küme
- Öz alt Küme
- Sonlu Küme
- Sonsuz Küme
- Eşit Kümeler



Sembol ve Gösterimler

$\in, \notin, \supseteq, \subseteq, \subset, \supset$

$\varnothing, \{\ \}, \not\subseteq, s(A)$

$\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$

$\{x \mid x$ in sahip olduğu tanımlayıcı özellikler$\}$

9.2. KÜMELER



Günlük hayatın vazgeçilmez bir parçası hâline gelen tablet bilgisayarların ayarlar menüsüne girildiğinde, aynı türden ayarların gruplandırılarak farklı başlıklar altında toplandığı görülür. Örneğin ağ ayarları menüsüne girildiğinde burada ağ ile ilgili kablosuz bağlantı ayarları, mobil veri ayarları ve benzeri ayarlar olduğu görülür. Ses ayarları menüsüne girildiğinde ses ile ilgili tüm ayarların burada toplandığı görülür. Yazılımcıların menüleri bu şekilde gruplandırmalarının amacı aranılan ayarlara kolayca ulaşılmasını sağlamak ve tablet bilgisayarların kullanımını bu şekilde kolaylaştırmaktır. Aynı şekilde bir teknoloji marketinde aranılan ürünün kolayca bulunmasını sağlayacak bazı düzenlemelerin olduğu fark edilir. Örneğin bilgisayarla ilgili olan her şeyin bir arada olduğu gibi telefonlar ile ilgili olan her şeyin de bir arada olduğu görülür. Hatta telefonların kendi aralarında marka marka, bilgisayarların da kullanım amaçlarına göre kendi aralarında sınıflandırıldığı görülür.

Günlük hayatta gruplandırma ve sınıflandırma sık sık karşılaşılan hayatı kolaylaştıran iki önemli ögedir. Bu ögeler kümeler konusunun temelini oluşturur.

9.2.1. Kümelerde Temel Kavramlar

Neler Öğreneceksiniz?

- Kümelerle ilgili temel kavramları hatırlamayı,
- Alt kümeyi kullanarak işlemler yapmayı,
- İki kümenin eşitliğini kullanarak işlemler yapmayı öğreneceksiniz.

9.2.1.1. Kümeler ile İlgili Temel Kavramlar

Alman matematikçi Georg Cantor (Corc Kantor) (1845-1918) 1878 yılında yayımladığı makalesinde kümeyi, "iyi tanımlanmış birbirinden farklı nesneler topluluğu" şeklinde tanımlamıştır. Bu tanımda bahsedilen "iyi tanımlama" ifadesi ortak özellikleri ile verilen bir kümedeki nesnelerin herkes tarafından aynı şekilde anlaşılması, anlamına gelir. Örneğin Türk alfabesindeki ünlü harfler topluluğu iyi tanımlanmış bir küme belirtir. Çünkü bu tanım herkesin aynı nesneleri düşünmesini sağlar. Türk alfabesindeki bazı ünlü harfler topluluğu ifadesi ise herkesin aklına aynı harfleri getirmeyeceğinden iyi tanımlanmış bir küme belirtmez.

Aşağıdaki topluluklar birer küme belirtir.

a) Kiremithane Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi Yeşilay Kulübü öğrencileri.
b) Asal sayılar.
c) Ardahan ilinin ilçeleri.
ç) 1 ile 2 arasındaki gerçek sayılar.

Yukarıda verilen kümelerin bazılarının sayılabilir bazıların sayılamaz çoklukta olduğuna dikkat ettiniz mi?

Küme, iyi tanımlanmış birbirinden farklı nesneler topluluğudur.

Bir kümeyi oluşturan her nesneye o kümenin bir elemanıdır, denir.
Kümeler A, B, C gibi büyük harflerle gösterilir.
4 ten büyük 10 dan küçük tam sayı ile ifade edilen kümeye A kümesi denilirse 5, 6, 7, 8, 9 sayılarının her biri bu kümenin bir elemanı olur.
5 sayısı bu kümenin bir elemanı olduğu için $5 \in A$ ile gösterilir.
15 sayısı ise kümenin elemanı olmadığı için $15 \notin A$ ile gösterilir.

Kümelerin Farklı Gösterimleri

Bir kümenin elemanları liste yöntemi, ortak özellik yöntemi veya Venn şeması yöntemi ile gösterilir.

Liste Yöntemi

Kümeye ait tüm elemanlar, küme parantezi olan "{ }" şekli içerisine aralarına virgül konularak yazılır. Her eleman yalnız bir kez yazılır ve elemanların birbirleriyle yer değiştirmesi yeni bir küme oluşturmaz.

ÖRNEK 1

Asal rakamlar kümesini liste yöntemi ile gösteriniz.

ÇÖZÜM

Asal rakamlar kümesi A ile gösterilecek olursa A ={2, 3, 5, 7} dir.

ÖRNEK 2

"ADANALILAR" kelimesinin harflerini liste yöntemi ile gösteriniz.

ÇÖZÜM

B ={A, D, N, L, I, R}

Ortak Özellik Yöntemi

Aşağıda 0, 2, 4, 6, 8 sayılarını ifade eden ortak özelliklerden birkaçı yazılmıştır. Hangi özelliğin yalnızca bu beş sayıyı anlattığını düşününüz.

1. Her biri doğal sayıdır.
2. Her biri çift doğal sayıdır.
3. Her biri rakamdır.
4. Her biri çift rakamdır.

İlk üç madde elbette bu beş sayının ortak özelliklerindendir. Ama verilen bu özellikler 0, 2, 4, 6, 8 rakamlarını akla getirmez. İyi bir tanımlama için 4. madde kullanılmalıdır.

Ortak özellik yöntemi, kümeye ait her elemanın özelliği yazılarak yapılan gösterim biçimidir.

A ={x | x çift rakam} ifadesi ortak özellik yöntemi ile yapılan bir gösterimdir.

Kullanılan "|" sembolü "öyle ki" anlamına gelir. Küme içerisinde kullanılan değişkenin hemen ardından yazılır.

"|" sembolü yerine " : " sembolü de kullanılabilir.

ÖRNEK 3

Aşağıda ortak özellik yöntemi ile verilen kümeleri inceleyerek liste biçiminde yazınız.

a) K ={x | $5 \leq x < 14$, x tek doğal sayı}
b) Ü ={x | $x^2 < 26$, x tam sayı}
c) M ={x | $7 < x < 20$, x =3k, k tam sayı}
ç) E ={x | $2x - 12 = 0$, x tam sayı}

ÇÖZÜM

a) K ={5, 7, 9, 11,13}
b) Ü ={−5, −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, 5}
c) M ={9, 12, 15, 18}
ç) E ={6} olarak yazılır.



Temsilî Georg Cantor (1845 -1918)

Georg Cantor (Corc Kantor) Rus asıllı Alman matematikçidir.

"Gerçek Cebirsel Sayıların Tümüne İlişkin Bir Özellik Üzerine" başlıklı çalışmasında kümeler kuramının temellerini ortaya koymuş ve "sonsuz küme" kavramını matematiksel olarak tanımlamıştır. Cantor'un kurduğu küme kuramı modern matematik anlayışının başlamasında büyük rol oynamıştır. Ayrıca kümeler için temel bağıntının günümüzde ∈ ile gösterilen ait olma bağıntısı olduğunu belirtmiştir.

Cantor, tüm matematik araştırmalarında ve problemlerinde kullanılan nesnelerin aslında kendi aralarında belirli özelliklere göre gruplanabileceğini, bu durumda araştırma ya da problemin anlaşılırlığının ve problemin çözümüne yönelik işlem yapmanın daha da kolaylaşacağını fark etmiştir.

Düzenlenmiştir.

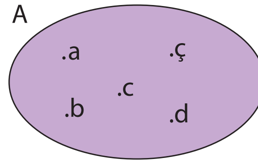


A ={x | x < 6, x bir doğal sayı} kümesi için

- "x | " → Kümenin elemanlarını "x" değerleri oluşturur.
- x < 6 → Elemanların ortak özelliğidir.
- "x bir doğal sayıdır." → Elemanların ait olduğu sayı kümesidir.

Kümenin elemanlarının kapalı bir eğri veya bir çokgen içerisine yanlarına birer nokta konularak yazılmasıyla yapılan gösterimdir.

Venn Şeması Yöntemi



Alfabemizin ilk beş harfinden oluşan bir A kümesi aşağıdaki gibi gösterilir.

Sonlu ve Sonsuz Kümeler

Bir kümenin elemanları sayılabilir çoklukta ise bu kümeye **sonlu küme** adı verilir.

Bir A kümesinin eleman sayısı s(A) ile gösterilir.
A ={1, 3, 5, 7, 9} ise s(A) =5 olur. A kümesi sonlu bir kümedir.
B ={x| −2017 < x < 2017, x tam sayı} kümesinin elemanları −2016 dan başlar ve 2016 da biter. Bu yüzden B kümesi sonlu bir kümedir.

Sonlu olmayan kümelere ise **sonsuz küme** adı verilir.

C ={xl 5 < x, x tam sayı} kümesinin eleman sayısı bulunamaz. Kümenin elemanları küçükten büyüğe doğru sıralanırsa en küçük elemanı 6 olur ve diğer elemanlar birer birer artarak devam eder. Bu artış hiçbir zaman bitmez. Bu yüzden C kümesi sonsuz bir kümedir.
Bu küme liste yöntemi ile gösterilirse A ={6, 7, 8, 9, …} şeklinde yazılır. Kullanılan üç nokta verilen ilk elemanlar arasındaki örüntünün devam edeceği anlamına gelir.

ÖRNEK 4

3 ün katı olan ardışık tam sayıları liste yöntemiyle gösteriniz.

ÇÖZÜM

B ={…, −6, −3, 0, 3, 6, …} olarak gösterilebilir.

Bu kümenin bir sonsuz küme olduğunu fark ettiniz mi?

Boş Küme
Elemanı olmayan kümeye **boş küme** adı verilir. Boş küme ∅ veya { } ile gösterilir.

Haftanın a harfi ile başlayan günleri kümesine A denilirse haftanın a harfi ile başlayan günleri olmadığından A = ∅ ve s(A) =0 olur.

Evrensel Küme

Güneş sistemimiz, birbirlerine dinamik olarak bağlı aşağıdaki elemanlardan oluşur.

- **Yıldızımız Güneş,**
- **8 gezegen ve bunların uyduları,**
  - Güneş'ten uzaklık sırasına göre bu gezegenler Merkür, Venüs, Yer, Mars, Jüpiter, Satürn, Uranüs, Neptün'dür.
- **Cüce gezegenler ve bunların uyduları,**
  - Şimdilik bu kategoriye girenler Ceres, Plüto, Eris'tir.
- **Güneş sisteminin küçük nesneleri,**
  - Asteroidler (küçük gezegenler),
  - Neptün ötesi küçük cisimler (Kuiper Kuşağı ve Oort Bulutu),
  - Kuyruklu yıldızlar,
  - Meteorlardır.
- **Gezegenlerarası gaz ve tozdan oluşmuş bir organizasyondur ve bir küme belirtir.**

Kaynakça www.rasathane.ankara.edu.tr/files/2013/02/Gunes_sistemi.pdf

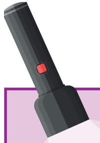


Sonlu bir A kümesinin eleman sayısı s(A) ile gösterilir.

A = {a, x, 1, %, f} kümesinin eleman sayısı 5 olduğundan s(A)=5 olur.



A ={{a, b, c}}
B ={∅}
C ={a}
Kümelerinin herbirinin eleman sayısı 1 dir.



Öklid (MÖ 330-275), asal sayılar kümesinin sonsuz bir küme belirttiğini "Herhangi bir asal sayı grubunun içerdiği miktardan daha fazla asal sayı vardır." diye ifade etmiştir.



Sonsuzluk simgesi



Güneş sistemi



Güneş sistemlerinden oluşan kümeler, galaksileri oluşturur. Galaksiler ise Evren adı verilen en büyük kümenin birer parçasıdır.

Üzerinde işlem yapılan, tüm kümeleri içinde bulunduracak şekilde seçilen kümeye **evrensel küme** adı verilir. Evrensel küme E ile gösterilir.

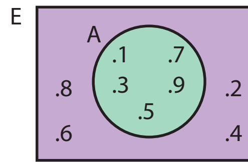
Tek rakamlardan oluşan bir A kümesi için evrensel küme örnekleri vermek gerekirse

- Rakamlar kümesi,
- 0 ile 100 arasındaki doğal sayılar kümesi,
- Tek doğal sayılar kümesi,
- Tam sayılar kümesi seçilebilir.

ÖRNEK 5

A ={1, 3, 5, 7, 9} kümesi için bir E ={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} evrensel kümesi seçip Venn şeması ile gösteriniz.

ÇÖZÜM



ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdakilerden hangisinin bir küme belirttiğini bulunuz.

a) Ankara'nın bazı ilçeleri

b) Akif Palalı Lisesi öğretmenleri

c) Okulumuzdaki bazı zayıf öğrenciler

ç) Ülkemizdeki matematik profesörlerinden üçü

2. A ={a, b, c, {d, e}} kümesi için

I. $a \in A$

II. s(A) =4

III. $d \in A$

IV. $\{d, e\} \in A$

bilgilerinden hangilerinin doğru olduğunu bulunuz.

3. "HAKKARİ" sözcüğündeki harfleri H kümesi adıyla liste ve Venn şeması yöntemi ile gösteriniz.

4. Aşağıdaki kümelerin yanına sonlu küme ya da sonsuz küme kavramlarından uygun olanı yazınız.

a) $A = \{x \mid x^2 < 16$, x tam sayı$\}$ ....

b) B ={x | x, 100 den küçük asal sayılar} ....

c) C ={x | x, en az iki basamaklı doğal sayılar} ....

ç) D ={x | x, 3 ün veya 5 in katı olan tam sayılar} ....

5. Aşağıdakilerden hangilerinin boş küme belirttiğini bulunuz.

a) $A = \{a \mid -3 < a < 2$, a bir asal sayı$\}$

b) B ={x | x, haftanın p veya c harfi ile başlayan günleri}

c) $C = \{\emptyset\}$

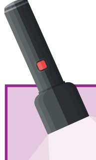
ç) D ={x | x, karesi 3 olan rakamlar}



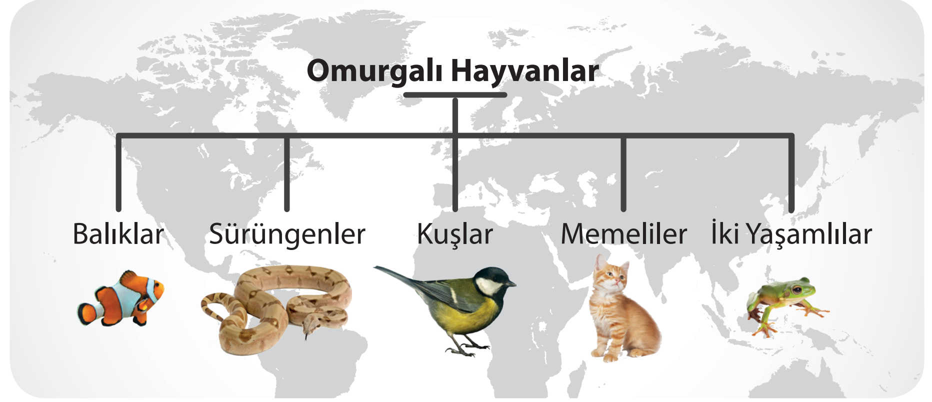
9.2.1.2. Alt Küme

Her bilim dalı, sahip olduğu verileri ve bilgileri sınıflandırma veya gruplandırma ihtiyacı duyar. Bu yolla birçok veri, birbirine benzerlikleri ya da farklılıkları bakımından yeni kümelere ayrılmıştır.

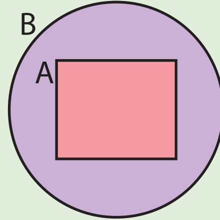
Aşağıdaki görselde biyoloji biliminin hayvanlar alemine ait omurgalı hayvanlar şubesini nasıl sınıflandırdığı basitçe anlatılmıştır.



Ülkemizde 1478 omurgalı, 20-30 bin civarında omurgasız hayvan türünün var olduğunu biliyor musunuz?



Omurgalı hayvanları oluşturan bu beş sınıfın her biri bir küme oluşturmaktadır. Bu kümelere ait her canlı aynı zamanda omurgalı hayvanlar şubesinin bir elemanıdır.



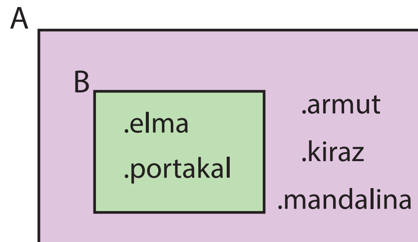
A kümesinin her elemanı aynı zamanda B kümesinin de elemanı ise **A kümesi B kümesinin alt kümesidir**, denir ve $A \subset B$ ile gösterilir. A kümesi B kümesinin alt kümesi iken A nın elemanları ile B nin elemanlarının aynı olma durumu varsa $A \subseteq B$ ile gösterilir. B kümesi A kümesini kapsar. Bu ifade ise $B \supset A$ ile gösterilir. Venn şeması ile yandaki gibi çizim yapılarak gösterilir.

A kümesinin B kümesinden farklı en az bir tane elemanı varsa **A kümesi B kümesinin alt kümesi değildir** denir. Bu ifade $A \not\subseteq B$ ile gösterilir.

ÖRNEK 6

A ={elma, armut, kiraz, portakal, mandalina}
B ={elma, portakal} kümelerini Venn şeması ile gösteriniz.

ÇÖZÜM

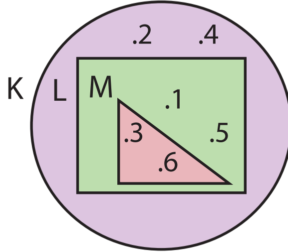


Yukarıdaki şemada $B \subset A$ olduğu görülmektedir.

ÖRNEK 7

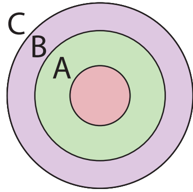
K = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
L = {1, 3, 5, 6}
M = {3, 6}
kümelerini Venn şeması ile gösteriniz.

ÇÖZÜM



$M \subset L \subset K$ olduğuna dikkat ediniz.

Alt Kümenin Özellikleri



- Boş küme her kümenin alt kümesidir. $\varnothing \subseteq A$ dir.
- Her küme kendisinin alt kümesidir. $A \subseteq A$ dir.
- A, B ve C kümeleri için $A \subseteq B$ ve $B \subseteq C$ ise $A \subseteq C$ dir. Bu özellik Venn şeması ile şekildeki gibi gösterilebilir.

Alt Küme Sayısı

A = {1, 2, 3} kümesinin elemanlarını kullanarak

- 3 elemanlı bir küme oluşturulursa {1, 2, 3},
- 2 elemanlı kümeler oluşturulursa {1, 2}, {1, 3}, {2, 3},
- 1 elemanlı kümeler oluşturulursa {1}, {2}, {3},
- 0 elemanlı bir küme oluşturulursa { },

olmak üzere toplam 8 tane alt küme oluşur.

DÜŞÜNÜYORUM

Aşağıda verilen tablodaki boşlukları doldurarak kümelerin eleman sayısı ile alt küme sayısı arasında bir bağıntı olup olmadığını yorumlayınız.

	Alt Kümeler	Alt Küme Sayısı
A = { }	{ }	1
B = {a}	{ }, {a}	2
C = {a, b}	{ }, {a}, {b}, {a, b}	4
D = {a, b, c}		
E = {a, b, c, d}		



Boş kümenin alt küme sayısı $2^0 = 1$ dir. Yani kendisidir.

n elemanlı bir kümenin alt kümelerinin sayısı 2^n formülü ile hesaplanır.

ÖRNEK 8

5 elemanlı bir A kümesinin alt küme sayısını alt kümelerini yazmadan bulunuz.

ÇÖZÜM

s(A) = 5 olmak üzere A kümesinin $2^5 = 32$ tane alt kümesi vardır.

n elemanlı bir kümenin kendisi hariç tüm alt kümeleri **öz alt küme** olarak isimlendirilir ve öz alt kümelerinin sayısı $2^n - 1$ ile hesaplanır.

ÖRNEK 9

KARAMAN kelimesindeki harfler kullanılarak oluşturulan A kümesinin alt küme sayısı ile öz alt küme sayısının toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

İstenen küme A = {K, A, R, M, N} olarak yazılır. Bu durumda $s(A) = 5$ olur. A kümesinin alt küme sayısı $2^5 = 32$, öz alt küme sayısı ise $2^5 - 1 = 31$ olacağından toplamları $32 + 31 = 63$ olur.

ÖRNEK 10

$A = \{x \mid 3^x < 81, x \in \mathbb{N}\}$ kümesinin elemanlarını liste yöntemi ile gösterip bu kümenin öz alt küme sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

3 ün doğal sayı kuvvetlerinden 81 den küçük olanlar $3^0 = 1$, $3^1 = 3$, $3^2 = 9$ ve $3^3 = 27$ olduğundan x yerine 0, 1, 2, 3 yazılabilir. Bu durumda A = {0, 1, 2, 3} ve s(A) = 4 olur.
Alt küme sayısı $2^4 = 16$ olur.
Kümenin öz alt küme sayısı $16 - 1 = 15$ olur.

ÖRNEK 11

A = {a, b, c, d} kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde a elemanı **bulunmaz**?

ÇÖZÜM

A kümesinden a elemanı çıkarılarak B = {b, c, d} kümesi elde edilir. B kümesinin tüm alt kümelerinde a elemanı bulunmaz. Bu durumda s(B) = 3 için $2^3 = 8$ olur.

ÖRNEK 12

A = {a, b, c, d} kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde a elemanı bulunur?

ÇÖZÜM

A kümesinin tüm alt kümelerinden a nın bulunmadığı alt kümeler çıkarılınca geriye a nın bulunduğu alt kümeler kalacaktır. Bu durumda $2^4 - 2^3 = 8$ olur.
Soruya başka bir yoldan da cevap verilmek istenirse
a elemanının bulunmadığı alt kümeler; { }, {b}, {c}, {d}, {b, c}, { b, d }, {c, d}, {b, c, d} olarak yazılır. Bu kümelerin her birine a elemanı eklenirse
{a}, {a, b}, {a, c}, {a, d}, {a, b, c}, {a, b, d}, {a, c, d}, {a, b, c, d} kümeleri elde edilir.
Bu kümelerin tamamında a eleman olarak bulunur. Bu durumda a elemanının bulunduğu alt kümelerinin sayısı ile {b, c, d} kümesinin alt kümeleri sayısı eşit olup $2^3 = 8$ olur.

ÖRNEK 13

A = {m, n, o, p, r} kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde

a) p elemanı bulunur, m elemanı **bulunmaz**?

b) p ve m elemanları birlikte bulunur?

c) p ve m elemanları birlikte bulunur n elemanı **bulunmaz**?

ç) p ve m elemanlarından yalnız biri bulunur?

d) p veya m elemanları bulunur?

ÇÖZÜM

a) A kümesinden p ve m elemanları çıkarılarak yeni bir küme elde edilir. Bu küme B ile gösterilsin. B = {n, o, r} kümesinin alt kümelerinin hiçbirinde p ve m elemanları bulunmaz. $2^3 = 8$ tane olarak elde edilen her alt kümeye p eleman olarak eklenirse bu kümelerin her birinde p elemanı bulunur, m elemanı bulunmaz. Bu durumda cevap 8 olur.

b) A kümesinden p ve m elemanlarını çıkarılarak bir B = {n, o, r} kümesi elde edilir. B kümesinin alt küme sayısı $2^3 = 8$ olur. Bu alt kümelerin herbirine p ve m eklenirse cevap 8 dir.

c) p, m ve n elemanları A kümesinden çıkarılarak B = {o, r} kümesi elde edilir. B kümesinin her alt kümesinde p, m ve n elemanları bulunmaz. B kümesinin alt küme sayısı $2^2 = 4$ olur. Bunların her birine p ve m eleman olarak eklenirse cevap yine 4 tür.

ç) p ve m elemanlarından yalnız biri bulunur demek, p elemanının bulunup m elemanın bulunmadığı alt küme sayısı ile m elemanının bulunup p elemanının bulunmadığı alt küme sayısının toplanması demektir. m elemanının bulunup p elemanının bulunmadığı alt küme sayısı $2^3 = 8$ olur. p elemanının bulunup m elemanının bulunmadığı alt küme sayısı da aynı yöntemle 8 bulunur. Bu durumda cevap $8 + 8 = 16$ olur.

d) Tüm alt küme sayısından p ve m elemanlarının hiç bulunmadığı alt küme sayısı çıkarılırsa sonuca ulaşılır. Bu durumda cevap $2^5 - 2^3 = 32 - 8 = 24$ olur.



a ve b den yalnız biri bulunur ifadesi
- a nın bulunup b nin bulunmadığı,
- b nin bulunup a nın bulunmadığı

iki durumu anlatır.
a ya da b bulunur ifadesi ile aynıdır.



p veya m bulunur ifadesi
- p nin bulunup m nin bulunmadığı,
- m nin bulunup p nin bulunmadığı,
- p ve m nin birlikte bulunduğu

üç durumu anlatır.

ÖRNEK 14

A = {a, b, c} ve B = {a, b, c, ç, d, e, f } kümeleri veriliyor. $A \neq T \neq B$ olmak şartıyla $A \subset T \subset B$ koşuluna uyan kaç tane T kümesinin yazılabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

B kümesinin A kümesinden farklı elemanlarının sayısı 4 olup bu kümenin $2^4 = 16$ tane alt kümesi vardır. Bu 16 kümenin biri A, biri B kümesidir. Dolayısıyla bu alt kümelerden A ve B kümelerinin olmadığı $16 - 2 = 14$ küme vardır. Bu kümelere a, b, c elemanları eklenerek T kümesinin olası durumları bulunur. Cevap 14 olur.

ALIŞTIRMALAR

1. $A = \{a, b, c, \{d\}\}$ kümesi için

I. $d \in A$

II. $\{a\} \in A$

III. $\{b\} \subset A$

IV. $\{c, \{d\}\} \subset A$

bilgileri veriliyor. Buna göre yukarıdaki ifadelerden hangilerinin doğru olduğunu bulunuz.

2. 6 elemanlı bir kümenin alt küme sayısı ile öz alt küme sayısının toplamını bulunuz.

3. $A = \{a, b, c, d, e\}$ kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde

I. a ve b nin eleman olarak bulunduğunu,

II. a veya b nin eleman olarak bulunduğunu,

III. a ve b den yalnız birinin eleman olarak bulunduğunu,

IV. a elemanının bulunup b elemanının bulunmadığını,

V. **En çok** bir sesli harfin bulunduğunu hesaplayınız.

4. $C = \{a, b, c, ç, d, e\}$ kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde **en az** bir sesli harfin bulunabileceğini bulunuz.

5. $D = \{x \mid -2 \leq x < 9, x = 2n \text{ ve } n \in \mathbb{Z}\}$ kümesinin alt küme sayısını bulunuz.

6. $A = \{1, 2\}$ ve $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümeleri veriliyor. $A \subset K \subset B$ olmak koşulu ile

a) Kaç farklı K kümesinin yazılabileceğini,

b) A dan farklı kaç tane K kümesinin yazılabileceğini,

c) A ve B den farklı kaç tane K kümesinin yazılabileceğini hesaplayınız.



9.2.1.3. İki Kümenin Eşitliği

DÜŞÜNÜYORUM

A ={x | x, 2 ve 3 ile kalansız bölünebilen ilk beş pozitif tam sayı}
kümesinin elemanlarını liste yöntemi ile yazınız.
B ={x | x, 1 ile 35 arasında 6 nın tam katı olan tam sayılar}
kümesinin elemanlarını liste yöntemi ile yazınız.
A ve B kümelerinin elemanlarını kıyaslayarak aralarındaki ilişkiyi açıklayınız.

Elemanları aynı olan kümelere **eşit küme** denir. A ve B kümelerinin eşitliği A =B ile gösterilir.

A ve B iki eşit küme olmak üzere

- A kümesinin her elemanı B kümesinin de elemanı olduğu için $A \subseteq B$ dir.
- B kümesinin her elemanı A kümesinin de elemanı olduğu için $B \subseteq A$ dır.

Bu durumda A=B iken $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ dır.

A ve B kümelerinin birbirinden farklı en az bir elemanı varsa **A ile B eşit olmayan kümelerdir** denir ve bu durum $A \neq B$ ile gösterilir.



Eşit kümelerin eleman sayıları aynıdır fakat eleman sayıları aynı olan her küme eşit değildir.

ÖRNEK 15

Aşağıdaki kümelerden birbirine eşit olanları bulunuz.
A ={x | x, mutlak değeri 5 ten küçük tam sayılar }
B ={x | x, 4 ten küçük doğal sayılar}
C ={x | x, karesi 25 ten küçük tam sayılar}
D ={x | $-5 < x < 5$, x bir tam sayı}

ÇÖZÜM

Kümeler liste yöntemi ile
A ={−4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4}
B ={0, 1, 2, 3}
C ={−4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4}
D ={−4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4}
yazılır. A, C ve D kümelerinin her elemanı aynı olduğu için bu üç küme birbirine eşittir. Bu durum A =C =D ile gösterilir.
Eşit kümeler birbirinin alt kümesi olduğundan A, C ve D kümelerinin her biri diğerinin alt kümesidir.

ALIŞTIRMALAR

1. A = {1, 3, 5}
B = {x | x, ANKARA kelimesindeki harfler}
C = {x | x, 7 den küçük tek doğal sayılar}
D = {C, A, N, K, R}
kümeleri veriliyor. Bu kümelerle ilgili
I. A =C **II.** A =D **III.** $A \neq B$ **IV.** B =C
ifadelerinden hangilerinin doğru olduğunu bulunuz.

2. Aşağıdaki ifadelerin sonlarındaki boşluğa doğru olanlar için "D" yanlış olanlar için "Y" yazınız.
a) Eleman sayıları aynı olan kümelere eşit kümeler denir. (...)
b) Eşit kümelerden biri diğerini kapsar. (...)
c) $A \not\subseteq B$ ise $A \neq B$ olur. (...)
ç) Alt küme sayıları eşit olan kümeler daima eşit kümelerdir. (...)
d) $A \subseteq B$ ve $A \supseteq B$ ise $A = B$ olur. (...)

3. s(A) =3 + x ve s(B) =15 − 2x olarak verilen A ve B kümeleri eşit kümeler ise x in değerini bulunuz.





Terimler ve Kavramlar

- Birleşim
- Kesişim
- Fark
- Tümleme
- Ayrık Kümeler
- De Morgan Kuralları
- Sıralı İkili
- Kartezyen Çarpım

Sembol ve Gösterimler

∪, ∩, A − B, (veya A\B), A′, AxB, s(AxB)

9.2.2. Kümelerde İşlemler

Neler Öğreneceksiniz?

- Kümelerde birleşim, kesişim, fark, tümleme işlemleri yardımıyla problemler çözmeyi,
- İki kümenin kartezyen çarpımıyla ilgili işlemler yapmayı öğreneceksiniz.

9.2.2.1. Kümelerde Birleşim, Kesişim, Fark ve Tümleme İşlemleri

Kümelerde Kesişim ve Birleşim İşlemleri



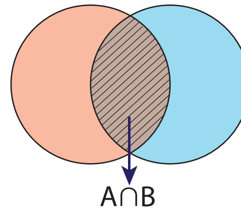
Karanlıkta mavi, kırmızı ve yeşil ışık yayan üç farklı ışık kaynağı şekildeki gibi bir zemine tutulursa mavi ve yeşil ışığın düştüğü zeminin mavi, kırmızı ve yeşil ışığın düştüğü zeminin sarı, kırmızı ve mavi ışığın düştüğü zeminin koyu pembe renge dönüştüğü gözlemlenir. Her üç ışığın düştüğü zeminin ise beyaz olduğu görülür. Elde edilen yeni renkler diğer renkteki ışıkların kesiştiği bölgede oluşmuştur.

DÜŞÜNÜYORUM

A ={x | x , 2 ile kalansız bölünen rakamlar}
B ={x | x , 3 ile kalansız bölünen rakamlar}
A ve B kümelerinin elemanlarını liste yöntemi ile gösterip her iki kümede bulunan elemanları yazınız. Bu iki küme Venn şeması ile gösterilseydi sizce nasıl bir çizim yapılırdı? Arkadaşlarınızla tartışınız.

A ve B gibi iki kümenin tüm ortak elemanlarından oluşan kümeye A ve B kümelerinin **kesişim kümesi** adı verilir. Kesişim işlemi" ∩ "sembolü ile gösterilir.

A ve B kümelerinin kesişim kümesi, ortak özellik yöntemi ile
$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in B\}$ şeklinde ifade edilir.
A ve B kümelerinin kesişim kümesi, Venn şeması ile aşağıdaki gibi gösterilir.



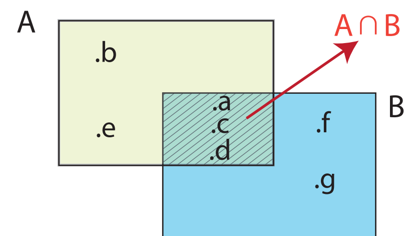
ÖRNEK 1

Aşağıda verilen kümelerin kesişim kümelerini bulup liste yöntemi ve Venn şeması ile gösteriniz.

a) A ={a, b, c, d, e} ve B ={a, c, d, f, g}
b) K ={a, c, e} ve L ={a, b, c, d, e}
c) M ={a, b, c} ve N={d, e, f, g}

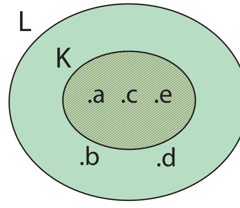
ÇÖZÜM

a) A ={a, b, c, d, e} ve
B ={a, c, d, f, g} kümeleri için
A ∩ B ={a, c, d} olur.

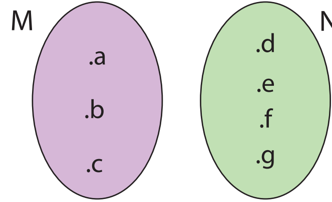




b) K ={a, c, e}   ve L ={a, b, c, d, e} kümeleri için   K ∩ L ={a, c, e} olur.



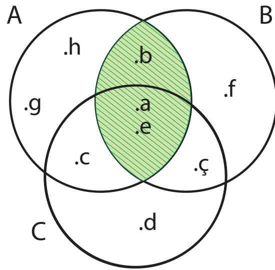
c) M ={a, b, c} ve N={d, e, f, g} kümeleri için M ∩ N= ∅ olur.



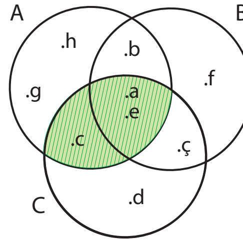
ÖRNEK 2

A ={a, b, c, e, h, g} , B ={a, b, ç, e, f} ve C ={a, c, ç, d, e} kümeleri verilsin.
A ∩ B, A ∩ C, B ∩ C ve A ∩ B ∩ C kümelerini Venn şeması ile gösteriniz.

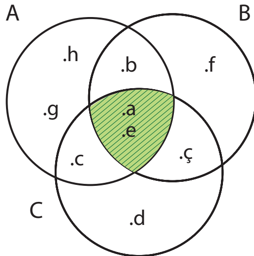
ÇÖZÜM



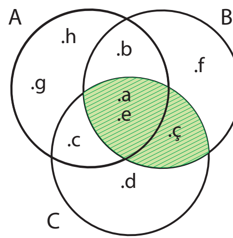
A ∩ B ={b, a, e} olur.



A ∩ C ={c, a, e} olur.



A ∩ B ∩ C ={a, e} olur.



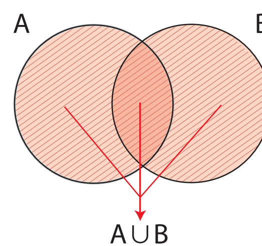
B ∩ C ={ç, a, e} olur.

A ve B gibi iki kümenin bütün elemanlarından oluşan kümeye, A ve B kümelerinin **birleşim kümesi** adı verilir. Birleşim işlemi " ∪ " sembolü ile gösterilir.

Birleşim kümesi ortak özellik yöntemi ile

A ∪ B = {x | x ∈ A veya x ∈ B} şeklinde ifade edilir.

Venn şeması gösterimi yandaki gibidir.



ÖRNEK 3

Aşağıda verilen kümelerin birleşim kümelerini bulup liste yöntemi ve Venn şeması ile gösteriniz.

a) A ={7, 9, 11, 13} ve B ={9, 13, 15, 17, 19}
b) N={1, 2, 3, 4, 5, 6} ve M ={2, 3, 5}
c) T={1, 5, 7} ve R={9, 11}

ÇÖZÜM

a) A ={7, 9, 11, 13} ve B ={9, 13, 15, 17, 19}

kümeleri için

A ∪ B ={7, 9, 11, 13, 15, 17, 19} olur.

Venn şeması ile gösterimi ise yandaki gibidir.

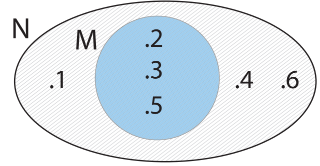


b) N ={1, 2, 3, 4, 5, 6} ve M ={2, 3, 5}

kümeleri için

M ∪ N ={1, 2, 3, 4, 5, 6} olur.

Venn şeması ile gösterimi yandaki gibidir.

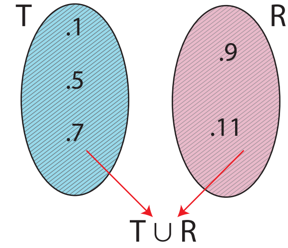


c) T ={1, 5, 7} ve

R ={9, 11} kümeleri için

T ∪ R ={1, 5, 7 ,9, 11} olur.

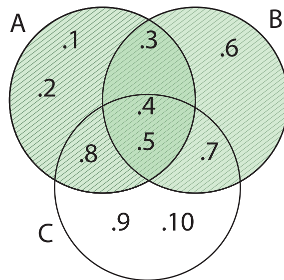
Venn şeması ile gösterimi yandaki gibidir.



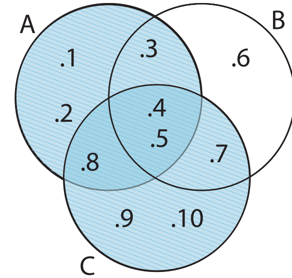
ÖRNEK 4

A ={1, 2, 3, 4, 5, 8} , B ={3, 4, 5, 6, 7} ve C ={4, 5, 7, 8, 9, 10} kümeleri veriliyor. A∪B, A∪C, B∪C ve A∪B∪C kümelerini Venn şeması ile gösteriniz.

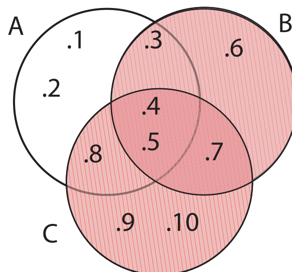
ÇÖZÜM



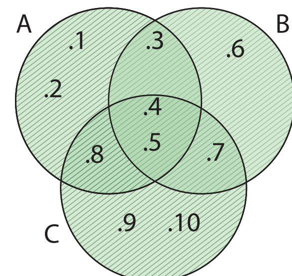
A ∪ B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} olur.



A ∪ C = {1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10} olur.



B ∪ C = {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} olur.



A ∪ B ∪ C = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} olur.



Kümelerde Kesişim ve Birleşim İşlemlerinin Özellikleri

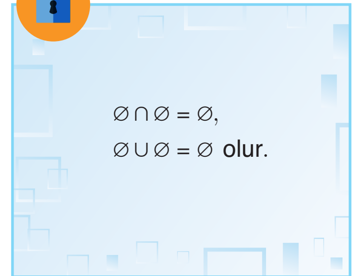
1. $A \cap A = A$ olur. Bir kümenin kendisi ile kesişimi yine kendisidir. Bu özelliğe **kesişim işleminin tek kuvvet özelliği** denir.

Doğruluğu $A \cap A = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in A\} = \{x \mid x \in A\} = A$ olarak gösterilir.
$A \cap A = A$ dır.
Bir kümenin kendisi ile birleşimi yine kendisidir. Bu özelliğe **birleşimin tek kuvvet özelliği** adı verilir.
Doğruluğu $A \cup A = \{x \mid x \in A \text{ veya } x \in A\} = A$ olarak gösterilir.

2. $A \cap B = B \cap A$ olur. Bu özelliğe **kesişim işleminin değişme özelliği** denir.

Doğruluğu $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in B\} = \{x \mid x \in B \text{ ve } x \in A\} = B \cap A$ olarak gösterilir.
$A \cup B = B \cup A$ olur. Bu özelliğe **birleşim işleminin değişme özelliği** denir.
Doğruluğu
$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ veya } x \in B\} = \{x \mid x \in B \text{ veya } x \in A\} = B \cup A$
olarak gösterilir.





3. $A \cap \varnothing = \varnothing$ olur. Boş küme eleman bulundurmadığı için herhangi bir A kümesinin boş küme ile kesişimi yine boş kümedir.

$A \cup \varnothing = A$ olur. Boş kümenin bir başka kümeye eklenecek elemanı olmadığı için A kümesinin boş küme ile birleşimi yine A kümesidir.

4. $A \subseteq B$ ise $A \cap B = A$ olur. A kümesindeki her eleman aynı zamanda B kümesinde de vardır. Dolayısıyla kesişimleri A kümesidir.

$A \subseteq B$ ise $A \cup B = B$ olur. A kümesindeki her eleman aynı zamanda B kümesininde de vardır. Dolayısıyla birleşimleri B kümesidir.

5. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ olur. Bu özelliğe **kesişim işleminin birleşme özelliği** denir.

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ olur. Bu özelliğe **birleşim işleminin birleşme özelliği** denir.

6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ özelliğine **kesişim işleminin birleşim işlemi üzerine soldan dağılma özelliği** denir.

Ortak özellik yöntemi ile doğruluğu aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in (B \cup C)\} \\ &= \{x \mid x \in A \text{ ve } (x \in B \text{ veya } x \in C)\} \\ &= \{x \mid (x \in A \text{ ve } x \in B) \text{ veya } (x \in A \text{ ve } x \in C)\} \\ &= \{x \mid x \in (A \cap B) \text{ veya } x \in (A \cap C)\} \\ &= \{x \mid x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)\} \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ özelliğine **kesişim işleminin birleşim işlemi üzerine sağdan dağılma özelliği** denir. Siz de bu özelliğin doğruluğunu ortak özellik yöntemi kullanarak gösteriniz.

7. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ özelliğine **birleşim işleminin kesişim işlemi üzerine soldan dağılma özelliği** denir. Ortak özellik yöntemi ile doğruluğu aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= \{x \mid x \in A \text{ veya } x \in (B \cap C)\} \\ &= \{x \mid x \in A \text{ veya } (x \in B \text{ ve } x \in C)\} \\ &= \{x \mid (x \in A \text{ veya } x \in B) \text{ ve } (x \in A \text{ veya } x \in C)\} \\ &= \{x \mid x \in (A \cup B) \text{ ve } x \in (A \cup C)\} \\ &= \{x \mid x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)\} \\ &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ özelliğine **birleşim işleminin kesişim işlemi üzerine sağdan dağılma özelliği** adı verilir. Siz de bu özelliğin doğruluğunu ortak özellik yöntemi kullanarak gösteriniz.





A ve B gibi herhangi iki küme için
$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$
olur.

$A \cap B = \varnothing$ ise $s(A \cap B) = 0$
olacağından
$s(A \cup B) = s(A) + s(B)$
ile hesaplanır.

ÖRNEK 5

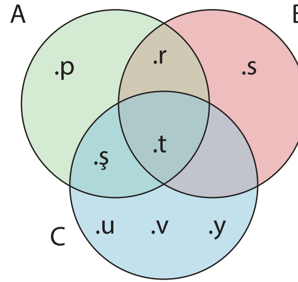
$s(A) = 3 \cdot s(B)$,
$s(A \cup B) = 16$ ve
$s(A \cap B) = 4$ ise s(A) nı bulunuz.

ÇÖZÜM

$s(B) = x$ olursa $s(A) = 3x$ olacaktır.
Bu durumda $s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B) \implies 16 = 3x + x - 4$
$\implies 16 + 4 = 3x + x$
$\implies 20 = 4x$
$\implies x = 5$ olur.

O hâlde $s(A) = 3 \cdot x = 3 \cdot 5 = 15$ olur.

ÖRNEK 6



Yukardaki Venn şemasında A,B,C kümeleri ve bu kümelerin elemanları verilmiştir.
$s(A \cup B \cup C) = s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(A \cap C) - s(B \cap C) + s(A \cap B \cap C)$
olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM

$s(A) = 4$, $s(B) = 3$, $s(C) = 5$, $s(A \cap B) = 2$, $s(A \cap C) = 2$, $s(B \cap C) = 1$
$s(A \cap B \cap C) = 1$
$s(A \cup B \cup C) = 8$
Şemadaki her bir eleman sayıldığında $s(A \cup B \cup C) = 8$ olduğu görülür.

$$s(A \cup B \cup C) = s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(A \cap C) - s(B \cap C) + s(A \cap B \cap C)$$
$$8 = 4 + 3 + 5 - 2 - 2 - 1 + 1$$
$$8 = 8 \text{ olur.}$$

ÖRNEK 7

A,B ve C kümeleri için aşağıdaki bilgiler veriliyor.

- $s(A \cap B) = s(A \cap C) = s(B \cap C)$
- $s(A \cup B \cup C) = s(A) + s(B) + s(C) - 24$
- $s(A \cap B \cap C) = 6$

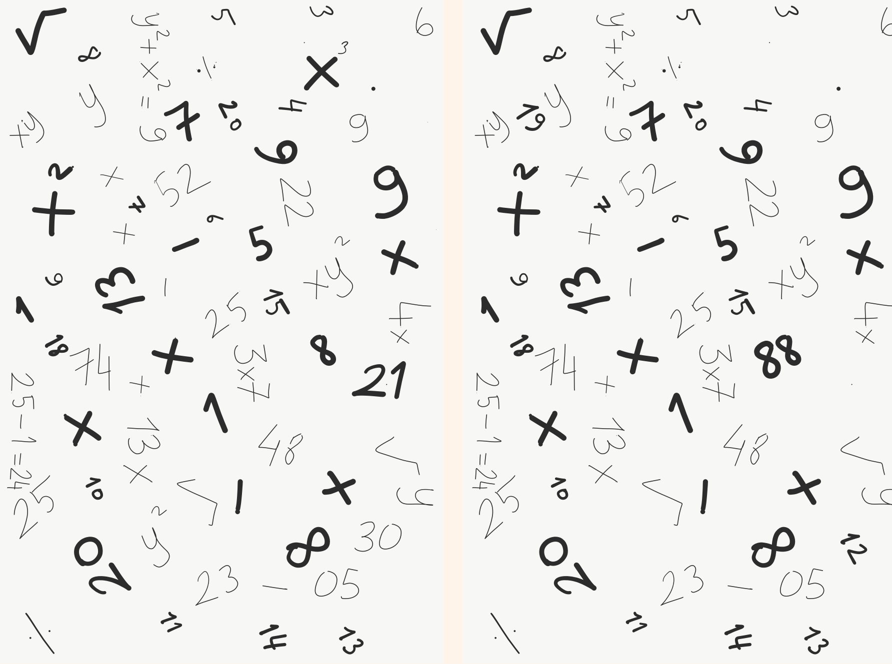
Verilenlere göre $s(A \cap B)$ nın değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$s(A \cap B) = s(A \cap C) = s(B \cap C) = x$ olsun.
$s(A) + s(B) + s(C) = y$ denilirse $s(A \cup B \cup C) = y - 24$ olur.
$s(A \cup B \cup C) = s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(A \cap C) - s(B \cap C) + s(A \cap B \cap C)$
$y - 24 = y - x - x - x + 6$
$y - y - 24 = -3x + 6$
$-24 - 6 = -3x$
$-30 = -3x$
$x = 10$
Bu durumda $s(A \cap B) = x = 10$ olur.

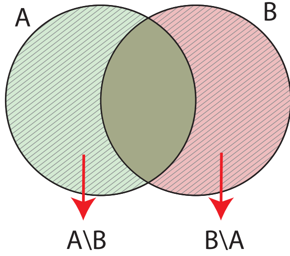
Kümelerde Fark İşlemi

DÜŞÜNÜYORUM



Yukarıda yer alan iki resim arasındaki 7 farkı bulunuz. Bu farklılıkların kümeler açısından ne ifade edebileceğini yorumlayınız.

A ve B herhangi iki küme olmak üzere A kümesinde olup B kümesinde olmayan tüm elemanların oluşturduğu kümeye **A kümesinin B kümesinden farkı** adı verilir. A – B veya A \ B ile gösterilir.



A \ B ve B \ A kümesi ortak özellik yöntemi ile aşağıdaki şekilde gösterilir.

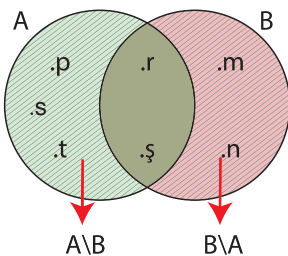
- $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \notin B\}$
- $B \setminus A = \{x \mid x \in B \text{ ve } x \notin A\}$

A \ B ve B \ A kümesinin Venn şeması ile gösterimi yandaki gibidir.

ÖRNEK 8

A ={p, r, s, ş, t} ve B ={r, ş, m, n} kümeleri için A \ B ve B \ A kümelerini bulup Venn şeması ile gösteriniz.

ÇÖZÜM



Kesişim elemanları olan r ve ş hariç A kümesinde kalan elemanlar A \ B yi, B kümesinde kalan elemanlar ise B \ A yı oluşturur.

A \ B ={p, s, t} ve B \ A ={m, n} olarak bulunur. Bu ifadeler Venn şeması ile yandaki gibi gösterilir.



A ve B eşit iki küme ise
$A \setminus B = B \setminus A = ø$ olur.

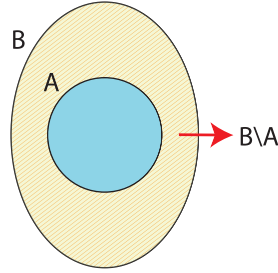


$A \cap B = \varnothing$ ise A ve B kümelerine **ayrık kümeler** denir.
A ve B ayrık kümeler ise $A \setminus B = A$ ve $B \setminus A = B$ olur.

ÖRNEK 9

$A \subseteq B$ ise $B \setminus A$ kümesini Venn şeması ile gösteriniz.

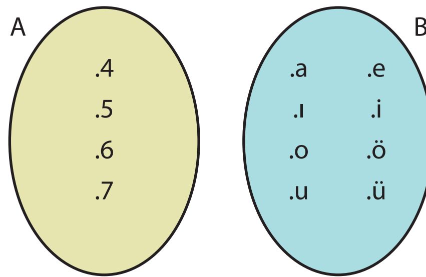
ÇÖZÜM



ÖRNEK 10

A ={x | 3 < x ≤ 7, x tam sayı} ve B ={x | x, Türk alfabesindeki sesli harfler} kümeleri veriliyor.
A ve B kümelerini Venn şeması ile gösterip $A \setminus B$ ve $B \setminus A$ kümelerini bulunuz.

ÇÖZÜM



$A \setminus B = \{4, 5, 6, 7\}$ ve
$B \setminus A = \{a, e, ı, i, o, ö, u, ü\}$ olur.

Kümelerde Fark İşleminin Özellikleri

E evrensel kümesine ait A ve B kümeleri için

1. $A \neq B$ iken $A \setminus B \neq B \setminus A$ olur. Fark işleminin değişme özelliği yoktur.
2. $A \setminus A = \varnothing$ olur. Bir kümenin kendisinden farkı alınırsa elde edilen kümenin elemanı kalmaz. Dolayısıyla sonuç boş kümedir.
3. $A \setminus E = \varnothing$ olur. Evrensel kümenin elemanları içinde A kümesinin elemanları da olduğundan A nın E den farkı alınırsa elde edilen kümenin elemanı kalmaz. Dolayısıyla sonuç boş kümedir.
4. $A \setminus \varnothing = A$ olur. Boş kümenin elemanı olmadığından A kümesinin boş kümeden farkı yine A kümesidir.

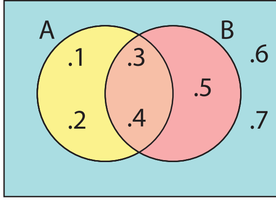
ÖRNEK 11

A ve B kümeleri E evrensel kümesinin alt kümeleri olmak üzere
E ={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} , A ={1, 2, 3, 4} ve B ={3, 4, 5} kümeleri veriliyor.

a) Verilen kümeleri Venn şeması ile gösteriniz.
b) $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ kümesini bulunuz.
c) $E \setminus (A \cup B)$ kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

a) E



b) $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$

$A \cap B = \{3,4\}$

$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{1, 2, 5\}$

Elde edilen kümenin $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ ile ifade edilebileceğine dikkat ediniz.

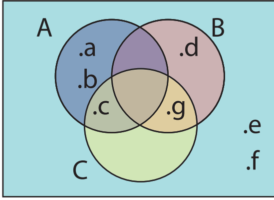
c) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$

$E \setminus (A \cup B) = \{6, 7\}$ olur.

ÖRNEK 12

E



E evrensel kümesine ait A, B ve C kümeleri şemada verilmiştir.

a) $A \setminus (A \cap B)$ kümesini bulunuz.

b) $(A \setminus B) \cup (B \setminus C)$kümesinin elemanlarını bulunuz.

c) $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$ kümesinin elemanlarını bulunuz.

ÇÖZÜM

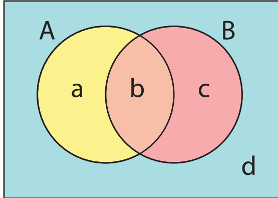
a) $A = \{a, b, c\}$ ve $A \cap B = \varnothing$ olur (A ve B ayrık kümelerdir.). Bu durumda $A \setminus (A \cap B) = A \setminus \varnothing = \{a, b, c\}$ olarak bulunur.

b) $A \setminus B = \{a, b, c\}$ ve $B \setminus C = \{d\}$ olmak üzere $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) = \{a, b, c, d\}$ olur.

c) $A \setminus C = \{a, b\}$ ve $B \setminus C = \{d\}$ olmak üzere $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = \{a, b\}$ olur.

ÖRNEK 13

E



Şemada a, b, c, d değişkenleri bulundukları bölgeye ait eleman sayılarını göstermektedir (Önlerine nokta konulmadan yazıldıklarına dikkat ediniz.). Bu bilgiye göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) A kümesinin eleman sayısını bulunuz.

b) B kümesinin eleman sayısını bulunuz.

c) $(A \cap B)$ kümesinin eleman sayısını bulunuz.

ç) $(A \cup B)$ kümesinin eleman sayısını bulunuz.

d) $A \setminus B$ ve $B \setminus A$ kümelerinin eleman sayılarını bulunuz.

e) $s(A \cup B) = s(A \setminus B) + s(A \cap B) + s(B \setminus A)$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM

a) $s(A) = a + b$ tanedir.

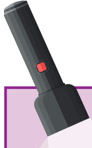
b) $s(B) = b + c$ tanedir.

c) $s(A \cap B) = b$ tanedir.

ç) $s(A \cup B) = a + b + c$ tanedir.

d) $s(A \setminus B) = a$ ve $s(B \setminus A) = c$ tanedir.

e)
$$\begin{aligned} s(A \cup B) &= s(A) + s(B) - s(A \cap B) \\ &= (a+b) + (b+c) - b \\ &= a + b + c \\ &= s(A \setminus B) + s(A \cap B) + s(B \setminus A) \text{ olur.} \end{aligned}$$

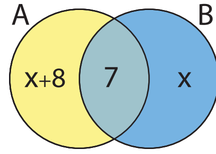


Küme problemlerinin çözümünde probleme uygun bir Venn şeması çizmek ve verilen bilgileri şema üzerine yerleştirmek çözüm için kolaylık sağlar.

ÖRNEK 14

A ve B kümeleri için
$s(A \setminus B) = s(B \setminus A) + 8$
$s(A \cap B) = 7$
$s(A \cup B) = 37$ ise B kümesinin eleman sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM



$s(B \setminus A) = x$ denilirse $s(A \setminus B) = x + 8$ dir.

Verilen tüm bilgiler yandaki Venn şeması ile gösterilirse

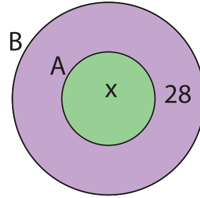
$s(A \cup B) = x + 8 + 7 + x$
$37 = 2x + 15$
$37 - 15 = 2x$
$22 = 2x$
$11 = x$ olur.

Bu durumda $s(B) = 7 + x = 7 + 11 = 18$ olur.

ÖRNEK 15

$A \subseteq B$ olmak koşuluyla $s(B \setminus A) = 28$ ve $s(B) = 5 \cdot s(A)$ olduğuna göre A kümesinin eleman sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM



$s(A) = x$ olursa $s(B) = 5x$ olur. Verilen bilgiler Venn şemasına şekildeki gibi yazılır.

$s(B) = 5 \cdot s(A)$
$28 + x = 5x$
$28 = 5x - x$
$28 = 4x$
$x = 7$ dir.

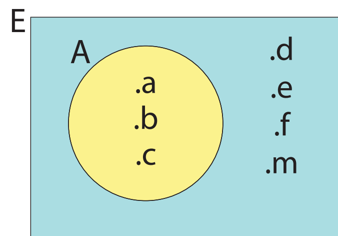
Bu durumda $s(A) = 7$ olur.

Bir Kümenin Tümleyeni

E evrensel kümesine ait bir A kümesi için A kümesinde bulunmayıp E kümesinde bulunan tüm elemanların oluşturduğu kümeye **A kümesinin tümleyeni** adı verilir ve A' ile gösterilir. Ortak özellik yöntemiyle $A' = \{x \mid x \notin A \text{ ve } x \in E\}$ olarak ifade edilir.



ÖRNEK 16



Yandaki şemaya göre aşağıdaki örnekleri cevaplayınız.

a) A' kümesini,
b) $((A')')$ kümesini,
c) $A \cap A'$ kümesini,
ç) $A \cup A'$ kümesini,
d) E' kümesini,
e) $E \setminus A$ ve $A \setminus E$ kümelerini,
f) $s(A) + s(A')$ toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

a) İstenen A kümesinin dışında kalan tüm elemanların oluşturduğu küme $A'=\{d, e, f, m\}$ olur.

b) $A'=\{d, e, f, m\}$ kümesinde olmayıp E kümesinde olan elemanlar kümesi $\{a, b, c\}$ olduğundan $(A')'=\{a, b, c\}=A$ olur.

c) $A \cap A'=\{a, b, c\} \cap \{d, e, f, m\}=\varnothing$ dir. A ve A′ kümeleri ayrık kümelerdir.

ç) $A \cup A'=\{a, b, c\} \cup \{d, e, f, m\}=\{a, b, c, d, e, f, m\}=E$ olur.

d) Evrensel kümenin dışında herhangi bir eleman olmadığından

$E'=\varnothing$ olur. Aynı zamanda $\varnothing'=E$ eşitliği de doğrudur.

e) $E \setminus A=\{a, b, c, d, e, f, m\} \setminus \{a, b, c\}$ $\quad$ $A \setminus E=\{a, b, c\} \setminus \{a, b, c, d, e, f, m\}$

$E \setminus A=\{d, e, f, m\}$ $\quad$ $A \setminus E=\varnothing$ olur.

$E \setminus A=A'$ olur.

f) $A=\{a, b, c\}$ ve $s(A)=3$

$A'=\{d, e, f, m\}$ ve $s(A')=4$ olduğundan

$s(A)+s(A')=3+4=7$ olur. Bu durumda $s(A)+s(A')=s(E)$ olur.

Örnek üzerinde elde edilen eşitliklerden aşağıdaki sonuçlar çıkarılır.

1. $(A')'=A$

2. $A \cap A'=\varnothing$

3. $A \cup A'=E$

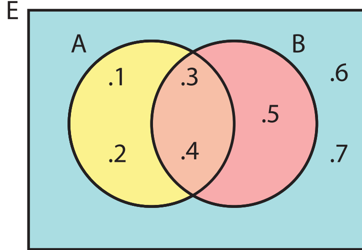
4. $E'=\varnothing$ ve $\varnothing'=E$

5. $A \setminus A'=A$

6. $E \setminus A=A'$ ve $A \setminus E=\varnothing$

7. $s(A)+s(A')=s(E)$

ÖRNEK 17



Yandaki şemada E evrensel kümesine ait A ve B kümeleri verilmiştir.

a) $A \setminus B=A \cap B'$ olduğunu gösteriniz.

b) De Morgan kuralları olarak bilinen $(A \cup B)'=A' \cap B'$ ve $(A \cap B)'=A' \cup B'$ eşitliklerinin doğruluğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM

a) $A \setminus B=\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{3, 4, 5\}=\{1, 2\}$

$A \cap B'=\{1, 2, 3, 4\} \cap \{1, 2, 6, 7\}=\{1, 2\}$ bulunur.

$A \setminus B=A \cap B'$ olur.

$B \setminus A=B \cap A'$ eşitliğinin doğruluğunu da siz gösteriniz.

b) $A \cup B=\{1, 2, 3, 4\} \cup \{3, 4, 5\}=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $(A \cup B)'=\{6, 7\}$ olur.

$A'=\{5, 6, 7\}$ ve $B'=\{1, 2, 6, 7\}$ olur. $A' \cap B'=\{6, 7\}$ olup $(A \cup B)'=A' \cap B'$ olur.

$A \cap B=\{1, 2, 3, 4\} \cap \{3, 4, 5\}=\{3, 4\}$ ve $(A \cap B)'=\{1, 2, 5, 6, 7\}$ olur.

$A'=\{5, 6, 7\}$ ve $B'=\{1, 2, 6, 7\}$ olur.

$A' \cup B'=\{1, 2, 5, 6, 7\}$ olduğundan $(A \cap B)'=A' \cup B'$ olur.

1. $A \setminus B=A \cap B'$
$B \setminus A=B \cap A'$

2. De Morgan kuralları
$(A \cup B)'=A' \cap B'$
$(A \cap B)'=A' \cup B'$

ÖRNEK 18

E evrensel kümesinin alt kümeleri olan M ve N kümeleri için $M' \setminus N' = N \setminus M$ eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM

$M' \setminus N' = M' \cap (N')'$, ($A \setminus B = A \cap B'$ özelliğinden)
$M' \setminus N' = M' \cap N$, ($(A')' = A$ özelliğinden)
$M' \setminus N' = N \cap M'$, ($\cap$ işleminin değişme özelliğinden)
$M' \setminus N' = N \setminus M$ dir.

ÖRNEK 19

E evrensel kümesinde tanımlı A, B ve C kümeleri için $s(A) + s(B') = 22$, $s(B) + s(C') = 12$ ve $s(C) + s(A') = 14$ olarak veriliyor. Buna göre E evrensel kümesinin eleman sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{array}{r} s(A) + s(B') = 22 \\ s(B) + s(C') = 12 \\ + \quad s(C) + s(A') = 14 \\ \hline s(E) + s(E) + s(E) = 48 \end{array}$$

$3 \cdot s(E) = 48 \Rightarrow s(E) = 16$ olur.

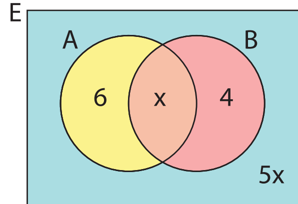
ÖRNEK 20

46 elemanlı bir E evrensel kümesinin alt kümeleri A ve B dir.

$2 \cdot s(A \setminus B) = 3 \cdot s(B \setminus A) = 12$ ve $s((A \cup B)') = 5 \cdot s(A \cap B)$ ise B kümesinin eleman sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

$2 \cdot s(A \setminus B) = 12$ ise $s(A \setminus B) = 6$ olur.
$3 \cdot s(B \setminus A) = 12$ ise $s(B \setminus A) = 4$ olur.



$s(A \cap B) = x$ denilirse $s((A \cup B)') = 5x$ olur.
Elde edilen bilgilerin Venn şeması ile gösterimi yandaki şekildeki gibidir.

$$6 + x + 4 + 5x = 46$$
$$6x + 10 = 46$$
$$6x = 36$$
$$x = 6 \text{ olur.}$$

Bu durumda $s(B) = x + 4 = 6 + 4 = 10$ olur.

ÖRNEK 21

A ve B kümeleri E evrensel kümesinin alt kümeleri olmak üzere

$[A \cup (A' \setminus B)]' = B \setminus A$ eşitliğinin doğruluğunu küme işlemlerini kullanarak gösteriniz.

ÇÖZÜM

$[A \cup (A' \setminus B)]' = [A \cup (A' \cap B')]'$ ($A \setminus B = A \cap B'$ özelliğinden)
$= [\underbrace{(A \cup A')}_{E} \cap (A \cup B')]'$ ($\cup$ işleminin $\cap$ işlemi üzerine soldan dağılma özelliğinden)
$= [E \cap (A \cup B')]'$
$= (A \cup B')'$ (De Morgan kuralından)
$= A' \cap B$
$= B \cap A'$
$= B \setminus A$ olur.



ÖRNEK 22

A ve B, E evrensel kümesinin alt kümeleridir.

$s(A)+s(B')=13-3a$ ve $s(A')+s(B)=15+3a$ ise s(E) değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{array}{r} s(A)+s(B')=13-3a \\ +\ s(A')+s(B)=15+3a \\ \hline s(E)+s(E)=28 \end{array} \longrightarrow \quad 2\cdot s(E)=28 \text{ ve } s(E)=14 \text{ olur.}$$

Kümeler ile Sembolik Mantık Kuralları Arasındaki İlişki

Kümeler ve sembolik mantık arasındaki ilişkilerden bazıları aşağıdaki tablolarda verilmiştir.

Sembolik mantık ile gösterimi	0	1	$\wedge$	$\vee$	Değili $(')$	$\equiv$
Küme işlemleri ile gösterimi	$\varnothing$	E	$\cap$	$\cup$	Tümleyeni $(')$	$=$

Sembolik Mantık İle	**Kümeler İle**
$(p')'\equiv p$	$(A')'=A$
$p\wedge p'\equiv 0$	$A\cap A'=\varnothing$
$1\wedge 0\equiv 0$	$E\cap\varnothing=\varnothing$
$p\vee p'\equiv 1$	$A\cup A'=E$
$p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
$(p\wedge q)'\equiv p'\vee q'$	$(A\cap B)'=A'\cup B'$

ÖRNEK 23

Aşağıda verilen eşitlikleri sembolik mantık kurallarını kullanarak gösteriniz.

a) $E\cap A=A$

b) $A\setminus B=A\cap B'$

c) $A\cap(A'\cup B)=A\cap B$

ÇÖZÜM

a) $E\cap A=\{x\,|\,x\in E\wedge x\in A\}\qquad(x\in E\equiv 1)$
$=A$ olur.

b) $A\setminus B=\{x\,|\,x\in A\wedge x\notin B\}$
$=A\cap B'$ olur.

c) $A\cap(A'\cup B)=\{x\,|\,x\in A\wedge(x\notin A\vee x\in B)\}$
$=\{x\,|\,(x\in A\wedge x\in A')\vee(x\in A\wedge x\in B)\}\qquad(x\in A\wedge x\in A'\equiv 0)$
$=\{x\,|\,x\in A\wedge x\in B\}$
$=A\cap B$ olur.



ÖRNEK 24

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ ve $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ olarak verilen kesişim işleminin birleşim işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliğini sembolik mantık kurallarını kullanarak gösteriniz.

ÇÖZÜM

Kesişim işleminin birleşim işlemi üzerine sağdan dağılma özelliğinin sembolik mantık kuralları kullanılarak gösterimi aşağıdaki gibidir.

$(A \cup B) \cap C = \{x \mid x \in (A \cup B) \wedge x \in C\}$
$= \{x \mid (x \in A \vee x \in B) \wedge x \in C)\}$
$= \{x \mid (x \in A \wedge x \in C) \vee (x \in B \wedge x \in C)\}$
$= \{x \mid x \in (A \cap C) \vee x \in (B \cap C)\}$
$= \{x \mid x \in [(A \cap C) \cup (B \cap C)]\}$
$= (A \cap C) \cup (B \cap C)$ olur.

Kesişim işleminin birleşim işlemi üzerine soldan dağılma özelliğinin sembolik mantık kuralları kullanılarak gösterimi aşağıdaki gibidir.

$A \cap (B \cup C) = \{x \mid x \in A \wedge x \in (B \cup C)\}$
$= \{x \mid x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)\}$
$= \{x \mid (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)\}$
$= \{x \mid x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C)\}$
$= \{x \mid x \in [(A \cap B) \cup (A \cap C)]\}$
$= (A \cap B) \cup (A \cap C)$ olur.

ÖRNEK 25

$(A \cap B') \cap (A' \cup B)$ küme işlemini sembolik mantık kurallarını kullanarak en sade biçime getiriniz.

ÇÖZÜM

$(A \cap B') \cap (A' \cup B)$ işleminde
A kümesi sembolik mantıkta p önermesiyle,
B kümesi sembolik mantıkta q önermesiyle,
"$\cup$" işlemi sembolik mantıkta "$\vee$" ile
"$\cap$" işlemi sembolik mantıkta "$\wedge$" ile gösterilerek sembolik mantık kuralları uygulanırsa $(p \wedge q') \wedge (p' \vee q)$ önermesi elde edilir.
$(p \wedge q') \wedge (p' \vee q) \equiv (p \wedge q') \wedge (p \wedge q')' \equiv 0$ dir
Sembolik mantıkta "0" kümelerde "$\varnothing$" ile gösterildiğinden $(A \cap B') \cap (A' \cup B) = \varnothing$ olur.

ÖRNEK 26

$A \cup [(A \cap B)' \cap (A' \cup B)]$ küme işlemini sembolik mantık kurallarını kullanarak en sade biçime getiriniz.

ÇÖZÜM

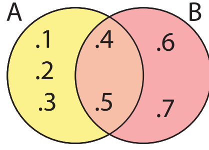
$A \cup [(A \cap B)' \cap (A' \cup B)]$
A kümesi sembolik mantıkta p önermesi ile,
B kümesi sembolik mantıkta q önermesi ile,
"$\cup$" işlemi sembolik mantıkta "v" ile
"$\cap$" işlemi sembolik mantıkta "$\wedge$" ile gösterilerek mantık kuralları uygulanırsa
$\equiv p \vee [(p \wedge q)' \wedge (p' \vee q)]$
$\equiv p \vee [(p' \vee q') \wedge (p' \vee q)]$
$\equiv p \vee [p' \vee (q' \wedge q)]$
$\equiv p \vee (p' \vee 0)$
$\equiv p \vee p' \equiv 1$ olur.

Sembolik mantıkta 1 kümelerde E evrensel kümesi ile gösterildiğinden $A \cup [(A \cap B)' \cap (A' \cup B)] = E$ olur.



ALIŞTIRMALAR

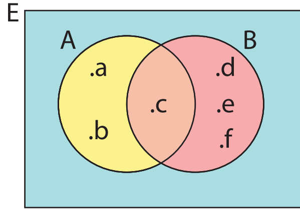
1.



Yanda verilen Venn şemasına göre aşağıda istenilen kümeleri liste yöntemi ile yazınız.

a) A
b) B
c) $A \cup B$
ç) $A \cap B$
d) $B \setminus A$

2.



Yanda verilen Venn şemasına göre aşağıda istenilen kümeleri liste yöntemi ile yazınız.

a) A'
b) B'
c) $(A \cap B)'$
ç) $(A \cup B)'$
d) E'

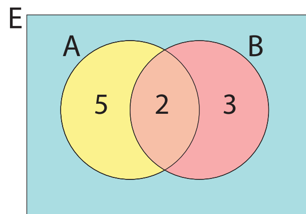
3. A ={x | x , tek doğal sayılar}

B ={x | x , çift tam sayılar}

C ={x | x , pozitif tam sayılar}

kümeleri veriliyor. Buna göre hangi kümelerin ayrık küme belirttiğini bulunuz.

4.



Yandaki şemada sayılar bulundukları bölgeye ait eleman sayılarını belirtmektedir. Buna göre

a) $s(A \cup B)$
b) $s(A \cap B)$
c) $s(A \setminus B) + s(B \setminus A)$ değerini bulunuz.

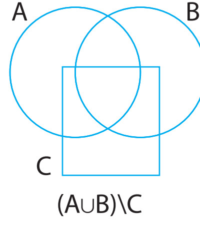
5. 25 kişilik bir sınıfta

- 10 kişi matematik dersinden başarılıdır.
- 16 kişi Türkçe dersinden başarılıdır.
- 7 kişi her iki dersten de başarısızdır.

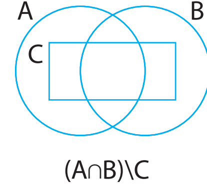
Verilenlere göre bir Venn şeması çizerek eleman sayılarını uygun bölgelere yazınız.



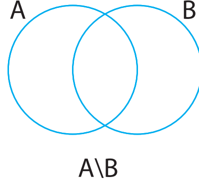
6. Aşağıda verilen Venn şemalarının içini altında belirtilen kümeleri gösterecek şekilde tarayınız.



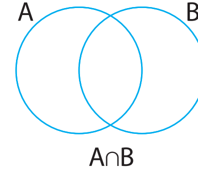
(A∪B)\C



(A∩B)\C

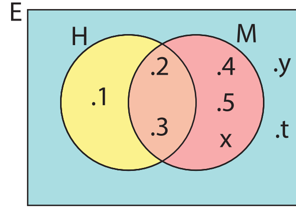


A\B



A∩B

7. Aşağıda verilen Venn şemasına göre istenilenleri bulunuz.



a) H
b) $E \setminus H'$
c) $E \setminus (H \cap M)'$
ç) $s(M) + s(M')$

8. A ve B boş kümeden farklı iki küme olmak üzere

$$\frac{s(A \cap B)}{2} = \frac{s(A \cup B)}{10} = \frac{s(A \setminus B)}{5}$$

Buna göre $s(A \cup B) = 60$ ise $s(B \setminus A)$ nı bulunuz.

9. A ve B kümeleri E evrensel kümesinin iki alt kümesidir. Buna göre

$[A \cup (B \cap A)'] \cap [B' \cap (A \cup B)]$ kümesini en sade şekilde yazınız.

10. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ olduğunu sembolik mantık kurallarını kullanarak gösteriniz.

11. $A \cap A' = \varnothing$ olduğunu sembolik mantık kurallarını kullanarak gösteriniz.

12. A, E evrensel kümesinin alt kümesidir. Buna göre $(E \setminus A)' = A$ olduğunu sembolik mantık kurallarını kullanarak gösteriniz.

13. $(A \cap B') \cap (A \cup B)'$ küme işlemini sembolik mantık kurallarını kullanarak en sade biçime getiriniz.



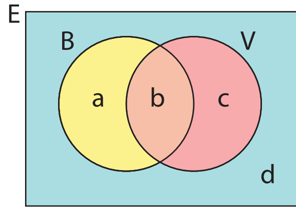
Küme İşlemleri Yardımıyla Problem Çözümü





Şimdiye kadar küme işlemleriyle ilgili öğrenilen özellikler, çeşitli problemlerin çözümünde kullanılarak çıkarımlar yapılabilir.

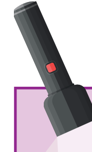
Basketbol veya voleybol oynayan ya da oynamayan bir grup öğrenci için aşağıdaki çalışmalar yapılabilir. Gruptaki tüm öğrencilerin oluşturduğu küme E, basketbol oynayanların oluşturduğu küme B, voleybol oynayanların oluşturduğu küme ise V ile gösterilsin.



a, b, c ve d harfleri bulundukları bölgelere ait eleman sayılarını göstermek üzere

İstenilenin Sözel Anlatımı	Küme İşlemleri ile Gösterimi	Sayısal Olarak Gösterimi
Basketbol oynayanların sayısı	s(B)	a + b
Basketbol oynamayanların sayısı	s(B′)	c + d
Yalnız basketbol oynayanların sayısı	s(B \ V)	a
Voleybol oynayanların sayısı	s(V)	b + c
Voleybol oynamayanların sayısı	s(V′)	a + d
Yalnız voleybol oynayanların sayısı	s(V \ B)	c
Basketbol ve voleybol oynayanların sayısı	s(B ∩ V)	b
Basketbol veya voleybol oynayanların sayısı	s(B ∪ V)	a + b + c
Yalnız bir oyun oynayanların sayısı	s(B \ V) + s(V \ B)	a + c
En çok bir oyun oynayanların sayısı	s(E) − s(B ∩ V)	a + c + d
En az bir oyun oynayanların sayısı	s(B ∪ V)	a + b + c
Basketbol veya voleybol oyunlarını oynamayanların sayısı	s(E) − s(B ∪ V)	d

ifadeleri elde edilir.



Ülkemizde 2017 yılı itibarıyla lisanslı sporcuların 3 152 703 tanesinin kadın sporcu olduğunu biliyor musunuz?

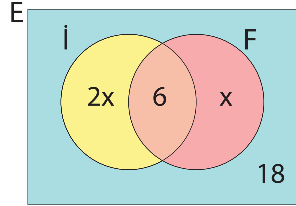


ÖRNEK 27



42 kişilik bir turist kafilesinde yalnız İngilizce bilenlerin sayısı yalnız Fransızca bilenlerin sayısının 2 katıdır. İngilizce ve Fransızca bilenlerin sayısı 6, İngilizce veya Fransızca bilmeyenlerin sayısı 18 ise İngilizce bilen kaç turist olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Yalnız Fransızca bilenlerin sayısına x denilirse yalnız İngilizce bilenlerin sayısı 2x olur. Verilen tüm bilgiler Venn şemasıyla yandaki gibi gösterilir.
Her bölgedeki sayı ve değişkenlerin toplamı kafiledeki tüm turist sayısını verir.

$2x + 6 + x + 18 = 42$
$3x = 42 - 24$
$3x = 18$
$x = 6$ olur.

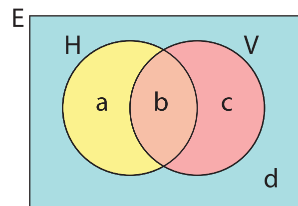
$s(İ) = 2x + 6$
$s(İ) = 2 \cdot 6 + 6$
$s(İ) = 18$ olur.

ÖRNEK 28



Bir sporcu grubunda hentbol ve voleyboldan yalnız birini oynayan 10, en az birini oynayan 12, en çok birini oynayan 28 kişi vardır. Gruptaki toplam sporcu sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM



Yalnız birini oynayanların sayısı,
$a + c = 10$ olur.
En az birini oynayanların sayısı
$a + b + c = 12$ olur.
En çok birini oynayanların sayısı
$a + c + d = 28$ olur.
$a + c = 10$ değeri $a + c + d = 28$ eşitliğinde yerine yazılırsa $10 + d = 28$ ve $d = 18$ bulunur.
İstenilen $a + b + c + d$ toplamıdır.
Dolayısıyla cevap $12 + 18 = 30$ olur.



ÖRNEK 29



Bir üniversitenin matematik bölümünde öğrenim gören kız ve erkek öğrencileri, üniversitenin bulunduğu şehirden gelenler ve bu şehrin dışından gelenler olmak üzere iki grupta inceleyiniz. Oluşacak bu dört ayrık kümenin elemanlarını bir tablo ile göstererek yorumlayınız.

ÇÖZÜM

	KIZ	ERKEK
ŞEHİR İÇİ	a	b
ŞEHİR DIŞI	c	d

Tablodaki bilgiler kullanılarak aşağıdaki sonuçlar bulunabilir.

a) Kız öğrenci sayısı, $a + c$
b) Erkek öğrenci sayısı, $b + d$
c) Şehir içinden gelen öğrenci sayısı, $a + b$
ç) Şehir dışından gelen öğrenci sayısı, $c + d$
d) Şehir içinden gelen kız öğrenci sayısı, a
e) Şehir dışından gelen erkek öğrenci sayısı, d
f) Şehir içinden gelen erkek veya kız öğrenci sayısı, $a + b + c$
g) Şehir dışından gelen kız veya erkek öğrenci sayısı, $c + d + b$
ğ) Tüm öğrenci sayısı, $a + b + c + d$

ÖRNEK 30



Gözlüklü ve gözlüksüz öğrencilerin bulunduğu bir sınıfla ilgili aşağıdaki bilgiler verilmektedir.

I. Gözlüklü kız öğrenci sayısı gözlüksüz erkek öğrenci sayısının 2 katıdır.
II. Gözlüklü erkek öğrenci sayısı gözlüksüz erkek öğrenci sayısından 3 eksiktir.
III. Gözlüksüz kız öğrenci sayısı gözlüklü kız öğrencilerin sayısının yarısından 3 fazladır.
IV. Gözlüksüz veya erkek öğrenci sayısı 21 dir.

Bu bilgilere göre sınıf mevcudunu hesaplayınız.

ÇÖZÜM

Gözlüksüz erkek öğrenci sayısına x denilirse gözlüklü kız öğrenci sayısı 2x, gözlüklü erkek öğrenci sayısı $x - 3$ ve gözlüksüz kız öğrenci sayısı $x + 3$ olur. Bu bilgiler tablo yardımı ile aşağıdaki gibi gösterilir.

	GÖZLÜKLÜ	GÖZLÜKSÜZ
KIZ	$2x$	$x + 3$
ERKEK	$x - 3$	x

Gözlüksüz veya erkek öğrenci sayısı 21 olarak verildiğine göre

$$x + 3 + x + x - 3 = 21$$
$$3x = 21$$
$$x = 7 \text{ olur.}$$

Sınıf mevcudu ise $2x + x + 3 + x - 3 + x = 5x = 35$ olur.

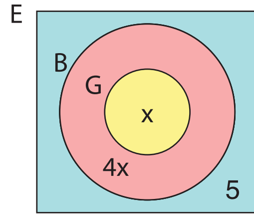


ÖRNEK 31



45 kişilik bir sanatçı grubunda gitar çalabilen herkes aynı zamanda bağlama da çalabilmektedir. Bağlama çalabilen sanatçı sayısı gitar çalabilen sanatçı sayısının 5 katıdır. Bağlama çalamayanların sayısı 5 ise bu iki müzik aletinden yalnız birini çalabilen kaç tane sanatçı olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Gitar çalabilen sanatçılar kümesi G, bağlama çalabilen sanatçılar kümesi B ile gösterilirse, gitar çalabilenler aynı zamanda bağlama da çalabildiğine göre G kümesi B kümesinin alt kümesi olmalıdır.

$s(B) = 5 \cdot s(G)$ olduğundan $s(G) = x$ denilirse $s(B) = 5x$ olur.

Bu durumda $5 + 4x + x = 45$

$5x = 40$

$x = 8$ olur.

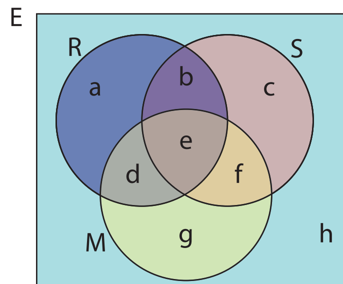
Yalnız bir müzik aleti çalabilenler, $s(B \setminus G) = 4x$ olduğundan cevap $4 \cdot 8 = 32$ olur.

ÖRNEK 32



43 kişilik bir öğrenci grubunda resim, spor ve müzik hobilerinden en az ikisiyle ilgilenen 26, en çok ikisiyle ilgilenen 32 kişi vardır. Bu grupta bu hobilerden yalnız ikisi ile ilgilenen kaç öğrenci olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



I. Mevcut $a + b + c + d + e + f + g + h = 43$ olur.
II. En az iki hobisi olan $b + d + e + f = 26$ olur.
III. En çok iki hobisi olan $a + b + c + d + f + g + h = 32$ olur.
İstenilen ise $b + d + f$ toplamıdır.

III. eşitlikteki bağıntı I. eşitlikte yerine yazılırsa $32 + e = 43$ ve $e = 11$ bulunur.
Bulunan e değeri II. eşitlikteki bağıntıda yerine yazılarak $b + d + f + 11 = 26$ ve $b + d + f = 15$ bulunur.



ALIŞTIRMALAR

1. Bir tatlıcıya giden 20 kişiden 12 si künefe, 9 u baklava, 5 i hem künefe hem baklava yemiştir. Buna göre bu grupta tatlı yemeyen kaç kişi olduğunu bulunuz.

2. 34 kişinin çalıştığı bir şirketin dinlenme saatinde

- 21 kişi çay içmiştir.
- 16 kişi kahve içmiştir.
- Çay ve kahve içen kişi sayısı, çay veya kahve içmeyenlerin sayısının 2 katıdır.

Buna göre sadece çay içen kaç kişi olduğunu bulunuz.

3. Bir fatura ödeme merkezinde sadece elektrik, su ve telefon faturaları ödenmektedir. Bu fatura ödeme merkezine bir saat içinde gelen 25 kişiden hepsi elektrik faturası ödemiştir. Farklı türde iki fatura ödeyen 17 kişi, farklı türde üç fatura ödeyen 5 kişi olduğuna göre sadece elektrik faturası ödeyen kaç kişi olduğunu bulunuz.

4. 40 kişilik bir spor kulübünde,

- Yalnız basketbol oynayanların sayısı, futbol oynayanların sayısına eşittir.
- Yalnız futbol oynayanların sayısı, futbol veya basketbol oynamayanların sayısına eşittir.
- Futbol veya basketbol oynamayanların sayısı, her iki oyunu oynayanların 2 katına eşittir.

Bu kulüpte futbol ya da basketbol oynayan kaç kişi olduğunu bulunuz.

5. Sınıfça yemek yemeye giden bir grup öğrenciden 14 ü et döner, 16 sı tavuk döner yemiştir. Soslu döner yiyen 18 kişi olup soslu et döner yiyenlerin sayısı sossuz tavuk döner yiyenlerin sayısının 2 katıdır. Her öğrenci birer döner yediğine göre bu sınıfta soslu tavuk döner yiyen kaç öğrenci olduğunu bulunuz.

6. Arapça, Farsça ve Türkçeden yalnız birini bilenlerden oluşan bir kafilede Arapça bilmeyen 17, Farsça bilmeyen 15 ve Türkçe bilmeyen 10 kişi vardır. Bu kafilede Türkçe bilen kaç kişi olduğunu bulunuz.

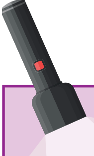
7. 30 kişilik bir sınıfta fizik dersinden başarılı herkes matematik dersinden de başarılı, matematik dersinden başarılı herkes Türkçe dersinden de başarılıdır.

- Türkçe dersinden başarısız öğrenci yoktur.
- Yalnız iki dersten başarılı öğrenci sayısı üç dersten de başarılı öğrenci sayısının iki katı, yalnız bir dersten başarılı öğrenci sayısından 5 fazladır.

Verilenlere göre en az iki dersten başarılı olan öğrenci sayısını bulunuz.



9.2.2.2. İki Kümenin Kartezyen Çarpımı



Kartezyen çarpım ve koordinat sistemi
- Şehir planlamasında,
- Grafik çizimlerinde,
- Haritacılıkta,
- Konum belirleme

gibi bir çok alanda kullanılır.



Binlerce yıllık geçmişi olan satranç oyunu 8x8 lik kare bir alan üzerinde oynanır. 64 tane karenin yarısı koyu yarısı açık renklidir.

Bir satranç tahtası üzerinde yatay doğrultuda "a" dan "h" ye kadar 8 harfin, düşey doğrultuda ise "1" den "8" e kadar rakamların sıralandığı görülür. Tahta üzerindeki bir taşın konumu bir harf ve bir rakamın art arda yazılmasıyla belirlenir.

Örneğin oyunun açılışında beyaz şahın konumu E1 dir. Bu gösterim yöntemiyle günlük hayatta birçok kez karşılaşılır. Sinema salonundaki koltuğunuzun yeri, yaşadığınız şehrin konumu, bir apartman dairesinin kat ve kapı numarası bu gösterime birer örnektir.

Sıralı İkili

Her ikisi de boş kümeden farklı A ve B kümeleri için A kümesinden bir a elemanı, B kümesinden bir b elemanı alınarak elde edilen ve (a, b) şeklinde gösterilen ifadeye **sıralı ikili** adı verilir. Bu gösterimde "a" ya **birinci bileşen**, "b" ye ise **ikinci bileşen** adı verilir.

a ve b birbirinden farklı ise (a,b) ve (b,a) sıralı ikilileri de birbirinden farklıdır. Sıralı ikili yazılımında bileşenlerin yazılış sırası önemlidir.

Sıralı İkililerin Eşitliği

(a, b) ve (c, d) sıralı ikilileri birbirine eşit ise bu durum (a, b) =(c, d) şeklinde gösterilir.

Bu eşitlikte a =c ve b =d dir.

ÖRNEK 33

$(2x-4,\ 3y+6)=(-10,\ 18)$ eşitliğini sağlayan x ve y sayılarını bulunuz.

ÇÖZÜM

$$(2x-4, 3y+6) = (-10, 18)$$

$2x-4=-10$	$3y+6=18$
$2x=-10+4$	$3y=18-6$
$2x=-6$	$3y=12$
$x=-3$ olur.	$y=4$ olur.

ÖRNEK 34

$(x^2, |y|)=(16, 3)$ eşitliğini sağlayan x ve y sayılarının toplamının alabileceği en küçük değeri bulunuz.

ÇÖZÜM

$x^2=16$ ise $x=4$ veya $x=-4$ olur.
$|y|=3$ ise $y=3$ veya $y=-3$ olur.
x in en küçük değeri -4 ve y nin en küçük değeri -3 olacağından toplamları en küçük değeri $-4-3=-7$ olur.



Kartezyen Çarpım Kümesi

Birinci bileşeni bir A kümesinden, ikinci bileşeni ise bir B kümesinden alarak oluşturulan tüm sıralı ikililerin kümesine **A kartezyen çarpım B kümesi** denir ve **AxB** ile gösterilir. AxB kümesinin ortak özellik yöntemi ile gösterimi

AxB ={(a, b) | a ∈ A ve b ∈ B} dir.

ÖRNEK 35

A ={a, b, c} ve B ={7, 9} kümeleri veriliyor. AxB ve BxA kümelerini bulunuz.

ÇÖZÜM

A kümesindeki her eleman B kümesindeki her elemanla eşlenirse
AxB ={(a, 7), (a, 9), (b, 7), (b, 9), (c, 7), (c, 9)} olur.
B kümesindeki her eleman A kümesindeki her elemanla eşlenirse
BxA ={(7, a), (7, b), (7, c), (9, a), (9, b), (9, c)} olur.

Kartezyen Çarpımın Özellikleri

1. A ve B birbirinden farklı iki küme ise AxB $\neq$ BxA olur. Kümeler yer değiştirdiğinde farklı sıralı ikililer oluşacağı için kartezyen çarpımları da birbirinden farklı kümeler oluştururlar.
2. $Ax\varnothing = \varnothing xA = \varnothing$ olur. Boş kümenin kartezyen çarpımına ekleyebileceği herhangi bir elemanı olmadığı için kartezyen çarpımının sonucu da yine boş küme bulunur.

DÜŞÜNÜYORUM

Aşağıda verilen tablodaki boşlukları doldurup AxB kümesinin eleman sayısını bulmak için nasıl bir yol izlenmesi gerektiğini bulunuz.

A	B	AxB	s(AxB)
{1}	{2}	{(1, 2)}	1
{1, 2}	{3}	{(1, 3), (2, 3)}	2
{1, 2}	{3, 4}	{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)}	4
{1, 2}	{2, 3, 4}		
{1, 2, 3, 4}	{3, 4}		
{1, 3}	{1, 2, 3, 4, 5}		

ÖRNEK 36

A ={1, 3, 5, 7, 9} ve B ={k, l, m, n} kümeleri veriliyor. AxB, BxA, AxA ve BxB kümelerinin eleman sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

A ve B herhangi iki küme olmak üzere s(A) = a ve s(B) = b ise
s(AxB) =a · b olur.

$s(A) = 5$ ve $s(B) = 4$ olur.
$s(AxB) = 5 \cdot 4 = 20$
$s(BxA) = 4 \cdot 5 = 20$
$s(AxA) = 5 \cdot 5 = 25$
$s(BxB) = 4 \cdot 4 = 16$ olur.

s(AxB) =s(BxA) olduğuna dikkat ediniz.



s(A) =n ise s(AxA) =n^2 olur.



ÖRNEK 37

A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} kümesi veriliyor. AxA kümesinin elemanlarından kaç tanesinde 1. bileşen ve 2. bileşenin birbirinden farklı olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

s(A) = 6 ve s(AxA) = 6 · 6 = 36 olur.
(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6) elemanlarının bileşenleri aynı olup 6 tanedir.
AxA kümesinin tüm elemanlarından, bileşenleri aynı olan elemanlar çıkarılırsa geriye bileşenleri aynı olmayan elemanlar kalır. Bu durumda bileşenlerin birbirinden farklı olduğu eleman sayısı 36 − 6 = 30 olur.

ÖRNEK 38

AxB = {(3, a), (3, b), (3, c), (4, a), (4, b), (4, c)} ve
CxD = {(4, m), (4, n), (4, k), (4, l), (6, m), (6, n), (6, k), (6, l)}
kartezyen çarpım kümeleri veriliyor. AxD kümesinin eleman sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

AxB yazılımında elde edilen sıralı ikililerin birinci bileşenleri A kümesinin elemanlarıdır. Böylece A kümesi A = {3, 4} ve s(A) = 2 olur.
CxD yazılımında elde edilen sıralı ikililerin ikinci bileşenleri ise D kümesinin elemanlarıdır. Böylece D = {m, n, k, l} ve s(D) = 4 olur. Bu durumda
$s(AxD) = s(A) \cdot s(D) = 2 \cdot 4 = 8$ olur.

ÖRNEK 39

Eleman sayıları birbirinden farklı A ve B kümeleri veriliyor. s(AxB) = 36 ise A ∪ B kümesinin eleman sayısının alabileceği en küçük ve en büyük değeri hesaplayınız.

ÇÖZÜM

s(AxB) = s(A) · s(B) olarak yazılır.
s(A) = 36 ve s(B) = 1 olarak seçilip A ve B ayrık iki küme olarak düşünülürse
s(A ∪ B) = s(A) + s(B) = 36 + 1 = 37 olur. Bu durumda birleşimleri en çok 37 elemanlıdır.

s(A) = 9 ve s(B) = 4 olarak seçilip $A \subseteq B$ olarak düşünülürse s(A ∪ B) = 9
Bu durumda birleşimleri en az 9 elemanlıdır.

ÖRNEK 40

$A = \{a, 1, 2, \%, x\}$ ve $B = \{x \mid x \text{ bir rakam}\}$ kümeleri veriliyor.

AxB kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde (x, 2) elemanının olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

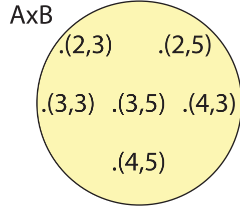
B = {0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9}
s(B) = 10, s(A) = 5 olduğundan s(AxB) = s(A) · s(B) = 5 · 10 = 50
AxB kümesinin (x, 2) dışında 49 tane elemanı vardır. Bu elemanların oluşturduğu 2^{49} tane alt kümenin her birine (x, 2) elemanı eklenerek (x, 2) elemanın bulunduğu alt kümeler oluşturulur. Buradan cevap 2^{49} dur.

ÖRNEK 41

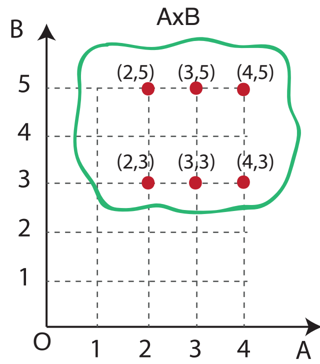
A ={2, 3, 4} ve B ={3, 5} kümeleri veriliyor.
AxB kümesini liste yöntemi ve Venn şeması ile gösterip bu kümenin grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM

AxB nin liste yöntemi ile gösterimi AxB ={(2, 3), (2, 5), (3, 3), (3, 5), (4, 3), (4, 5)} olur.
AxB nin Venn şeması ile gösterimi aşağıdadır.



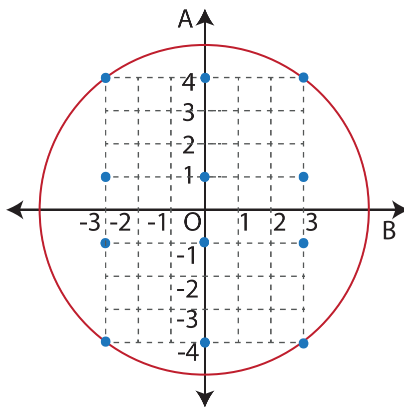
Grafiğin dik koordinat sisteminde gösterimi
AxB kümesini oluşturan sıralı ikililerin birinci bileşenleri x ekseni üzerinde, ikinci bileşenleri ise y ekseni üzerinde bulunur. x eksenindeki bileşenlere düşey ve kesikli, y eksenindeki bileşenlere yatay ve kesikli doğrular çizilip kesiştiği noktalar işaretlenir. Bu şekilde elde edilen noktaların oluşturduğu grafik AxB nin grafiğidir.



ÖRNEK 42

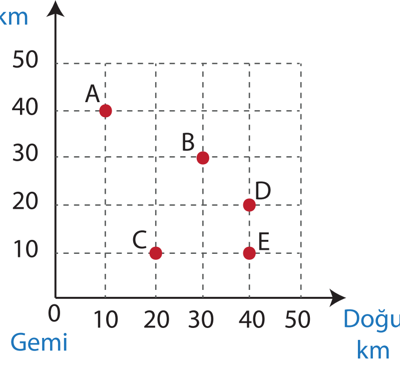
A ={−4, −1, 1, 4} ve B ={−3 , 0, 3} kümeleri veriliyor. BxA kümesinin grafiğini çizip grafiğin elemanlarını açıkta bırakmayan **en küçük** çaplı çemberi çiziniz.

ÇÖZÜM



BxA kümesinin grafiğini çizmek için B kümesinin elemanları x ekseni üzerinde, A kümesinin elemanları y ekseni üzerinde gösterilir. Bu durumda BxA kümesinin elemanlarını açıkta bırakmayan en küçük çaplı çember yandaki şekildeki gibidir.

ALIŞTIRMALAR

1. 

Yandaki grafikte verilen A, B, C, D, E noktaları farklı adaları göstermektedir. Orijinde bulunan geminin kaptanı gemisini A noktasındaki adaya götürecektir. Ancak adaya ulaştığında kaptan adanın koordinatlarının birinci ve ikinci bileşenlerinin yerini karıştırıp farklı bir adaya geldiğinin farkına varmıştır. Buna göre kaptanın gemisini hangi adaya götürdüğünü bulunuz.

2. (x, y) sıralı ikilisinde x ve y birer rakam olmak üzere x + y nin **en çok** kaç olabileceğini bulunuz.

3. $(2^{x-2}, 27) = (64, 3^{1-y})$ eşitliğinde x − y nin değerini bulunuz.

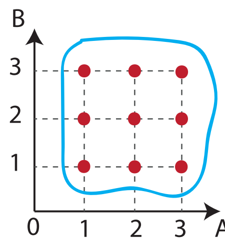
4. A ={x | x , rakamlar kümesi} ve B ={x | x , 10 dan küçük ve 2 nin doğal sayı kuvvetleri} dir. Bu durumda s(AxB) değerini bulunuz.

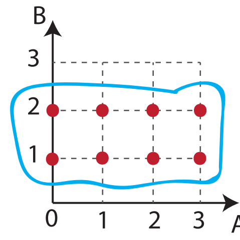
5. $A = \{x \mid -1 < x < 4,\ x \in \mathbb{N}\}$
$B = \{y \mid y^2 < 9,\ y \in \mathbb{Z}\}$ ve
C ={x | x , 6 nın pozitif tam sayı çarpanları} kümeleri veriliyor.
AxB, AxC, CxB ifadelerini dik koordinat sisteminde gösteriniz.

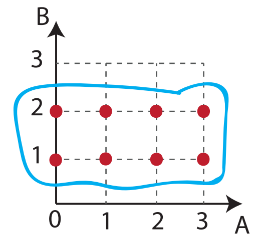
6. $A = \{x \mid 12 < x < 40,\ x = 5n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ ve
B ={x | x , alfabemizdeki ünlü harfler} ise s(AxB) değerini bulunuz.

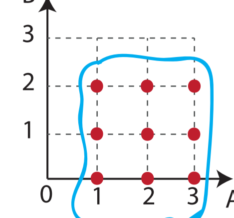
7. (3x + 4y , 2) =(5 , 4x + 3y) eşitliğine göre x + y değerini bulunuz.

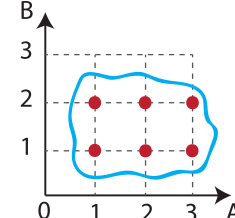
8. A ={x | $\frac{x-2}{2}$ ifadesini basit kesir yapan pozitif tam sayı}
B ={x | $x^2 < 5$, x pozitif tam sayı}
Aşağıdaki grafiklerden hangisi AxB ye aittir?

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

9.2. ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

1.
I. A ={x | x , HAKAN sözcüğündeki harfler} ise s(A) =4 olur.
II. B ={∅} ise s(B) =0 olur.
III. C ={y | 1 < y < 7, y iki basamaklı doğal sayı} ise s(C) =0 olur.

Yukarıda verilenlerden hangisi veya hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız III C) I ve II D) II ve III E) I ve III

2. A ={x | x ≤ 5, x bir rakam} ise
I. $\{2\} \in A$
II. $\{1,2\} \subseteq A$
III. $s(A) = 6$ dır.
IV. A nın alt küme sayısı 32 dir.

Yukarıda verilenlerden hangisi veya hangileri doğrudur?

A) II ve III B) I ve IV C) II ve IV D) I ve III E) III ve IV

3. A ={a | a yı tam bölen farklı pozitif tam sayılar} kümesi veriliyor. s(A) =4 şartını sağlayan a değeri aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 9 B) 16 C) 27 D) 36 E) 45

4. A ={a, b, c, d, {1, 2, 3, 4}} alt kümelerinin kaç tanesinde b elemanı bulunup c elemanı bulunmaz?

A) 64 B) 32 C) 16 D) 8 E) 4

5. A ={a, b, c} ve B ={a, b, c, 1, 2, 3} kümeleri veriliyor. B kümesinin alt kümelerinden kaç tanesi A kümesini kapsar?

A) 4 B) 8 C) 16 D) 32 E) 64

6. $a \in A$ ve $b \in A$ olmak üzere a ve b elemanlarından yalnız birinin bulunduğu alt küme sayısı 32 ise A nın öz alt küme sayısı kaçtır?

A) 15 B) 31 C) 32 D) 63 E) 64

7. A ve B boş kümeden farklı iki küme olsun. A ∩ B nin alt küme sayısı 1, A \ B nin alt küme sayısı 8, A ∪ B nin eleman sayısı 9 ise B \ A nın alt küme sayısı kaçtır?

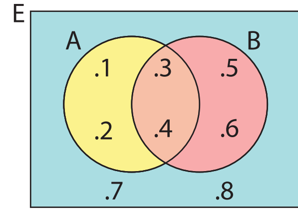
A) 5 B) 8 C) 16 D) 32 E) 64

8. A ={x | x ≤ 10, x =2n, n ∈ ℕ} kümesi veriliyor.
I. B ={x | x, 11 den küçük çift pozitif tam sayı}
II. C ={x | x, 12 den küçük çift doğal sayı}
III. D ={x | x, 10 dan küçük pozitif tam sayı}

Yukarıda verilenlerden hangisi ya da hangileri A kümesine eşittir?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II D) II ve III E) I-II-III

9.



Yukarıdaki Venn şemasına göre $s(A \cap B') + s(B')$ kaçtır?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

10. $A \subseteq E$, $A \neq \emptyset$ ve $A \neq E$ olmak üzere
I. $A \cap A'$
II. $A \cup A'$
III. $A \cap E$
IV. $A' \cap E$

ifadelerinden hangisi ya da hangileri boş küme belirtir?

A) Yalnız I B) I ve IV C) II ve III D) III ve IV E) I ve II

11. Boş kümeden farklı A ve B kümeleri için $s(A \cup B) = 2 \cdot s(A \cap B) = 3 \cdot s(A \setminus B)$ ise $\frac{s(B \setminus A)}{s(B)}$ değeri kaçtır?

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{2}{5}$

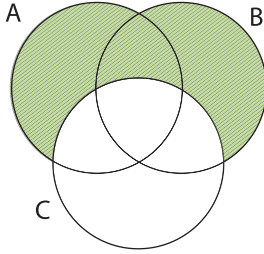
12. A ve B kümeleri için $s(A \setminus B') = 5$, $s(A) = 8$ ve $s(A \cup B) = 17$ ise s(B) nın değeri kaçtır?

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

13. 24 kişilik bir sınıfta kimya veya fizik derslerinden geçenler ile kalanlar vardır. Kimya veya fizik derslerinden kalanların sayısı 4, yalnız bir dersten geçen 12 kişi ise her iki dersten geçen kaç kişi vardır?

A) 8 B) 10 C) 11 D) 12 E) 14

14.



Yukarıdaki Venn şemasında verilen taralı bölgeleri ifade eden küme aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(A \cup C) \setminus (B \cup C)$
B) $(A \cup B)' \setminus C$
C) $(A \cup B) \setminus C$
D) $(A \cap B) \setminus C$
E) $(A \cap B)' \setminus (B \cap C)'$

15. $A = \{1, 2\}$ ve $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ kümeleri veriliyor. $A \subseteq K \subseteq B$ ise $K \neq A$ olmak üzere kaç farklı K kümesi vardır?

A) 7 B) 15 C) 16 D) 31 E) 32

16. $A, B \subseteq E$ olmak üzere $[E \setminus ((A \setminus B') \cap (A' \cap B'))]'$ ifadesinin en sade biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\varnothing$ B) $B \setminus A$ C) E D) A E) B

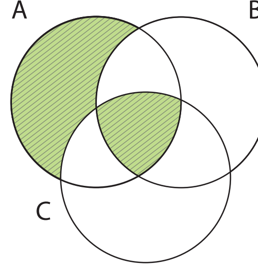
17. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesi veriliyor. $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ olduğuna göre B kümesinin eleman sayısı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

18. $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ ve $C = \{2, 3, 4\}$ tür. AxB ve BxC kümelerinin kaç tane ortak elemanı vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

19.



Yukarıdaki Venn şemasında verilen taralı bölgeler aşağıdakilerden hangisi ile ifade edilebilir?

A) $(A \setminus B) \cup (B \cup C)$
B) $(A \cap B \cap C) \cup (A \setminus B)$
C) $A \cup (A \cap B)$
D) $(B \cap C) \cup A$
E) $(A \setminus (B \cup C)) \cup (A \cap B \cap C)$

20. $A = \{(x, y) \mid y = 3x + 1$, x ve y rakam$\}$ kümesinin eleman sayısı kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

21. $A = \{-1, 0, 2, 3\}$ ve $B = \{2, 3, 5\}$ kümeleri veriliyor. AxB grafiğindeki noktalardan herhangi dördünü köşe kabul ederek çizilebilen en büyük alanlı dikdörtgenin çevresi kaç birimdir?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 14

22. A ve B, E evrensel kümesinin iki alt kümesi olmak üzere $3 \cdot s(A \setminus B) = 6 \cdot s(A \cap B) = 2 \cdot s(B \cap A')$ ve $s(A \cup B) = 42$ ise s(A) nın değeri kaçtır?

A) 7 B) 14 C) 21 D) 23 E) 25

23. Bir halk eğitim merkezinde diksiyon, ebru ve el sanatları kursu açılmıştır. Bu kurslardan en az birine katılan 38 kişiden 20 si diksiyon, 18 i ebru ve 19 u el sanatları kursunu tamamlamıştır.

- Diksiyon ve ebru kursunu tamamlayan 6 kişi,
- Diksiyon ve el sanatları kursunu tamamlayan 9 kişi,
- Ebru ve el sanatları kursunu tamamlayan 7 kişi vardır.

Verilenlere göre

a) 3 kursu tamamlayan kaç kişi olduğunu bulunuz.

b) Yalnız 2 kursu tamamlayan kaç kişi olduğunu bulunuz.

c) **En az** 2 kursu tamamlayan kaç kişi olduğunu bulunuz.





$2x + 3 > 11$

$(2x - 4) + (3x + 1) = 0$

2



5

$-2x + 5 = 3x - 7$

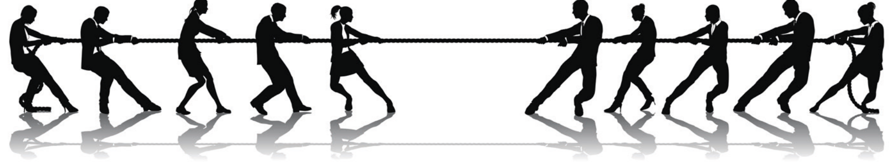
$x = \frac{12}{5}$

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

9.3.1. Sayı Kümeleri
9.3.2. Bölünebilme Kuralları
9.3.3. Birinci Dereceden Denklemler ve Eşitsizlikler
9.3.4. Üslü İfadeler ve Denklemler
9.3.5. Denklemler ve Eşitsizliklerle İlgili Uygulamalar



9.3. DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER



Günlük hayatta karşılaşılan bazı problemlerin somutlaştırılıp matematik dilinde yazılması denklemler ve eşitsizlikler yardımıyla gerçekleştirilebilir. Böylece bir problemin anlaşılması, yorumlanması ve çözüme ulaştırılması oldukça kolaylaşır. Örneğin alışveriş sırasında farklı miktarlarda paketlenen aynı ürünün hangisinin fiyatının daha hesaplı olduğunun, bütçemize uygun telefon veya internet tarifesinin hangisi olduğunun belirlenmesinde, ödemelerimizdeki vergi tutarlarının hesaplanmasında ve daha birçok durumda bu denklemler ve eşitsizlikler yol gösterici olur.

Denklem ve eşitsizlik kurma yalnızca matematiğin değil diğer birçok bilim dalının da dünyada ve evrende gerçekleşen durumları anlatmada sıkça kullandığı bir yöntemdir.



Terimler ve Kavramlar

- Doğal Sayılar
- Tam Sayılar
- Rasyonel Sayılar
- İrrasyonel Sayılar
- Gerçek (reel) Sayılar



Sembol ve Gösterimler

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}', \mathbb{R}, \mathbb{Z}^+, \mathbb{Q}^+,$
$\mathbb{R}^+, \mathbb{Z}^-, \mathbb{Q}^-, \mathbb{R}^-, \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$

9.3.1. Sayı Kümeleri

Neler Öğreneceksiniz?

Sayı kümelerini birbiriyle ilişkilendirmeyi öğreneceksiniz.

9.3.1.1. Sayı Kümelerininin Birbiriyle İlişkisi

Sayı kavramı tarih boyunca değişik toplumlar tarafından değişik şekillerde kullanılmıştır. İlk sayıların insanın sayma gereksiniminden ortaya çıktığı ve akşamları hayvanlarının tam olup olmadığını anlamak isteyen insanlar tarafından kullanıldığı iddia edilmektedir. Tam anlamıyla bir sayı kavramına sahip olmayan bu insanlar bu işi her hayvan için bir çakıl taşı kullanarak yapmışlardır. Böylece her çakıl taşı bir hayvanla eşleşmiş oluyordu. Zamanla ortaya çıkan yeni ihtiyaçlar sonucu sayı kavramı da gelişmiş ve yeni sayı kümeleri ortaya çıkmıştır.

Doğal Sayılar Kümesi ($\mathbb{N}$)

{0, 1, 2, 3, 4, 5, …} kümesine **doğal sayılar kümesi** denir ve " $\mathbb{N}$ " simgesi ile gösterilir.

$\mathbb{N}$ ={0, 1, 2, 3, 4, 5, …} kümesinin her elemanına **doğal sayı** denir.



Tam Sayılar Kümesi ($\mathbb{Z}$)

$x + 1 = 0$ denklemini sağlayan herhangi bir doğal sayı bulunamayacağından negatif sayı kavramı gelişmiştir. $x = -1$ sayısı negatif tam sayıdır. Negatif tam sayılar doğal sayılara eklendiğinde tam sayılar kümesi oluşur.

$\{\ldots -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ kümesine **tam sayılar kümesi** denir ve "$\mathbb{Z}$" simgesi ile gösterilir.

$\mathbb{Z} = \{\ldots -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ kümesinin her elemanına **tam sayı** denir.

Tam sayılar kümesinin negatif elemanlarından oluşan kümeye **negatif tam sayılar kümesi** denir ve "$\mathbb{Z}^-$" simgesi ile gösterilir.

$\mathbb{Z}^- = \{\ldots -5, -4, -3, -2, -1\}$ dir.

Tam sayılar kümesinin pozitif elemanlarından oluşan kümeye **pozitif tam sayılar kümesi** denir ve "$\mathbb{Z}^+$" simgesi ile gösterilir. $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ dir.

$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$ olarak ifade edilir.

Sıfır sayısının işareti yoktur.

Buna göre her doğal sayı aynı zamanda bir tam sayıdır ve $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ dir.

Rasyonel Sayılar Kümesi ($\mathbb{Q}$)

a ve b tam sayılar ve b sıfırdan farklı olmak üzere $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılabilen sayılara **rasyonel sayılar** denir ve "$\mathbb{Q}$" simgesi ile gösterilir.

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ ve } b \neq 0\right\}$ kümesinin elemanlarına **rasyonel sayı** denir.

Rasyonel sayılar kümesinin negatif elemanlarından oluşan kümeye **negatif rasyonel sayılar kümesi** denir ve "$\mathbb{Q}^-$" simgesi ile gösterilir.

Rasyonel sayılar kümesinin pozitif elemanlarından oluşan kümeye p**ozitif rasyonel sayılar kümesi** denir ve "$\mathbb{Q}^+$" simgesi ile gösterilir

Rasyonel sayılara örnek olarak $\frac{3}{7}, -\frac{11}{13}, 0, 3, \frac{15}{17}, -8$ sayıları verilebilir.

Buna göre her tam sayı aynı zamanda bir rasyonel sayıdır ve $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ dir.



- Kök dışına tam olarak çıkamayan sayılar,
- Virgülden sonraki kısmı tam olarak bilinmeyen sayılar,
- İki tam sayının oranı şeklinde yazılamayan sayılar

irrasyonel sayılardır.

$\pi = 3,1415926535897932384626433832795028841971693993$

İrrasyonel Sayılar Kümesi ($\mathbb{Q}'$)

a ve b tam sayılar ve b sıfırdan farklı olmak üzere $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılamayan sayılara **irrasyonel sayılar** denir ve "$\mathbb{Q}'$" simgesi ile gösterilir.

Örnek olarak $\sqrt{2}, -\sqrt{3}, \sqrt{\frac{1}{5}}$, π sayıları verilebilir.

$\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \varnothing$ dir.



- $\sqrt{-2}, \sqrt{-9}$ ... gibi içerisinde negatif sayı bulunan kare köklü ifadeler gerçek sayı belirtmez.

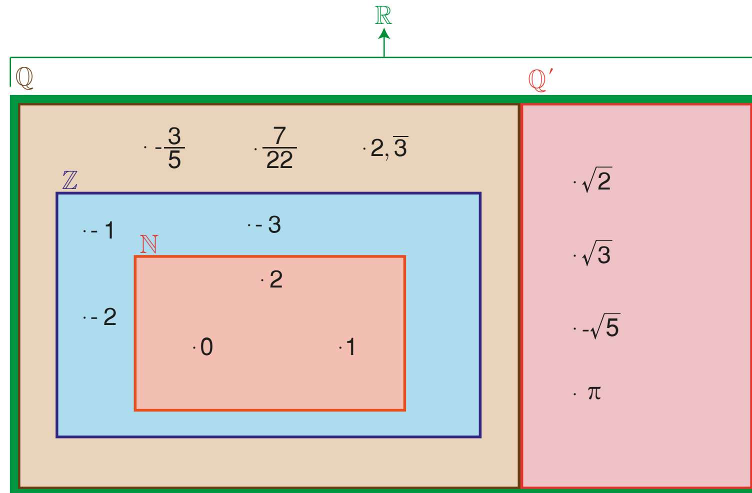
Gerçek (Reel) Sayılar Kümesi ($\mathbb{R}$)

Rasyonel sayılar kümesi ile irrasyonel sayılar kümesinin birleşimi ile oluşan kümeye **gerçek (reel) sayılar kümesi** denir ve "$\mathbb{R}$" simgesi ile gösterilir. $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$ kümesinin elemanlarına **gerçek (reel) sayı** denir. Pozitif gerçek sayılar "$\mathbb{R}^+$", negatif gerçek sayılar ise "$\mathbb{R}^-$" simgesi ile gösterilir.

$\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- \cup \{0\}$ dir.

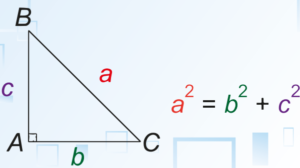


Sayı kümeleri arasında $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ bağıntısı vardır ve $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$ dir. Bu bağıntı Venn şeması ile aşağıdaki gibi gösterilebilir.

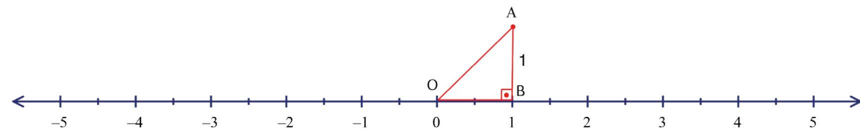


Pisagor teoremi

Bir dik üçgende 90º lik açının karşısındaki kenarın (hipotenüs) karesi diğer kenarların karelerinin toplamına eşittir.



Sayı doğrusu gerçek sayıların bir gösterim şeklidir. Her gerçek sayı, sayı doğrusu üzerinde bir nokta belirtir. Örneğin $\sqrt{2}$ sayısının sayı doğrusundaki yerini bulmak için sayı doğrusu üzerinde aşağıdaki şekilde verildiği gibi eşit kenarları 1 er birim olan bir ikizkenar dik üçgen çizilir.



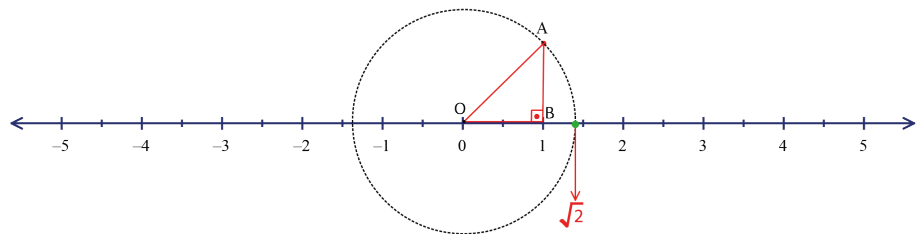
Pisagor teoremi yardımıyla

$|AO|^2 = 1^2 + 1^2$

$|AO|^2 = 2$

$|AO| = \sqrt{2}$ olur.

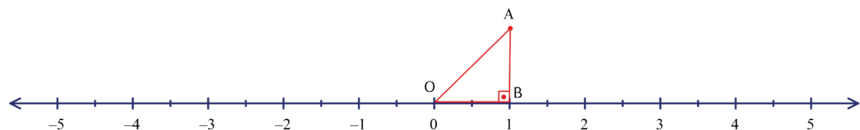
Pergelin bir ucu O noktasına diğer ucu A noktasına yerleştirilerek merkezi O olan bir çember çizilir.



Çemberin sayı doğrusunu pozitif tarafta kestiği nokta $\sqrt{2}$ nin sayı doğrusundaki yeridir.

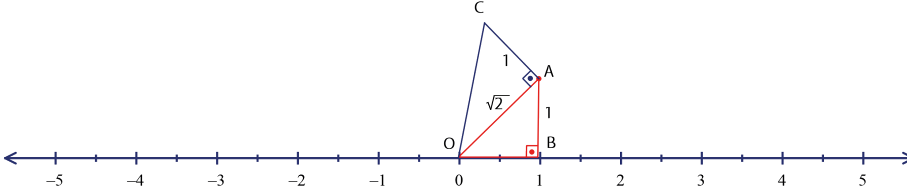
A4 fotokopi kâğıdının boyunun enine oranının $\sqrt{2}$ sayısına eşit olduğunu biliyor muydunuz?

$\sqrt{3}$ sayısının sayı doğrusu üzerindeki geometrik yeri de benzer yolla gösterilir. $\sqrt{2}$ sayısının geometrik yerini göstermek için kullanılan AOB dik üçgeni çizilir.





A noktasından aşağıdaki şekilde verildiği gibi AO doğru parçasına dik olan 1 birim uzunluktaki AC doğru parçası çizilir ve O ile C noktaları birleştirilir.

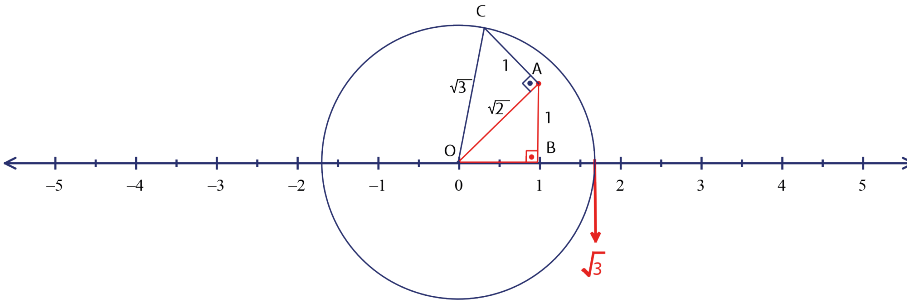


AOC dik üçgeninde Pisagor teoremi kullanarak OC uzunluğu bulunur.

$|OC|^2 = |AC|^2 + |AO|^2$

$|OC|^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2$

$|OC|^2 = 3 \Rightarrow |OC| = \sqrt{3}$ olur.



Yukarıdaki şekilde olduğu gibi pergelin bir ucu O noktasına diğer ucu C noktasına yerleştirilerek merkezi O olan OC yarıçaplı bir çember çizilir.

Çemberin sayı doğrusunu kestiği nokta $\sqrt{3}$ sayısının sayı doğrusu üzerindeki geometrik yeridir.

Siz de aynı şekilde $\sqrt{5}$ sayısının sayı doğrusundaki yerini gösteriniz.



$\sqrt{2} \approx 1{,}41421$
$\sqrt{3} \approx 1{,}73205$
$\sqrt{5} \approx 2{,}23606$

ÖRNEK 1

x ve y birer doğal sayı olmak üzere $x + y = 12$ ise $x \cdot y$ ifadesinin alabileceği **en büyük** ve **en küçük** değerleri bulunuz.

ÇÖZÜM

Toplamları verilen iki doğal sayının çarpımlarının en büyük olabilmesi için bu sayıların birbirine en yakın değerleri seçilir. Dolayısıyla değişkenlerin her ikisi de 6 olarak alınırsa $x \cdot y$ ifadesinin en büyük değeri $6 \cdot 6 = 36$ olur.

Toplamları verilen iki doğal sayının çarpımlarının en küçük olabilmesi için bu sayıların birbirine en uzak değerleri seçilir. Dolayısıyla değişkenlerden birini 0 diğerini 12 seçerek $x \cdot y$ ifadesinin en küçük değeri $0 \cdot 12 = 0$ olur.

ÖRNEK 2

x ve y birer tam sayı olmak üzere $x \cdot y = 35$ ise $x + y$ ifadesinin alabileceği **en büyük** ve **en küçük** değerleri bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen değişkenler birer tam sayı ve çarpımları bir pozitif tam sayı olduğundan toplamlarının en büyük değerini bulmak için birbirine en uzak iki pozitif değer seçilir. Böylece değişkenlerden biri 35 diğeri 1 olarak alınırsa toplamları en çok

$35 + 1 = 36$ olur.

Toplamlarının en küçük değerini bulmak için birbirine en uzak iki negatif değer seçilir. Böylece değişkenlerden biri −35 diğeri −1 olarak alınırsa toplamları en az

$(-35) + (-1) = -36$ olur.



ÖRNEK 3

a, b, c birer pozitif tam sayı olmak üzere
$a \cdot b = 12$
$b \cdot c = 20$
ise $a + b + c$ toplamının alabileceği **en büyük** ve **en küçük** değerleri bulunuz.

ÇÖZÜM

b çarpanı her iki ifadede ortaktır.
$b = 1$ için $a = 12$ ve $c = 20$ olur. Toplamın en büyük değeri $1 + 12 + 20 = 33$ olur.
$b = 4$ için $a = 3$ ve $c = 5$ olur. Toplamın en küçük değeri ise $4 + 3 + 5 = 12$ olur.

Gerçek Sayılar Kümesinde Toplama ve Çarpma İşleminin Özellikleri

Toplama İşleminin Özellikleri

Kapalılık Özelliği
Her $a, b \in \mathbb{R}$ için $a + b \in \mathbb{R}$ dir. Bu özelliğe toplama işleminin **kapalılık özelliği** denir.

3 ve 4 gerçek sayılardır ve bu iki sayının toplamının sonucu $3 + 4 = 7$ de bir gerçek sayıdır.

Değişme Özelliği
Her $a, b \in \mathbb{R}$ için $a + b = b + a$ olur. Bu özelliğe toplama işleminin **değişme özelliği** denir.

$3 + 4 = 4 + 3$

$7 = 7$ olur.

Birleşme Özelliği
Her $a, b, c \in \mathbb{R}$ için $a + (b + c) = (a + b) + c$ olur. Bu özelliğe toplama işleminin **birleşme özelliği** denir.

$3 + (4 + 5) = (3 + 4) + 5$

$3 + 9 = 7 + 5$

$12 = 12$ olur.

Etkisiz (Birim) Eleman Özelliği
Her $a \in \mathbb{R}$ için $a + 0 = 0 + a = a$ olduğundan "0" toplama işleminin **etkisiz (birim)** elemanıdır.

$4 + 0 = 0 + 4 = 4$ olur.

Ters Eleman Özelliği
Her $a \in \mathbb{R}$ için $a + (-a) = (-a) + a = 0$ olduğundan a nın toplama işlemine göre tersi $-a$ olur.

$4 + (-4) = (-4) + 4 = 0$ olur.



Çarpma İşleminin Özellikleri

Kapalılık Özelliği

Her a, b $\in \mathbb{R}$ için a · b $\in \mathbb{R}$ olur. Bu özelliğe çarpma işleminin **kapalılık özelliği** denir.

3 ve 4 gerçek sayılardır ve bu iki sayının çarpımının sonucu 3 · 4 = 12 sayısı da gerçek bir sayıdır.

Değişme Özelliği

Her a, b $\in \mathbb{R}$ için a · b = b · a olur. Bu özelliğe çarpma işleminin **değişme özelliği** denir.

$3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$

$12 = 12$ olur.

Birleşme Özelliği

Her a, b, c $\in \mathbb{R}$ için a · (b · c) = (a · b) · c olur. Bu özelliğe çarpma işleminin **birleşme özelliği** denir.

$3 \cdot (4 \cdot 5) = (3 \cdot 4) \cdot 5$

$3 \cdot 20 = 12 \cdot 5$

$60 = 60$ olur.

Etkisiz (Birim) Eleman Özelliği

Her a $\in \mathbb{R}$ için a · 1 = 1 · a = a olduğundan çarpma işleminin **etkisiz (birim) elemanı** "1" olur.

$4 \cdot 1 = 1 \cdot 4 = 4$ olur.

Ters Eleman Özelliği

Her a $\in \mathbb{R}$ ve a ≠ 0 için $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$ olduğundan a nın çarpma işlemine göre **tersi** $\frac{1}{a}$ olur.

$4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$ olur.

0 sayısının çarpma işlemine göre tersi yoktur.

Yutan Eleman Özelliği

Her a $\in \mathbb{R}$ için a · 0 = 0 · a = 0 olduğundan çarpma işleminin **yutan elemanı** "0" olur.

$4 \cdot 0 = 0 \cdot 4 = 0$ olur.

Yutan elemanın tersinin olmadığına dikkat ediniz.



Çarpma İşleminin Toplama İşlemi Üzerine Dağılma Özelliği

Her a, b, c $\in \mathbb{R}$ için a · (b + c) = a · b + a · c ve (a + b) · c = a · c + b · c olur. Bu özelliğe çarpma işleminin toplama işlemi üzerine **soldan ve sağdan dağılma özelliği** denir.

$3 \cdot (4 + 5) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5$

$3 \cdot 9 = 12 + 15$

$27 = 27$ olur.

$(3 + 4) \cdot 5 = 3 \cdot 5 + 4 \cdot 5$

$7 \cdot 5 = 15 + 20$

$35 = 35$ olur.





Sayı doğrusu, gerçek sayıların ($\mathbb{R}$) geometrik gösterimidir.



$\frac{13}{4} = 3\frac{1}{4}$ ve

$-\frac{5}{2} = -2\frac{1}{2}$

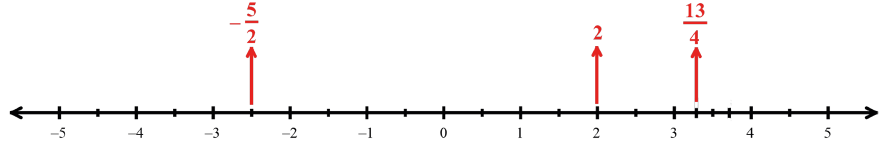
olduğuna dikkat ediniz.

Gerçek sayılar kümesinin her elemanına sayı doğrusunda bir nokta karşılık gelir.

ÖRNEK 4

$-\frac{5}{2}$, 2 ve $\frac{13}{4}$ gerçek sayılarını sayı doğrusunda gösteriniz.

ÇÖZÜM

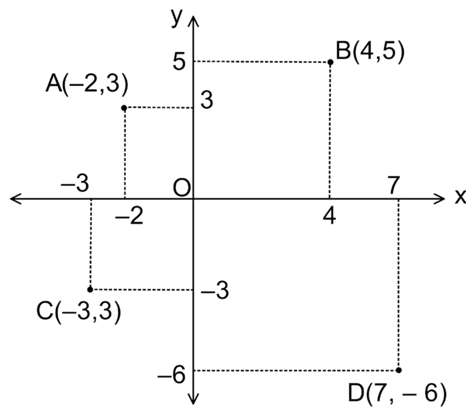


Gerçek sayılar kümesinin elemanlarıyla gösterilen her sıralı ikili, kartezyen koordinat sisteminde bir noktaya karşılık gelir. Koordinat sistemi birbirine dik iki gerçek sayı doğrusunun sıfır noktasında kesişmesi ile elde edilmiştir.

ÖRNEK 5

A(−2 , 3), B(4, 5), C(−3, −3), D(7, −6) noktalarını koordinat sisteminde gösteriniz.

ÇÖZÜM



Kartezyen koordinat sistemi $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nin geometrik gösterimidir. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ifadesi $\mathbb{R}^2$ ile de gösterilebilir.



ALIŞTIRMALAR

1. $\frac{6}{5}$ sayısının $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}^-, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}', \mathbb{Q}^+, \mathbb{Q}^-, \mathbb{R}, \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-$ sembolleri ile gösterilen sayı kümelerinin hangilerinin elemanı olduğunu bulunuz.

2. x ve y birer tam sayı olmak üzere

a) x^2+y^3

b) $\frac{x}{y}$

c) $-4 \cdot x^3 \cdot y^5$

ç) $\sqrt{x \cdot y} - 6$

d) x^y

ifadelerinden hangilerinin daima bir rasyonel sayı belirttiğini bulunuz.

3. m ve n birer pozitif tam sayı olmak üzere

$2m + 3n = 25$ eşitliğini sağlayan n sayısının alabileceği **en büyük** ve **en küçük** değerlerin toplamını bulunuz.

4. a, b, c birer negatif tam sayı olmak üzere

$a \cdot b = 24$

$b \cdot c = 30$

ise $a + b + c$ toplamının alabileceği **en büyük** ve **en küçük** değerleri bulunuz.

5. a, b ve c birer doğal sayı olmak üzere $a + b + c = 18$ ise $a \cdot b \cdot c$ ifadesinin alabileceği **en büyük** ve **en küçük** değerleri bulunuz.

6. a, b ve c birer tam sayı olmak üzere $a \cdot b \cdot c = 75$ ise $a + b + c$ ifadesinin alabileceği **en büyük** ve **en küçük** değerleri bulunuz.

7. x ve y sayıları birer gerçek sayı olmak üzere $x + y = 7$ ise $x \cdot y$ ifadesinin alabileceği **en büyük** değeri bulunuz.

8. a, b, c birbirinden farklı pozitif tam sayılar olmak üzere $a + 2b + 3c$ ifadesinin alabileceği **en küçük** değeri bulunuz.

9. a ve b tam sayılar olmak üzere $a \cdot b = 6$ denklemini sağlayan kaç tane (a , b) sıralı ikilisi olduğunu bulunuz.

10. a ve b birer tam sayı olmak üzere

$(a+3) \cdot \sqrt{2} + (b-5) \cdot \sqrt{7}$ ifadesinin bir rasyonel sayı belirtebilmesi için $a \cdot b$ değerini bulunuz.



9.3.2. Bölünebilme Kuralları

Günlük hayatın bir çok alanında bölme işlemi kullanılır. Alışveriş yapılırken alınan bir ürünün birim fiyatının hesaplanması, okulda bir etkinlik gerçekleştirilirken öğrencilerin eş gruplara ayrılması, bir yiyeceğin arkadaşlar arasında eşit şekilde paylaştırılması bölme işlemine verilebilecek örneklerden yalnızca birkaçıdır.

Neler Öğreneceksiniz?

- Tam sayılarda bölünebilme kurallarıyla ilgili problemler çözebilmeyi,
- Tam sayılarda EBOB ve EKOK ile ilgili uygulamalar yapabilmeyi,
- Gerçek hayatta periyodik olarak tekrar eden durumları içeren problemleri çözebilmeyi öğreneceksiniz.



Sembol ve Gösterimler

EBOB, EKOK

9.3.2.1. Tam Sayılarda Bölünebilme Kuralları

DÜŞÜNÜYORUM



Fatma Hanım, bahçesinden topladığı kayısılarla reçel yaptırıp satmak istiyor. Bunun için topladığı kayısıları fabrikaya götürüyor. Fabrikadan toplam 1440 kilogram kayısı reçeli alarak bu reçelleri yeterli sayıda, aynı miktarda ve en çok 10 kilogram reçel alan kavanozlara yerleştirecektir (Kavanozların alabileceği reçel miktarı kg cinsinden bir tam sayıdır.). Fatma Hanım'ın kullanacağı kavanozların kaçar kilogram olabileceğini bulabilir misiniz?

Düşünüp yorumlayınız.

Bölünebilme kurallarına geçmeden önce kalanlı bölme işlemi

A, B, C, K birer doğal sayı ve $B \neq 0$ olmak üzere

A sayısının B sayısına bölünmesiyle elde edilen bölüm C ve kalan K ise bu ifade

$$\begin{array}{r|l} A & B \\ \cline{2-2} - & C \\ \hline K & \end{array}$$

veya $A = B \cdot C + K$ şeklinde gösterilebilir.

Burada $0 \leq K < B$ olmalıdır. Ayrıca $C > K$ olmak üzere B ve C çarpanları yer değiştirebilir. $K = 0$ ise A sayısı B ile kalansız bölünür.

ÖRNEK 6

A doğal sayısının 12 ile bölümünden elde edilen bölüm 8 ve kalan 5 ise A doğal sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{array}{r|l} A & 12 \\ \cline{2-2} - & 8 \\ \hline 5 & \end{array}$$

$A = 12 \cdot 8 + 5$

$A = 96 + 5 = 101$ olur.

ÖRNEK 7

$$\begin{array}{r|l} A & 13 \\ \cline{2-2} - & 7 \\ \hline K & \end{array}$$

Yukarıdaki bölme işleminde A ve K birer doğal sayıdır. Buna göre A sayısının alabileceği en büyük ve en küçük değerler toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$0 \leq K < 13$ olduğundan K en küçük 0 ve en büyük 12 değerini alır. Buradan

$A = 13 \cdot 7 + 0 = 91$ en küçük değeridir.

$A = 13 \cdot 7 + 12 = 103$ en büyük değeridir.

A nın alabileceği en küçük ve en büyük değerler toplamı,

$91 + 103 = 194$ olur.

2 ile Bölünebilme

Bir sayının birler basamağı çift ise bu sayı 2 ile tam bölünür. Sayı tek sayı ise sayının 2 ye bölümünden kalan 1 dir. Örneğin

254**8** sayısının birler basamağındaki rakam, çift rakam olduğundan bu sayının 2 ile bölümünden kalan 0 dır.

389**7** sayısının birler basamağındaki rakam, tek rakam olduğundan bu sayının 2 ile bölümünden kalan 1 dir.



Bir A doğal sayısı, 0 dan farklı bir B doğal sayısına bölündüğünde kalan sıfır ise A sayısı B sayısına bölünebilir denir.

ÖRNEK 8

Dört basamaklı 234A doğal sayısı 2 ile bölünebildiğine göre A nın alabileceği değerler toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

234A sayısı A nın bir çift sayı olduğu durumda 2 ile bölünebileceğinden A rakamı 0, 2, 4, 6, 8 değerlerini alabilir. Buradan A nın alabileceği değerler toplamı,

$0 + 2 + 4 + 6 + 8 = 20$ olur.

ÖRNEK 9

Rakamları farklı beş basamaklı 4x89y sayısı, 2 ile tam bölündüğüne göre $x + y$ toplamının alacağı en büyük değeri bulunuz.

ÇÖZÜM

y sayısı çift olması gerektiğinden alabileceği en büyük değer 8 dir. Fakat 4x89y sayısının rakamları farklı verildiğinden y nin alabileceği en büyük değer 6 olur. x in alabileceği en büyük değer ise 7 olup $x + y$ nin en büyük değeri $6 + 7 = 13$ olur.



Sıfırdan farklı bir a tam sayısının herhangi bir tam sayı katı a ile tam bölünür.

3 ile Bölünebilme

Bir doğal sayının rakamları toplamı 3 ün katı ise bu sayı 3 ile tam bölünür.

ABC üç basamaklı doğal sayısı için

$$\begin{aligned} ABC &= 100 \cdot A + 10 \cdot B + C \\ &= (99+1) \cdot A + (9+1) \cdot B + C \\ &= 99 \cdot A + 9 \cdot B + A + B + C \\ &= \underbrace{3 \cdot (33 \cdot A + 3 \cdot B)}_{3\text{ün katıdır}} + A + B + C \end{aligned}$$

şeklinde çözümleme yapılır.

3 · (33A + 3B) sayısının 3 ile bölümünden kalan 0 dır. Dolayısıyla ABC doğal sayısının 3 ile bölümünden kalan A + B + C toplamının 3 ile bölümünden kalana eşittir. A + B + C toplamı 3 ün katı ise ABC sayısı 3 ile tam bölünür.

123 sayısının rakamları toplamı 1 + 2 + 3 = 6 olur. 6 nın 3 e bölümünden kalan 0 olduğundan 123 sayısı 3 ile tam bölünür.

15 827 sayısının rakamları toplamı 1 + 5 + 8 + 2 + 7 = 23 olup 23 ün 3 e bölümünden kalan 2 dir. Bu durumda15 827 sayısının da 3 e bölümünden kalan 2 olur.

ÖRNEK 10

13 basamaklı 2 223 456 668 881 doğal sayısının 3 ile bölümünden kalanı bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen 13 basamaklı sayının rakamları toplamı 2 + 2 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 6 + 6 + 8 + 8 + 8 + 1 = 61 olur.

61 sayısının 3 e bölümünden kalan 1 olduğundan 2 223 456 668 881 sayısının 3 ile bölümünden kalan 1 olur.

ÖRNEK 11

Rakamları farklı dört basamaklı 4m67 doğal sayısı, 3 ile bölünebildiğine göre m nin alabileceği değerleri bulunuz.

ÇÖZÜM

4 + m + 6 + 7 = 17 + m olup bu toplamın 3 ün katı olması gerekir. Buradan m sayısı 1, 4 ve 7 olabilir. Verilen sayının rakamları farklı olduğundan m sayısı yalnızca 1 olur.

4 ile Bölünebilme

Bir doğal sayının son iki basamağının oluşturduğu iki basamaklı sayı 4 ün bir katı ise bu sayı, 4 ile tam bölünür. Bu özelliğin doğruluğu ABCD dört basamaklı doğal sayısı için gösterilsin.

$$\begin{aligned} ABCD &= 1000 \cdot A + 100 \cdot B + 10 \cdot C + D \\ &= 4 \cdot 250 \cdot A + 4 \cdot 25 \cdot B + 10 \cdot C + D \\ &= \underbrace{4 \cdot (250 \cdot A + 25 \cdot B)}_{4\text{ ün katıdır}} + 10 \cdot C + D \end{aligned}$$

şeklinde çözümleme yapılırsa

4 · (250 · A + 25 · B) sayısının 4 ile bölümünden kalan 0 olur. Dolayısıyla son iki basamağının (10 · C + D=CD) 4 e bölümünden kalan ABCD sayısının 4 e bölümünden kalanına eşittir.

57**00** doğal sayısı için 0 ın 4 ile bölümünden kalan 0 dır.

897 5**28** doğal sayısı için 28 in 4 ile bölümünden kalan 0 dır.

23**79** doğal sayısı için 79 un 4 ile bölümünden kalan 3 tür.



ÖRNEK 12

Dört basamaklı 534b doğal sayısı, 4 ile bölünebildiğine göre b nin alabileceği değerler toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

4b iki basamaklı sayısının 4 ile bölünebilmesi için b nin alabileceği değerler 0, 4 ve 8 dir. Bu değerlerin toplamı $0 + 4 + 8 = 12$ olur.

ÖRNEK 13

Rakamları farklı dört basamaklı 75x6 doğal sayısının 4 ile bölünebilmesi için x in kaç farklı değer alabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

75x6 doğal sayının son iki basamağı olan x6 sayısının 4 e bölünebilmesi için x in alabileceği değerler 1, 3, 5, 7 ve 9 dur. Fakat verilen sayının rakamları farklı olduğundan 5 ve 7 olamaz. Dolayısıyla x sayısı 3 farklı değer alır.

5 ile Bölünebilme

Her doğal sayının 5 ile çarpımından elde edilen sayının birler basamağı 0 ya da 5 tir. Dolayısıyla birler basamağı 0 ya da 5 olan doğal sayılar 5 ile tam bölünür.

Birler basamağındaki sayının 5 ile bölümünden kalan, bu sayının 5 ile bölümünden kalana eşittir. Örneğin

34 56**1** sayısının birler basamağı 1 olduğundan 5 e bölümünden kalan 1 dir.

92 38**7** sayısının birler basamağı 7 olduğundan 5 e bölümünden kalan 2 dir.

ÖRNEK 14

Üç basamaklı 36a doğal sayısının 5 e bölümünden kalan 2 olduğuna göre a sayısının alabileceği değerler toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

36a sayısının 5 e bölümünden kalan 2 olduğuna göre a sayısı, 2 veya 7 olabilir. Böylece a sayısının alabileceği değerler toplamı $2 + 7 = 9$ olur.

ÖRNEK 15

Dört basamaklı 7A8B sayısı hem 3 e hem de 5 e bölünebildiğine göre A sayısının alabileceği değerler toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

7A8B sayısı 5 ile bölündüğü için B sayısı 0 veya 5 olabilir.

$B = 0$ için verilen sayı 7A80 olur ve $7 + A + 8 + 0 = 15 + A$ olur. Sayının 3 e bölünebilmesi için A nın alabileği değerler 0 , 3 , 6 ve 9 dur.

$B = 5$ için verilen sayı 7A85 olup $7 + A + 8 + 5 = 20 + A$ olur. Sayının 3 e bölünebilmesi için A nın alacağı değerler 1 , 4 ve 7 dir.

A nın alacağı değerler toplamı ise $0 + 3 + 6 + 9 + 1 + 4 + 7 = 30$ olur.



Birden fazla bölünebilme kuralının uygulanması gereken sorularda önce varsa birler basamağı ile ilgili kurala, ardından son iki basamakla ilgili kurala, ardından son üç basamakla ilgili kurala daha sonra da tüm basamaklarla ilgili kurala bakılır.



8 ile Bölünebilme

Sayının son üç basamağının oluşturduğu üç basamaklı sayı 8 in katı ise sayı, 8 ile tam bölünür. Beş basamaklı bir ABCDE doğal sayısı için

$ABCDE = 10000A + 1000B + 100C + 10D + E$

$= 1000 \cdot (10A + B) + 100C + 10D + E$ şeklinde çözümleme yapılır.

$1000 \cdot (10A + B)$ sayısı 8 ile tam bölünür. Dolayısıyla ABCDE sayısının 8 ile bölümünden kalan $100C + 10D + E =$ CDE nin 8 ile bölümünden kalana eşittir. Örneğin

2**480** sayısının 8 ile bölümünden kalan, 480 sayısının 8 ile bölümünden kalana eşittir. Dolayısıyla 2480 sayısının 8 ile bölümünden kalan 0 dır.

12 **582** sayısının 8 ile bölümünden kalan, 582 sayısının 8 ile bölümünden kalana eşittir. Dolayısıyla 12 582 sayısının 8 ile bölümünden kalan 6 dır.

ÖRNEK 16

Rakamları birbirinden farklı altı basamaklı 3458y6 doğal sayısı, 8 ile bölünebildiğine göre y sayısının alabileceği değerler toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

3458y6 sayının 8 e tam bölünebilmesi için 8y6 sayısının 8 e bölünebilmesi gerekir. 8y6 sayısı çözümlenirse $8y6 = 800 + 10 \cdot y + 6$ olur. 800 sayısının 8 ile bölümünden kalan 0 olacağından $10 \cdot y + 6$ sayısının 8 e bölünebilmesi için y sayısı 1, 5 veya 9 değerlerini alabilir.

345 8y6 sayısı rakamları farklı olarak verildiğinden y sayısı 1 veya 9 olup alabileceği değerler toplamı da $1 + 9 = 10$ olur.

9 ile Bölünebilme

Rakamları toplamı 9 un katı olan doğal sayılar, 9 ile tam bölünür. 9 a bölümünden kalan, sayının rakamları toplamının 9 a bölümünden kalana eşittir.

3456 sayısının rakamları toplamı $3 + 4 + 5 + 6 = 18$ olduğundan bu sayının 9 a bölümünden kalan 0 dır.

53 279 sayısının rakamları toplamı $5 + 3 + 2 + 7 + 9 = 26$ olur. 26 sayısının 9 ile bölümünden kalan 8 olduğundan 53 279 sayının 9 a bölümünden kalan 8 dir.

ÖRNEK 17

2 753 469 815 sayısının 9 ile bölümünden kalanı bulunuz.

ÇÖZÜM

2 753 469 815 sayısının rakamları toplamı,

$2 + 7 + 5 + 3 + 4 + 6 + 9 + 8 + 1 + 5 = 50$ olup bulunan 50 sayısının rakamları toplamı $5 + 0 = 5$ olur. Böylece verilen sayının 9 a bölümünden kalan 5 tir.



ÖRNEK 18

21 basamaklı 571571571...571 doğal sayısının 9 ile bölümünden kalanı bulunuz.

ÇÖZÜM

$5+7+1=13$ olup verilen sayının içinde $21 \div 3 = 7$ kez 571 sayısı tekrar etmektedir. Dolayısıyla sayının rakamları toplamı, $13 \cdot 7 = 91$ olur. 91 sayısının da rakamları toplanırsa $9+1=10$ ve 10 sayısının rakamları toplamı $1+0=1$ olup verilen sayının 9 ile bölümünden kalan 1 dir.

10 ile Bölünebilme

Bir doğal sayının birler basamağındaki rakam, 0 ise bu sayı 10 a tam bölünür. Aynı zamanda bir doğal sayının birler basamağındaki rakam sayının 10 a bölümünden kalana eşittir. Örneğin

25 47**8** sayısının birler basamağındaki rakam, 8 olduğundan bu sayının 10 a bölümünden kalan 8 dir.

123 654 78**0** sayısının birler basamağındaki rakam, 0 olduğundan sayının 10 a bölümünden kalan 0 dır.

ÖRNEK 19

Beş basamaklı 41m2n sayısı,10 a bölündüğünde 6 kalanını veren ve 3 ile bölünebilen bir doğal sayıdır. Buna göre $m+n$ toplamının alabileceği **en büyük** değeri bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen sayının 10 a bölümünden kalan 6 olduğundan n sayısı 6 dır. Böylece sayı 41m26 olur. Bu sayının 3 e bölünebilmesi için $4+1+m+2+6=13+m$ toplamı 3 ün katı olmalıdır.

Buradan m nin alacağı değerler 2 , 5 ve 8 olup $m+n$ nin en büyük değeri $n=6$ ve $m=8$ için $6+8=14$ olur.

11 ile Bölünebilme

Bir doğal sayının 11 ile bölümünden elde edilen kalanı bulmak için dört basamaklı bir ABCD doğal sayısı

$$\begin{aligned} ABCD &= 1000 \cdot A + 100 \cdot B + 10 \cdot C + D \\ &= 1001 \cdot A - A + 99 \cdot B + B + 11 \cdot C - C + D \\ &= 11 \cdot 91 \cdot A + 11 \cdot 9 \cdot B + 11 \cdot C - A + B - C + D \\ &= \underbrace{11 \cdot (91 \cdot A + 9 \cdot B + C)}_{11 \text{ in katı}} - A + B - C + D \end{aligned}$$ şeklinde çözümlenir.

$-A+B-C+D$ sayısının 11 e bölümünden kalan, ABCD sayısının11 e bölümünden kalana eşittir. Kısaca sayının rakamları sağdan sola doğru $+, -, +, -, \ldots$ ile işaretlendirilerek toplanır. Bu toplamın 11 ile bölümünden kalan, o sayının 11 ile bölümünden kalana eşit olur.



ÖRNEK 20

382 sayısının 11 ile bölümünden kalanı bulunuz.

ÇÖZÜM

3 8 2
\+ − +

Sayı yukarıdaki gibi sağdan sola doğru işaretlenip elde edilen sayılar toplanırsa +3−8+2 = −3 tür. Buradan kalan −3 olamayacağından elde edilen sayıya 11 eklenir. Kalan −3+11 = 8 dir.

ÖRNEK 21

Beş basamaklı 63A27 sayısı 11 ile bölündüğüne göre A sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

6 3 A 2 7
\+ − + − +

Sayı yukarıdaki gibi sağdan sola doğru işaretlenip elde edilen sayılar toplanırsa

$+6-3+A-2+7=8+A$ ifadesi elde edilir. Bu ifadenin 11 e bölünmesi için A nın 3 olması gerekir.

ÖRNEK 22

25 basamaklı 1234512345...12345 sayısının 11 ile bölümünden kalanı bulunuz.

ÇÖZÜM

1 2 3 4 5 ... 1 2 3 4 5 1 2 3 4 5
\+ − + − +   − + − + − + − + − +

Verilen sayı yukarıdaki gibi sağdan sola doğru işaretlenip elde edilen sağdan ilk beş sayı ile sonraki beş sayının toplamının 0 olduğu görülür. Her 10 basamakta bu toplam 0 olacağından sağdan ilk yirmi sayının da toplamı da 0 olur. Kalan son beş sayı toplanırsa $+1-2+3-4+5=3$ bulunur. Bu durumda sayının11 ile bölümünden kalan 3 olur.



1 den başka ortak pozitif tam sayı böleni olmayan sayılara **aralarında asal** sayılar denir. Örneğin
6 ile 11,
25 ile 33,
1 ile 2017,
56 ile 57,
5 ile 8 sayıları aralarında asal sayılardır.

Aralarında Asal Sayıların Çarpımı ile Oluşan Sayıya Bölünebilme

Aralarında asal çarpanların her birine bölünebilen bir doğal sayı, bu sayıların çarpımına da tam bölünür. Bu kuralla ilgili aşağıda verilen örnekleri inceleyiniz.

- $6 = 2 \cdot 3$ (2 ile 3 aralarında asaldır.)
  2 ve 3 ile tam bölünen sayılar 6 ile tam bölünür.
- $12 = 3 \cdot 4$ (3 ile 4 aralarında asaldır.)
  3 ve 4 ile tam bölünen sayılar 12 ile tam bölünür.
- $18 = 2 \cdot 9$ (2 ile 9 aralarında asaldır.)
  2 ve 9 ile tam bölünen sayılar 18 ile tam bölünür.
- $30 = 3 \cdot 10$ (3 ile 10 aralarında asaldır.)
  3 ve 10 ile tam bölünen sayılar 30 ile tam bölünür.



ÖRNEK 23

1296 sayısının 6 ya tam bölünüp bölünmediğini inceleyiniz.

ÇÖZÜM

6 sayısını $2 \cdot 3$ şeklinde aralarında asal çarpanlara ayırıp 6 sayısının 2 ve 3 ile bölümünden kalanlarına bakılır.

1296 sayısındaki birler basamağı (6) çift olduğundan sayı 2 ile tam bölünür.

1296 sayısının rakamlarının toplamı $1 + 2 + 9 + 6 = 18$ olduğundan sayı 3 ün katıdır ve 3 ile tam bölünür.

Böylece 1296 sayısı, 2 ve 3 ile bölündüğünden 6 ile de bölünür.



Ardışık iki pozitif tam sayı aralarında asaldır. 1 ile tüm pozitif tam sayılar aralarında asaldır.

ÖRNEK 24

Beş basamaklı 58A1B sayısı 36 ile tam bölündüğüne göre A + B toplamının **en küçük** değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

36 sayısı $4 \cdot 9$ şeklinde aralarında asal çarpanlarına ayrılabildiğinden 58A1B sayısı 4 ve 9 ile tam bölünmelidir.

Önce 4 ile bölünebilme kuralına bakılır. Sayının son iki basamağı olan 1B sayısı 4 ün katı olmalıdır. Böylece B nin alabileceği en küçük değer 2 dir.

B = 2 için beş basamaklı sayı 58A12 olur. Bu sayının 9 a bölünebilmesi için

$5 + 8 + A + 1 + 2 = 16 + A$ sayısı 9 un katı olmalıdır. Dolayısıyla A sayısı en az 2 değerini alır. A + B toplamı en az $2 + 2 = 4$ olur.

ÖRNEK 25

Dört basamaklı 4a7b sayısının 15 ile bölümünden kalan 2 dir. Buna göre a sayısının kaç farklı değer alabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

15 sayısı $3 \cdot 5$ şeklinde aralarında asal çarpanlarına ayrılabildiğinden 4a7b sayısının 3 ve 5 ile bölümünden kalan 2 olur.

Önce 5 ile bölünebilme kuralına bakılır. Sayının son basamağı olan b sayısının 5 ile bölümünden kalan 2 olacaktır. Buradan

b nin alabileceği değerler, 2 veya 7 olabilir.

b = 2 için dört basamaklı sayı 4a72 olur. Bu sayının 3 ile bölümünden kalanın 2 olması için

$4 + a + 7 + 2 = 13 + a$ olup $13 + a = 3k + 2$ $(k \in Z)$ şeklinde bir sayı olması gerekir. Dolayısıyla a sayısı 1, 4 veya 7 olabilir.

b = 7 için dört basamaklı sayı 4a77 olur. Sayının 3 ile bölümünden kalanın 2 olması için

$4 + a + 7 + 7 = 18 + a$ olup $18 + a = 3k + 2$ $(k \in Z)$ şeklinde bir sayı olması gerektiğinden a sayısı 2, 5 veya 8 olabilir.

Sonuç olarak a sayısı 1, 2, 4, 5, 7, 8 olmak üzere 6 farklı değer alır.



ÖRNEK 26

Dört basamaklı 6x8y sayısının 45 ile bölümünden kalan 23 tür. Buna göre x sayısının alabileceği farklı değerler toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

45 sayısı $5 \cdot 9$ şeklinde aralarında asal çarpanlarına ayrılabilir.

Kalan sayı (23), 5 ve 9 dan büyük olduğundan 23 sayısı 5 ve 9 a ayrı ayrı bölünerek kalanlar bulunur. 23 ün 5 ile bölümünden kalan 3 ve 9 ile bölümünden kalan 5 olur.

Önce 5 ile bölünebilme kuralına bakılır. Sayının son basamağı olan y sayısının 5 ile bölümünden kalan 3 olacaktır. Buradan, y nin alabileceği değerler, 3 veya 8 olabilir.

$y = 3$ için sayı 6x83 olur. Bu sayının 9 ile bölümünden kalanın 5 olması için

$6 + x + 8 + 3 = 17 + x$ olup $17 + x = 9k + 5$ $(k \in Z)$ şeklinde bir sayı olması gerekir. Dolayısıyla x sayısı 6 olur.

$y = 8$ için sayı 6x88 olur. Bu sayının 9 ile bölümünden kalanın 5 olması için

$6 + x + 8 + 8 = 22 + x$ olup $22 + x = 9k + 5$ $(k \in Z)$ şeklinde bir sayı olması gerektiğinden x sayısı 1 olur.

Sonuç olarak x sayısının alabileceği farklı değerler toplamı $6 + 1 = 7$ olur.

ALIŞTIRMALAR

1.

```
  A | 13
    |----
    | 7
 _  |
----
  x
```

Yandaki bölme işleminde x doğal sayısının alabileceği **en büyük** değer için A doğal sayısının değerini bulunuz.

2.

```
  A | B          B | C
    |---           |---
 _  | 4         _  | 5
----            ----
  7               1
```

Yukarıdaki bölme işlemlerine göre A nın C türünden yazılışını bulunuz.

3. Altı basamaklı 981 984 sayısının 981 ile bölümünden elde edilen bölüm ile kalanın toplamını bulunuz.



4. Aşağıdaki sayı ikililerinden hangisi aralarında asal **değildir**?

A) (12,95) B) (11,145) C) (1,24) D) (3,112) E) (13,1001)

5. Dört basamaklı 6m35 sayısının 3 ile bölümünden kalan 1 ise m nin alabileceği değerler toplamını bulunuz.

6. Rakamları farklı beş basamaklı 378A2 doğal sayısı 4 ün bir tam katı olduğuna göre A nın alabileceği değerler toplamını bulunuz.

7. Bir fabrikanın işletme bölümünde çalışan Ayla Hanım, satılan ürün sayısı ve toplam satış fiyatlarını bilgisayara girerken faturada, birim satış fiyatı ₺11 olan bir ürünün toplam ₺1743□2 şeklinde olduğunu ve tutarın onlar basamağındaki sayısının silindiğini görmüştür. Buna göre bu fabrikanın bu üründen toplam kaç adet sattığını bulunuz.

8. Beş basamaklı 41A7B doğal sayısının 36 ile bölümünden kalan 15 olduğuna göre A sayısının kaç farklı değer alabileceğini bulunuz.

9. X doğal sayısının 13 ile bölümünden kalan 11 ve Y doğal sayısının 13 ile bölümünden kalan 7 ise

a) $X + Y$ nin 13 ile bölümünden kalanı bulunuz.

b) $X \cdot Y$ nin 13 ile bölümünden kalanı bulunuz.

10. Dört basamaklı 6m2n sayısının 4 e bölümünden kalan 2 ve 9 a bölümünden kalan 1 ise $m + n$ toplamının kaç farklı değer alabileceğini bulunuz.

11. M doğal sayısının 6 ile bölümünden kalan 4 olduğuna göre aşağıdaki ifadelerin 6 ile bölümünden kalanı bulunuz.

a) $3M + 3$
b) $2M - 4$
c) $4M + 2$
ç) $M + 6$



Birbirinden farklı A ve B pozitif tam sayılarının C pozitif tam sayısına bölümünden kalanlar sırasıyla k_1 ve k_2 olmak üzere

- $A + B$ toplamının C ile bölümünden kalan $k_1 + k_2$ nin C ile bölümünden kalan olur.
- $A \cdot B$ çarpımının C ile bölümünden kalan $k_1 \cdot k_2$ nin C ile bölümünden kalan olur.



9.3.2.2. Tam Sayılarda EBOB ve EKOK

DÜŞÜNÜYORUM



Tuğba ve babasının bahçeden topladığı iki farklı türdeki mandalinanın ağırlıkları 180 kg ve 260 kg olur. Babası Tuğba'dan farklı türdeki mandalinaları birbirine karıştırmadan sandıklara eşit miktarlarda doldurup akrabalarına dağıtmasını istiyor. Bu iş için Tuğba'ya en az kaç sandık gerekmektedir? Düşünüp yorumlayınız.

ÖRNEK 27

36 ve 60 sayılarını tam bölen pozitif tam sayılardan en büyüğünü bulunuz.

ÇÖZÜM

36 sayısının pozitif tam sayı bölenleri,
①,②,③,④,⑥,9,⑫,18,36 dır.

60 sayısının pozitif tam sayı bölenleri,
①,②,③,④,5,⑥,10,⑫,15,20,30,60 tır.

1, 2, 3, 4, 6 ve 12 sayıları her iki sayının da pozitif ortak bölenidir.Bu ortak bölenlerin de en büyüğü ⑫ dir.

a ve b sayılarının EBOB u, EBOB (a,b) veya $(a,b)_{EBOB}$ şeklinde gösterilir.

En Büyük Ortak Bölen (EBOB)

En az biri sıfırdan farklı iki veya daha fazla tam sayının pozitif ortak bölenlerinin en büyüğüne bu sayıların **en büyük ortak böleni** denir. Kısaca "EBOB" ile ifade edilir.

ÖRNEK 28

30 ve 45 sayılarının ikisinin de katı olan pozitif tam sayılardan en küçüğünü bulunuz.

ÇÖZÜM

30 sayısının pozitif tam katları, 30,60,(90),120,150,(180),210,240,(270),... olur.

45 sayısının pozitif tam katları, 45,(90),135,(180),225,(270),...olur.

Görüldüğü gibi (90),(180),(270),... sayıları her iki sayının da ortak katlarıdır. Bu ortak katların en küçüğü (90) sayısıdır.

a ve b sayılarının EKOK u, EKOK (a,b) veya $(a,b)_{EKOK}$ şeklinde gösterilir.

En Küçük Ortak Kat (EKOK)

En az biri sıfırdan farklı iki veya daha fazla tam sayının pozitif ortak katlarının en küçüğüne bu sayıların **en küçük ortak katı** denir. Kısaca "EKOK" ile ifade edilir.

EBOB ve EKOK un Bazı Özellikleri

a) a ve b sayma sayılarının çarpımı bu sayıların EBOB u ile EKOK unun çarpımına eşittir.
Bu özellik
$a \cdot b = \text{EBOB}(a, b) \cdot \text{EKOK}(a, b)$ olarak ifade edilir.
Örneğin 15 ve 20 sayılarının EBOB u 5, EKOK u ise 60 olup
$15 \cdot 20 = 5 \cdot 60$ olduğu görülür.



b) a ve b aralarında asal iki pozitif tam sayı olmak üzere

- EBOB (a, b) = 1
- EKOK (a, b) = a · b olur.

Örneğin 7 ve 12 sayılarının EBOB u 1, EKOK u 7 · 12 = 84 olur.

c) a ve b pozitif tam sayılarından biri diğerinin tam katı ise EBOB bu sayılardan küçük olana, EKOK ise büyük olana eşittir. Örneğin

- 7 ile 21 sayılarının EBOB'u 7, EKOK'u 21 dir.
- a ile 3·a sayılarının EBOB'u a, EKOK'u 3·a dır (a bir pozitif tam sayıdır.).
- (b + 4) ile 6 · (b + 4) sayılarının EBOB'u (b + 4), EKOK'u 6 · (b + 4) tür (b bir pozitif tam sayıdır.).
- 2^4 ile 2^7 sayılarının EBOB u 2^4, EKOK u 2^7 dir.
- $3^2 \cdot 5^8$ ile $3^4 \cdot 5^5$ sayılarının EBOB u $3^2 \cdot 5^5$, EKOK u $3^4 \cdot 5^8$ dir.
- x ve y asal sayılar olmak üzere $x^3 \cdot y^7$ ile $x^6 \cdot y^2$ sayılarının EBOB u $x^3 \cdot y^2$, EKOK u $x^6 \cdot y^7$ olur.

ÖRNEK 29

$A = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^4$ ve $B = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7$ şeklinde asal çarpanlarına ayrılmış A ve B sayılarının EBOB ve EKOK unu bulunuz.

ÇÖZÜM

$A = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^4$ ve $B = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7$ sayıları için

ortak olan asal çarpanlardan üsleri en küçük olanlar ile üsleri eşit olanların çarpımı bu sayıların EBOB udur. Buradan,

$EBOB(A, B) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3$ olur.

A ve B yi oluşturan asal çarpanlardan üssü büyük veya eşit olan diğerinin tam katı olacağından

$EKOK(A, B) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^4 \cdot 7$ olur.

ÖRNEK 30

40, 60 ve 90 sayılarının en büyük ortak bölenini ve en küçük ortak katını bulunuz.

ÇÖZÜM

40, 60 ve 90 sayıları asal çarpanlarına ayrılırsa

$40 = 2^3 \cdot 5$

$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ olur.

Buradan EBOB (40, 60, 90) = 2 · 5 = 10 ve EKOK (40, 60, 90) = $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$ olur.



ÖRNEK 31

Bir fabrikanın depo bölümünde çalışan Ramazan Usta, üretimi yapılan 208 kg, 256 kg, 328 kg, 600 kg ve 296 kg lık 5 farklı plastik ham maddeyi eşit büyüklükteki kolilere koymak istemektedir. Bu işlem için **en az** kaç kolinin kullanılması gerektiğini bir tablolama programı olan Excel'i kullanarak hesaplayınız.

ÇÖZÜM

En az sayıdaki koli sayısını bulmak için verilen sayıların EBOB u bulunmalıdır. Bilgisayardaki Excel programı açıldıktan sonra 208, 256, 328, 600 ve 296 sayılarını aşağıdaki gibi tablolara yazınız.

Yeni Microsoft Office Excel Çalışma Sayfası - Microsoft Excel

Giriş Ekle Sayfa Düzeni Formüller Veri Gözden Geçir Görünüm Eklentiler

F5

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	208	256	328	600	296					

C1 kutusuna tıkladıktan sonra f_x tuşuna tıklayınız. Aşağıdaki gibi açılan pencerede "OBEB" sekmesini seçerek "Tamam" butonuna tıklayınız.

İşlev Ekle

İşlev ara: Ne yapmak istediğinizin kısa bir açıklamasını yazın ve Git'i tıklatın — Git

Kategori seçin: En Son Kullanılan

İşlev seçin:
OBEB
BÖLÜM
TOPLA
ORTALAMA
EĞER
KÖPRÜ
BAĞ_DEĞ_SAY

OBEB(sayı1;sayı2;...)
En büyük ortak böleni döndürür.

Bu işlev hakkında yardım — Tamam — İptal

Yeni açılan pencerede Sayı1 bölümüne A1, Sayı2 bölümüne B1, Sayı3 bölümüne C1, Sayı4 bölümüne D1, Sayı5 bölümüne E1 yazarak "Tamam" tuşuna tıklayınız.

Fonksiyon Bağımsız Değişkenleri

OBEB

Sayı1	A1	= 208
Sayı2	B1	= 256
Sayı3	C1	= 328
Sayı4	D1	= 600
Sayı5	E1	= 296
		= 8

En büyük ortak böleni döndürür.

Sayı5: sayı1;sayı2;... En az 1 en çok 255 değer.

Formül sonucu = 8

Fonksiyon yardımı — Tamam — İptal



F1 kutusunda verilen sayıların EBOB unun 8 olduğunu göreceksiniz.

Yapıştır | Kes | Kopyala | Biçim Boyacısı | Pano | Calibri | 11 | Yazı Tipi | Metni Kaydır | Birleştir ve Ortala | Hizalama

F1 | =OBEB(A1;B1;C1;D1;E1)

	A	B	C	D	E	F	G
1	208	256	328	600	296	8	
2							

Buradan kutu sayısı, $\dfrac{208+256+328+600+296}{8}=\dfrac{1688}{8}=211$ olarak bulunur.

Benzer işlemleri yaparak EKOK u da bulunuz.

ÖRNEK 32

a, b, c, d asal sayılar olmak üzere $K=a^4\cdot b^3\cdot c\cdot d^2$ ve $L=a^7\cdot b^5\cdot c^4$ şeklinde asal çarpanlarına ayrılmış K ve L sayılarının EKOK'unun EBOB' una oranını bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{\text{EKOK}(K,L)}{\text{EBOB}(K,L)}=\frac{\text{EKOK}(a^4\cdot b^3\cdot c\cdot d^2,a^7\cdot b^5\cdot c^4)}{\text{EBOB}(a^4\cdot b^3\cdot c\cdot d^2,a^7\cdot b^5\cdot c^4)}$$

$$=\frac{a^7\cdot b^5\cdot c^4\cdot d^2}{a^4\cdot b^3\cdot c}$$

$=a^3\cdot b^2\cdot c^3\cdot d^2$ olur.

ÖRNEK 33

x bir pozitif tam sayı olmak üzere

EBOB (x, 20) = 4 ve EKOK (x, 20) = 40 ise x sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

EBOB ve EKOK değerlerinin çarpımı sayıların çarpımına eşit olduğundan

$x\cdot 20=4\cdot 40$ olur.

$20\cdot x=160$

$x=8$ olur.

ÖRNEK 34

a,b sayıları aralarında asal pozitif tam sayılardır.

$a+\dfrac{32}{b}=19$ ve EKOK (a, b) = 120 olduğuna göre a sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

a ve b sayıları aralarında asal olduğundan EKOK (a, b) = $a\cdot b=120$ olur.

$a+\dfrac{32}{b}=19$ ifadesinin paydaları eşitlenirse

$\dfrac{a\cdot b+32}{b}=\dfrac{120+32}{b}=\dfrac{152}{b}=19$ olup $b=8$ olur.

$a\cdot b=120$ olduğundan $a\cdot 8=120$ ve $a=15$ olur.



A ve B aralarında asal sayılar ise
- EBOB(A, B) = 1
- EKOK(A, B) = $A\cdot B$ olur.

ÖRNEK 35

m ve n birbirinden farklı pozitif tam sayılardır.

EBOB (m, n) = 45 ise m + n toplamının **en küçük** değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

EBOB (m, n) = 45 olduğundan m ve n sayıları 45 in tam katları olmalıdır.

Sayılar birbirinden farklı olduğu için en az 45 ve 90 sayıları seçilir. Bu durumda

m + n toplamı en az 45 + 90 = 135 olur.

ÖRNEK 36

K ve L pozitif tam sayıları için

EBOB (K, L) = 8 ve EKOK (K, L) = 96 ise K + L toplamının alabileceği **en küçük** ve **en büyük** değerleri bulunuz.

ÇÖZÜM

K ve L sayılarının EBOB u 8 olduğundan bu sayılar 8 in tam katı olmalıdır. Buradan $K = 8 \cdot x$ ve $L = 8 \cdot y$ $(x, y \in \mathbb{Z}^+)$ şeklinde yazılabilir ve x ile y aralarında asal olmalıdır.

$8 \cdot x$	$8 \cdot y$	8
x	y	x
1	y	y
	1	

Böylece EKOK (K, L) = EKOK $(8 \cdot x, 8 \cdot y) = 8 \cdot x \cdot y = 96$ olur.

$x \cdot y = 12$ olacağından x ve y sayıları birbirine en yakın seçilirse

$x = 3$ ve $y = 4$ için $K = 8 \cdot 3 = 24$ ve $L = 8 \cdot 4 = 32$,

K + L nin en küçük değeri de 24 + 32 = 56 olur.

x ve y sayıları birbirine en uzak seçilirse

$x = 1$ ve $y = 12$ için $K = 8 \cdot 1 = 8$ ve $L = 8 \cdot 12 = 96$,

K + L nin en büyük değeri de 8 + 96 = 104 olur.

ÖRNEK 37

x, y ve z birbirinden farklı pozitif tam sayılardır.

EKOK (x, y, z) = 162 ise x + y + z toplamının en büyük değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

x, y ve z sayılarının en küçük ortak katı 162 olduğundan sayılar 162 yi tam bölen sayılar olmalıdır. Toplamlarının en büyük olması için ise bu sayılara 162 sayısını bölen en büyük 162, 81 ve 54 değerleri verilirse

x + y + z toplamı da 162 + 81 + 54 = 297 olur.



ÖRNEK 38

Bir okulun öğrencileri beşerli , altışarlı ve sekizerli sıralandığında her defasında 3 öğrenci artmaktadır. Buna göre okulun öğrenci sayısının **en az** kaç olabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Okuldaki öğrenci sayısı 5, 6 ve 8 in katı olan bir sayının 3 fazlasıdır. Okuldaki öğrenci sayısının en az olması için 5, 6 ve 8 in EKOK unun 3 fazlası olmalıdır.

5	6	8	2
5	3	4	2
5	3	2	2
5	3	1	3
5	1		5
1			

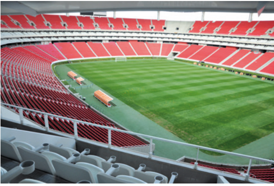
$EKOK(5, 6, 8) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$

$= 120$ olur.

Buradan okuldaki öğrenci sayısı en az

$120 + 3 = 123$ olur.

ÖRNEK 39



Bir firma boyutları 72 m ve 120 m olan dikdörtgen şeklindeki bir futbol sahasını yapay çim ile kaplayacaktır. Bu iş için eş ölçülü olacak şekilde **en az** kaç adet kare şeklinde çim parçası kullanılacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

Eş kare şeklindeki bu yapay çimlerin boyutu, 72 ve 120 sayılarını tam bölen bir sayı olmalıdır. En az sayıdaki yapay çim için ise en büyük ortak bölen bulunur. Daha sonra da sahanın alanını bir parça çimin alanına bölerek kaç adet çim parçası gerektiği bulunur.

72	120	2*
36	60	2*
18	30	2*
9	15	3*
3	5	3
1	5	5
1	1	

$EBOB (72, 120) = 2^3 \cdot 3^1 = 24$ m olarak bulunur.

24 m yapay çimin bir kenar uzunluğudur.

Tüm alan bir çim parçasının alanına bölünürse

$\frac{72 \cdot 120}{24 \cdot 24} = 3 \cdot 5 = 15$ adet yapay çim gerekir.

ÖRNEK 40

Bir fabrikada bulunan üç farklı makine, bir ürünü sırasıyla 45, 50 ve 60 saniyede üretmektedir. Bu makineler ilk kez 06.30 da birlikte çalışmaya başladığına göre beşinci kez üçü birlikte ürün verdiğinde saatin kaç olacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

Makinelerin tekrar aynı anda üretim yapması için geçen süre 45, 50 ve 60 sayılarının katı olmalıdır. İlk kez için 45, 50 ve 60 sayılarının en küçük ortak katı bulunmalıdır.

45	50	60	2
45	25	30	2
45	25	15	3
15	25	5	3
5	25	5	5
1	5	1	5
1	1	1	

$EKOK (45, 50, 60) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 900$ saniye

900 saniye = 15 dakikadır.

Birinci kez için geçen süre 15 dakikadır.

Beşinci kez için

$15 \cdot 5 = 75$ dakikalık (1 saat 15 dakika) süre geçmelidir. O hâlde saat 06.30 dan 1saat 15 dakika sonra saat 07.45 olur.



ÖRNEK 41



Onur Sitesi'nin yöneticiliğini yapan Çiğdem Hanım sitenin etrafına aydınlatma direkleri diktirmek istiyor.

- Site, boyutları 24 m ve 27 m olan dikdörtgen şeklindeki bir alana kurulmuştur.
- Her köşeye bir direk gelecek şekilde sitenin çevresine eşit aralıklarla direkler dikilecektir.
- Bir aydınlatma direğinin maliyeti ₺130 dır.

Çiğdem Hanım'ın bu çalışmayı yapacak olan firmaya **en az** kaç Türk lirası ödemesi gerektiğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Eşit aralıklarla direk dikileceğinden direkler arası mesafenin 24 ve 27 sayılarını tam bölen bir sayı olması gerekir. En az sayıda direk için en büyük ortak bölen bulunmalıdır.

24	27	2
12	27	2
6	27	2
3	27	3
1	9	3
	3	3
	1	

EBOB (24, 27) = 3 olduğundan sitenin çevresine 3 metre aralıklarla direk dikilmesi gerekir.
Direk sayısı, sitenin çevresinin EBOB a bölünmesi ile bulunur.
Sitenin çevresi $24 + 24 + 27 + 27 = 102$ m olur. Böylece $102 \div 3 = 34$ adet direk gerekir.
Çiğdem Hanım'ın firmaya ödeyeceği toplam tutar en az $34 \cdot 130 = 4420$ Türk lirası olmalıdır.

ALIŞTIRMALAR

1. 8 e , 12 ye ve 20 ye bölünebilen 600 den küçük, **en büyük** pozitif tam sayıyı bulunuz.

2. 156 ve 442 sayılarını tam bölen **en büyük** doğal sayının rakamları toplamını bulunuz.

3. Bir çiçekçi güllerini üçerli, beşerli ve sekizerli saydığında her defasında 2 gül artmaktadır. Gül sayısı 200 den fazla olduğuna göre bu çiçekçinin **en az** kaç gülünün olduğunu bulunuz.

4. a, b, c sayıları birer doğal sayıdır.

$K = 3a + 1 = 4b + 2 = 5c + 3$

olduğuna göre K nin **en küçük** değerini bulunuz.



5. Boyları 120 cm, 135 cm ve 180 cm olan üç demir çubuk eşit büyüklükte olmak üzere her biri ayrı ayrı parçalara ayrılacaktır. Bu iş için **en az** kaç kesim yapılması gerektiğini bulunuz.

6. Boyutları 4 cm, 5 cm ve 6 cm olan dikdörtgenler prizmasından **en az** kaç tanesi yan yana ve üst üste getirilirse bir küp oluşacağını bulunuz.

7. A, B, C firmaları Yozgat İstanbul arasında sırasıyla 3 günde, 4 günde ve 5 günde bir sefer düzenliyor. Bu firmaların birlikte ilk seferlerine başladıktan kaç gün sonra 2. kez birlikte tekrar sefere çıkacaklarını bulunuz.

8. Doğum gününü kutlayan Senem, boyutları 24 cm, 30 cm ve 36 cm olan dikdörtgenler prizması şeklindeki doğum günü pastasını eşit büyüklükte, küp biçiminde ve hiç artmamak şartıyla **en az** kaç arkadaşına paylaştırabileceğini bulunuz.

9.

A	B	C	2
K	L	M	2
K	N	P	3
R	S	T	5
U	S	1	7
1	1	1	

Yukarıda verilen asal çarpanlara ayırma algoritmasında A + B + C toplamını bulunuz.

10. Kenar uzunlukları 52 m ve 64 m olan bir arsa, kare şeklinde parsellere ayrılacaktır.

Buna göre **en az** kaç tane eş parsel elde edilebileceğini bulunuz.

11. Mazlum ailesi yeni aldıkları evlerinin 3,6 m ve 4,4 m boyutlarındaki mutfağının tabanını eş büyüklükte kare fayans döşetmek istemektedir.

Bu iş için **en az** kaç fayans gerektiğini bulunuz.

12. Sinem; bahçelerindeki ağaçları üçerli saydığında 1, beşerli saydığında 3, yedişerli saydığında 5 ağaç artmaktadır. Buna göre bahçede **en az** kaç ağaç olduğunu bulunuz.



9.3.2.3. Gerçek Hayatta Periyodik Olarak Tekrar Eden Durumları İçeren Problemler

DÜŞÜNÜYORUM



Bir ilçede bulunan üç farklı lisenin beden eğitimi öğretmenleri, ilçedeki kapalı spor salonunda öğrencilerini voleybol turnuvasına hazırlamaktadır. Öğretmenler sırasıyla 3, 4 ve 6 günde bir spor salonunda çalışma yapmaktadır. Üçü birlikte ilk kez pazartesi günü öğrencileri çalıştırmaya başladığına göre tekrar üçü birlikte hangi gün öğrencileri çalıştırır? Düşünüp yorumlayınız.

ÖRNEK 42

Şu an saat 15.00 ise 80 saat sonra saatin kaç olacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

24 saatte bir saatlerimiz aynı saati göstereceğinden 80 sayısı 24 e bölündüğünde geriye 8 saat artacaktır. 15.00 ten 8 saat sonra ise saat 23.00 olacaktır.

ÖRNEK 43

Bugün günlerden perşembe ise 92 gün sonra hangi gün olacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

Bir hafta yedi gün olduğundan verilen gün sayısı 7 ye bölünür. Kalan sayı, perşembe günü 0 kabul edilerek üzerine sayılır. Böylece kalana denk gelen gün bulunur.

$$\begin{array}{r|l} 92 & 7 \\ -\ 91 & 13 \\ \hline 1 & \end{array}$$

perşembe	cuma
0	1

Kalan 1 olduğundan 92 gün sonra cuma gününe denk gelir.

ÖRNEK 44



Burak, 4 günde bir tenis kursuna gitmektedir. Kursa pazartesi günü başlayan Burak'ın 12. kez kursa hangi gün gideceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Burak ilk kursuna katıldığı için $12 - 1 = 11$ kez daha kursa gidecektir. Bunun için geçen süre $4 \cdot 11 = 44$ gün olacaktır. Pazartesi gününden 44 gün sonrasının bulunması gerekir.

$$\begin{array}{r|l} 44 & 7 \\ -\ 42 & 6 \\ \hline 2 & \end{array}$$

pazartesi	salı	çarşamba
0	1	2

Kalan 2 olduğundan 12. kez kursa gittiği gün çarşamba günü olacaktır.



ÖRNEK 45



Eda, Zeynep ve Elif sırasıyla 15, 20 ve 30 günde bir kuaföre gitmektedir. 4. kez üçü birlikte pazar günü gittiklerine göre 7. kez birlikte hangi gün kuaföre gideceklerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Eda, Zeynep ve Elif;

EKOK (15, 20, 30) = 60 günde bir birlikte kuaföre gitmektedirler. Birlikte 7 − 4 = 3 defa daha kuaföre gidecektirler. Bunun için geçen süre $60 \cdot 3 = 180$ gün olacaktır. Pazar gününden 180 gün sonrasının bulunması gerekir.

$$\begin{array}{r|l} 180 & 7 \\ \cline{2-2} -175 & 25 \\ \hline 5 & \end{array}$$

pazar	pazartesi	salı	çarşamba	perşembe	cuma
0	1	2	3	4	5

Kalan 5 olduğundan 7. kez birlikte kuaföre gittikleri gün cuma günü olacaktır.

ÖRNEK 46



İki askerden biri 5 günde bir, diğeri 8 günde bir nöbet tutmaktadır. Bu askerler, birlikte ilk nöbetlerini salı günü tuttuklarına göre 6. kez birlikte hangi gün nöbet tutacaklarını bulunuz.

ÇÖZÜM

İki asker, EKOK (5, 8) = 40 günde bir birlikte nöbet tutarlar. İlk nöbetlerini tuttuklarına göre 6 − 1 = 5 nöbetleri kalır. Bunun için geçen süre $40 \cdot 5 = 200$ olacaktır. Salı gününden 200 gün sonrası bulunmalıdır.

$$\begin{array}{r|l} 200 & 7 \\ \cline{2-2} -196 & 28 \\ \hline 4 & \end{array}$$

salı	çarşamba	perşembe	cuma	cumartesi
0	1	2	3	4

Kalan 4 olduğundan 6. kez birlikte nöbet tuttukları gün cumartesi günü olacaktır.

ÖRNEK 47

152023152023152023... şeklinde tekrar eden bir sayının soldan 1071. basamağındaki rakamın kaç olacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen sayı 152 023 şeklinde altışar basamak hâlinde tekrar ettiğinden soldan 1071. basamaktaki rakamı bulmak için 1071 sayısı 6 ya bölünür.

$$\begin{array}{r|l} 1071 & 6 \\ \cline{2-2} -1068 & 178 \\ \hline 3 & \end{array}$$

Kalan 3 olduğundan 152 023 sayısının soldan 3. rakamı 2 olur. Böylece soldan 1071. basamağındaki rakam da bulunmuş olur.



ÖRNEK 48

1. satır	1	3	5	7	9	11
2. satır	13	15	17	19	21	23
3. satır	25	27	29	31	33	35
.						
.						
.						
125. satır				X		

Şekildeki tabloda ardışık tek doğal sayılar, soldan sağa kutucuklara yerleştirilerek yazılmaktadır. Buna göre 125. satırdaki X sayısının yerine hangi sayının geleceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Yukarda verilen tabloya göre

Birinci satır dördüncü sütundaki eleman 7,

İkinci satır dördüncü sütundaki eleman $7+1\cdot 12=19$,

Üçüncü satır dördüncü sütundaki eleman $7+2\cdot 12=31$,

Dördüncü satır dördüncü sütundaki eleman $7+3\cdot 12=43$,

...,

125. satır dördüncü sütundaki eleman $x=7+124\cdot 12=1495$ olur.

ALIŞTIRMALAR

1. 14 Aralık 2017 Perşembe günü olduğuna göre 14 Aralık 2018 tarihinin hangi gün olacağını bulunuz (2017 ve 2018 yılı 365 gündür.).

2. Üniversite sınavına hazırlanan İbrahim 10 günde bir deneme sınavı çözmektedir. İlk denemesini pazar günü çözen İbrahim'in 12. denemesini hangi gün çözeceğini bulunuz.

3. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ Ⓕ

   Yukarıdaki şekilde bulunan 6 lamba, A - B - C - D - E - F - E - D - C - B - A - B - ... sırasıyla yanıp sönmektedir. Buna göre bu döngüde 987. sırada yanacak lambanın hangi harfle gösterildiğini bulunuz.

4. Bir belediye doğrusal bir yol boyunca orta refüj çalışmasını aşağıdaki gibi yapmıştır.
   - Yol boyunca otuzar metre aralıklarla çukurlar açılmıştır.
   - Her çukura ağaç ya da aydınlatma lambası dikilmiştir.
   - Her 5 ağaç arasına bir aydınlatma lambası dikilmiştir.

   Evlerinin önünde aydınlatma lambası olan Gülnaz evden çıkıp bu yol boyunca ilerleyerek okuluna gitmiş ve okulun önünde de aydınlatma lambası görerek okuluna ulaşmıştır. Gülnaz yol boyunca 23 tane aydınlatma lambası gördüğüne göre Gülnaz'ın evinin okuluna uzaklığının kaç metre olduğunu bulunuz.

9.3.3. Birinci Dereceden Denklemler ve Eşitsizlikler

Neler Öğreneceksiniz?

- Gerçek sayılar kümesinde aralık kavramını açıklamayı,
- Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemler ve eşitsizlikliklerin çözüm kümelerini bulmayı,
- Mutlak değer içeren birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemler ve eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulmayı,
- Birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem ve eşitsizlik sistemlerinin çözüm kümesini bulmayı öğreneceksiniz.



Terimler ve Kavramlar

- Bilinmeyen
- Değişken
- Denklem
- Denklemin Derecesi
- Eşitsizlik
- Gerçek Sayı Aralıkları
- Çözüm Kümesi
- Mutlak Değer

9.3.3.1. Gerçek Sayılar Kümesinde Aralık Kavramı

Sayı doğrusu üzerinde birbirinden farklı iki noktanın arasındaki tüm gerçek sayılardan oluşan alt kümeye **aralık** adı verilir. Aralıklar, verilen kümeye uç noktalarının dâhil edilip edilmemesine bağlı olarak adlandırılır.

Aralık gösterimi **[a,b], (a,b), [a,b), (a,b]** ifadeleri kullanılarak yapılır. Bu gösterimlerdeki a ve b gerçek sayıları birer uç noktadır.



Sembol ve Gösterimler

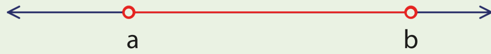
$<, \leq, >, \geq$

[a,b] , (a,b] , [a,b), (a,b)

$(-\infty,\infty)$, $|x|$

Uç noktaların aralığa dâhil edilmediği kümelere **açık aralık** denir.

$A=\{x \mid a < x < b$ ve $a, b, x \in \mathbb{R}\}$ kümesi bir açık aralık belirtir ve **(a,b)** ile ifade edilir. Sayı doğrusu üzerindeki gösterimi aşağıdaki gibidir.



Örneğin (2,3) açık aralığı $A=\{x \mid 2 < x < 3, x \in \mathbb{R}\}$ ile gösterilir.

Sayı doğrusunda ise aşağıdaki şekildeki gibi gösterilir.



Uç noktaların her ikisinin aralığa dâhil edildiği kümelere **kapalı aralık** denir.

$A=\{x \mid a \leq x \leq b$ ve $a, b, x \in \mathbb{R}\}$ kümesi bir kapalı aralık belirtir ve **[a,b]** ile ifade edilir. Sayı doğrusu üzerindeki gösterimi aşağıdaki gibidir.

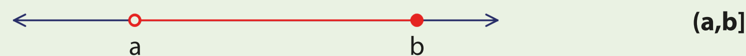


Örneğin [2,3] kapalı aralığı $A=\{x \mid 2 \leq x \leq 3, x \in \mathbb{R}\}$ ile gösterilir.

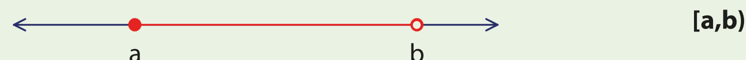
Sayı doğrusunda ise aşağıdaki şekildeki gibi gösterilir.



Uç noktalardan birinin dâhil edilmediği $a < x \leq b$ veya $a \leq x < b$ şeklinde ifade edilen kümelere **yarı açık aralık** denir ve aşağıdaki gibi gösterilir.



(a,b]



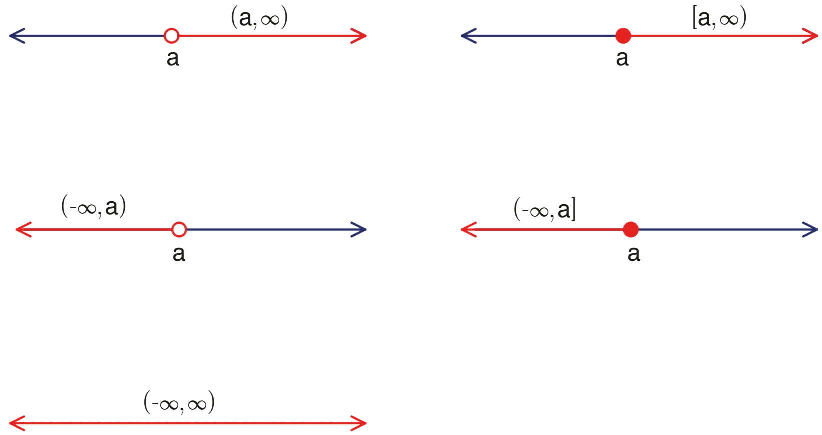
[a,b)

Örneğin (2,3] yarı açık aralığı $A = \{x \mid 2 < x \le 3, x \in \mathbb{R}\}$ ile gösterilir.
Sayı doğrusunda ise aşağıdaki şekildeki gibi gösterilir.



Siz de [2,3) yarı açık aralığını sayı doğrusunda gösteriniz.

Uç noktalarından birinin ya da ikisinin sınırlandırılmadığı aralıklar aşağıdaki gibidir.





Gerçek sayı aralıkları aynı zamanda bir küme belirtir.

ÖRNEK 1

$A=\{x \mid -4 \le x < 6, x \in \mathbb{R}\}$ ve $B=\{x \mid 2 < x \le 8, x \in \mathbb{R}\}$ ise aşağıdaki kümeleri aralık biçiminde ifade edip sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

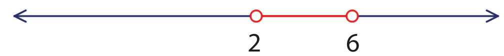
a) $A \cup B$ **b)** $A \cap B$ **c)** $A \setminus B$ **ç)** $B \setminus A$ **d)** A' **e)** B'

ÇÖZÜM

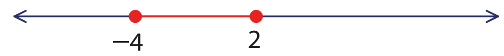
a) $A \cup B = [-4,8]$ olur.



b) $A \cap B = (2,6)$ olur.



c) $A \setminus B = [-4,2]$ olur.



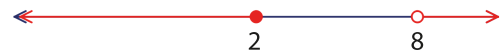
ç) $B \setminus A = [6,8]$ olur.



d) $A' = (-\infty,-4) \cup [6,\infty)$ olur.



e) $B' = (-\infty,2] \cup (8,\infty)$ olur.





DÜŞÜNÜYORUM

Aşağıdaki tabloda ilk cümleye ait eşitsizlik ve aralık gösterimi verilmiştir. Boş bırakılan bölümlere karşılık gelen eşitsizlik ve aralık gösterimini yazınız.

Sözel İfade	Eşitsizlik ile Gösterimi	Aralık ile Gösterimi
Bugün hava sıcaklığı 4 ile 12 derece arasında değişecek.	$4 < x < 12$	(4,12)
Bu araç 100 km lik bir mesafede en az 6 en çok 8 litre benzin tüketiyor.		
İki şehir arasını en çok 90 km/sa. hızla durmadan geçtik.		
Bazı bitkiler boyları 10 cm iken dikilir. Bu bitkilerin boyları ortalama 120 cm yi geçmez.		

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıda verilen kümeleri aralık biçiminde yazıp sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

a) $A=\{x \mid -4 < x \leq 8, x \in \mathbb{R}\}$
b) $B=\{x \mid x < 7, x \in \mathbb{R}\}$
c) $C=\{x \mid -8 < x < 0, x \in \mathbb{R}\}$

2. Aşağıda sayı doğrusu üzerinde kırmızı renk ile gösterilen kümeleri aralık biçiminde yanlarındaki boşluklara yazınız.

a) −4 (dolu), 2 (boş) ....

b) −2 (boş) ....

c) −3 (boş), 3 (dolu) ....

ç) −4 (boş), −1 (dolu), 1 (dolu) ....

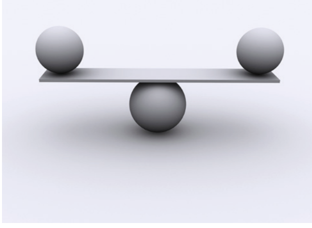
3. $A=[-7,0)$ ve $B=(-2,\infty)$ olmak üzere aşağıdaki istenilenleri aralık belirtecek şekilde cevaplandırınız.

a) $A \cap B$
b) $A \cup B$
c) $(A \setminus B)'$
ç) $(A \cup B)'$

4. $A=\{x \mid x < 5, x \in \mathbb{R}\}$ olarak veriliyor. Buna göre aşağıdaki istenilenleri aralık belirtecek şekilde cevaplandırınız.

a) $\mathbb{R} \cup A$
b) $\mathbb{R} \cap A$
c) $(\mathbb{R} \setminus A)$
ç) $(\mathbb{R} \setminus A)'$

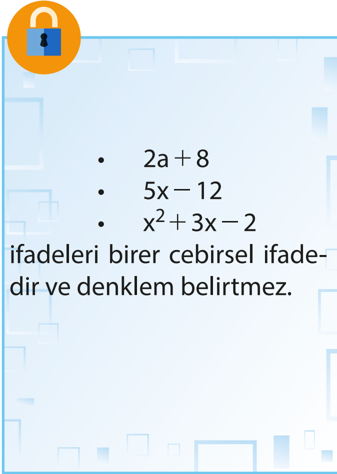




9.3.3.2. Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler ve Eşitsizliklerin Çözüm Kümesini Bulma

İçerisinde en az bir tane değişken bulunduran iki niceliğin birbirine eşitliğini ifade eden bağıntılara **denklem** adı verilir.

$-4x + 16 = 0$, $x^2 - 5x = 6$, $2m - n = 24$ ifadeleri birer denklem belirtir.



- $2a + 8$
- $5x - 12$
- $x^2 + 3x - 2$

ifadeleri birer cebirsel ifadedir ve denklem belirtmez.

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $ax + b = 0$ genel gösterimi ile ifade edilebilen denklemlere **birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemler** denir.

a ve b ye **denklemin katsayıları**, x e **değişken** adı verilir. Denklemin derecesi değişkeninin kuvvetine göre değişir.

Örneğin

$2y - 6 = 0$ denkleminde değişken y dir ve denklemin derecesi 1 dir.

$m^2 - 9 = 0$ denkleminde değişken m dir ve denklemin derecesi 2 dir.

$a \cdot x + b = 0$ şeklindeki bir denklemde x değerine **denklemin kökü** adı verilir. Kökün kümesine de **çözüm kümesi** denir ve "**ÇK**" ile gösterilir.

1. $a \neq 0$ ise denklemi sağlayan yalnız bir tane x değeri vardır. $ÇK = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$ şeklinde gösterilir.
2. $a = 0$ ve $b = 0$ ise denklem $0 \cdot x + 0 = 0$ durumuna dönüşür. Bu durumda x değişkenine hangi gerçek sayı değeri verilirse verilsin eşitlik sağlanır. Yani çözüm kümesi gerçek sayılardır.

   $ÇK = \mathbb{R}$ şeklinde gösterilir.
3. $a = 0$ ve $b \neq 0$ ise denklem $0 \cdot x + b = 0$ durumuna dönüşür. Bu durumda x değişkenine hangi gerçek sayı değeri verilirse verilsin bu eşitlik doğru olmaz. Çözüm kümesi boş kümedir..

   $ÇK = \varnothing$ şeklinde gösterilir..

ÖRNEK 2

$\frac{5x+1}{2} - \frac{x+2}{3} = 2x + 1$ denkleminin gerçek sayılardaki çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\underset{(3)}{\frac{5x+1}{2}} - \underset{(2)}{\frac{x+2}{3}} = \underset{(6)}{\frac{2x+1}{1}}$$ (Paydalar eşitlenir.)

$$\frac{15x+3}{6} - \frac{2x+4}{6} = \frac{12x+6}{6}$$

$$\frac{15x+3-2x-4}{6} = \frac{12x+6}{6}$$ (Eşitliğin her iki tarafı 6 ile çarpılır.)

$$13x - 1 = 12x + 6$$

$$13x - 12x = 6 + 1$$

$$x = 7$$

Bu durumda $ÇK = \{7\}$ olur.

ÖRNEK 3

$\frac{5x-7}{2x+5}=\frac{4}{3}$ denkleminin tam sayılar ve gerçek sayılardaki çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\frac{5x-7}{2x+5}=\frac{4}{3}$ (İçler dışlar çarpımı yapılır.)

$3\cdot(5x-7)=4\cdot(2x+5)$

$15x-21=8x+20$

$15x-8x=20+21$

$7x=41$

$\frac{7x}{7}=\frac{41}{7}$

$x=\frac{41}{7}$ olur.

Bulunan $\frac{41}{7}$ sayısı bir tam sayı olmadığı için tam sayılarda ÇK = Ø olur.

Gerçek sayılarda ise $ÇK=\{\frac{41}{7}\}$ olur.



Denklem çözümünden elde edilen kök ya da kökler, üzerinde çalışılan sayı kümesinin bir elemanı değilse denklemin çözüm kümesinin elemanı değildir.

ÖRNEK 4

$2\cdot(3x+1)-11=3\cdot(2x-3)$ denkleminin gerçek sayılardaki çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$2\cdot(3x+1)-11=3\cdot(2x-3)$

$6x+2-11=6x-9$

$6x-9=6x-9$

$6x-6x=-9+9$

$0=0$

Verilen denklem her x gerçek sayısı için sağlandığından $ÇK=\mathbb{R}$ olur.



$\frac{0}{0}$ ifadesi belirsizlik belirtir.

Payın sıfırdan farklı, paydanın sıfır olduğu durumlar tanımsızlık belirtir.

Örneğin $\frac{5}{0}$ ifadesi tanımsız olup bir gerçek sayı belirtmez.

ÖRNEK 5

$\frac{5x-10}{3x-6}=\frac{5}{3}$ denkleminin gerçek sayılardaki çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\frac{5x-10}{3x-6}=\frac{5}{3}$

$3\cdot(5x-10)=5\cdot(3x-6)$

$15x-30=15x-30$

$15x-15x=-30+30$

$0=0$ olur.

Verilen denklemde x = 2 sayısı paydayı 0 yaptığından çözüm kümesine alınmaz. Buradan $ÇK=\mathbb{R}-\{2\}$ olur.

ÖRNEK 6

$4x-2+5\cdot(x-5)=3\cdot(3x+6)$ denkleminin gerçek sayılardaki çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$4x-2+5\cdot(x-5)=3\cdot(3x+6)$

$4x-2+5x-25=9x+18$

$9x-27=9x+18$

$-27=18$ olur.

Bu da eşitliğin hatalı olduğunu gösterir. Bu durumda denklemi sağlayan herhangi bir x gerçek sayısı bulunamaz. ÇK = Ø olur.



Bir denklemin çözümünden elde edilen kök ya da kökler denklemin ilk hâlinde yerine yazıldığında denklemi doğrulamalıdır. Bu işleme sağlama adı verilir. Denklemi sağlamayan sayılar çözüm kümesine alınmaz.

ÖRNEK 7

$(-2m + 10) \cdot x + n + 8 = 0$ denkleminin çözüm kümesi gerçek sayılarda sonsuz elemanlı ise m ve n değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\underbrace{(-2m+10)}_{0}x+\underbrace{n+8}_{0}=0$ ifadesinde katsayılar sıfıra eşitlenir.

$-2m+10=0$ $n+8=0$

$-2m=-10$ $n=-8$ olur.

$m=5$ olur.

ÖRNEK 8

$-3ax - 10 = 12 \cdot (x - 1)$ denklemin çözüm kümesi gerçek sayılarda boş küme ise a nın değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$-3ax - 10 = 12 \cdot (x-1)$ (Tüm terimler eşitliğin aynı tarafına alınır.)

$-3ax-12x-10+12=0$

$\underbrace{(-3a-12)}_{0}\cdot x+2=0$

$-3a-12=0$

$-3a=12$

$a=-4$ olur.

ÖRNEK 9

$-6a + 2ax = 10a - 13$ denkleminin değişkeni a ise gerçek sayılardaki çözüm kümesinin boş küme olabilmesi için x değerini bulunuz.



Bir denklemin değişkeni herhangi bir sembol olarak verilebilir. Bu durumda diğer semboller birer sabit sayı olarak düşünülür.

ÇÖZÜM

$-6a + 2ax = 10a - 13$

$-6a - 10a + 2ax + 13 = 0$

$(2x-16)a+13=0$ (Denklemin değişkeni a olduğu için katsayısı 0 olmalıdır.)

$2x-16=0$ ve $x=8$ olur.

ÖRNEK 10

Bir iş yerinde depoda daima 500 parça ürün ile güne başlanıyor. Günün sonunda ürün sayımı yapılarak satılan ürün kadar ertesi gün için sipariş veriliyor.

- 1. işçi, "Depoda kalan malın 2 katının 50 fazlası kadar ürüne ihtiyaç var." demiştir.
- 2. işçi, "Depoda kalan malın 3 katından 100 eksiği kadar ürüne ihtiyaç var." demiştir.

İki farklı işçinin aynı günün sonunda ihtiyaç duyulan ürünle ilgili verdikleri bilgiler doğru ve yukarıdaki gibi ise kaç adet ürün sipariş verildiğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Depoda gün sonunda x parça ürün kaldığı düşünülürse 1. işçi $2 \cdot x + 50$ parça ürün siparişi, 2. işçi ise $3 \cdot x - 100$ parça ürün siparişi belirlemiştir.

Her iki işçinin de belirlemiş olduğu sipariş sayıları eşit olduğuna göre

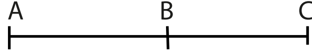
$2 \cdot x + 50 = 3 \cdot x - 100$

$x = 150$ olur.

Bu durumda sipariş verilen ürün sayısı $500 - 150 = 350$ olur.

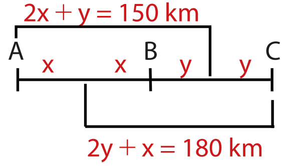


ÖRNEK 11



A şehrinden C şehrine doğru 150 km ilerleyen bir araç B ve C şehirlerinin orta noktasına, C şehrinden A şehrine doğru180 km ilerleyen bir araç A ve B şehirlerinin orta noktasına ulaşıyor. A ile C şehirleri arasının kaç km olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



|AB| = 2x ve |BC| = 2y olsun. Bu durumda A şehrinden ve C şehrinden yola çıkan araçların verilenlere göre yol alması durumunda denklemler aşağıdaki gibidir.

$$\begin{array}{r} 2x+y=150 \\ +\quad 2y+x=180 \\ \hline 3y+3x=330 \end{array} \Rightarrow y+x=110 \text{ km olur.}$$

Bu durumda A ve C şehirleri arası uzaklık $2y+2x = 2\cdot(y+x)=2\cdot 110 = 220$ km olur.

Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler

İki niceliğin birbirinden küçük ya da büyük olma durumunu belirten bağıntılara **eşitsizlik** adı verilir. Eşitsizlikler " $<, \leq, >, \geq$ " sembolleri kullanılarak ifade edilir.

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere

$ax+b<0$

$ax+b\leq 0$

$ax+b>0$

$ax+b\geq 0$

şeklindeki eşitsizliklere **birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikler** adı verilir.

Örneğin $3x-6<12$, $a-\frac{1}{4}\geq 0$, $3x-6\leq x+4$, $5x-10>0$

şeklindeki ifadeler birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik belirtir.

Bir eşitsizliğin her iki tarafına aynı gerçek sayı eklenir ya da çıkarılırsa eşitsizlik değişmez.
a, b, c birer gerçek sayı olmak üzere $a < b$ ise
$a+c < b+c$ ve $a-c<b-c$ olur.

ÖRNEK 12

$x-5\geq 6$ eşitsizliğinin gerçek sayılardaki çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x-5\geq 6$ (Eşitsizliğin her iki tarafına 5 eklenir.)
$x-5+5\geq 6+5$
$x\geq 11$ olur.
Bu durumda $ÇK=\{x \mid 11\leq x, x\in\mathbb{R}\}$ olur.
Çözüm kümesi aralık biçiminde $ÇK=[11,\infty)$ olarak da yazılabilir.





Eşitsizlikler taraf tarafa toplanırken sınır noktalarının her ikisi de dâhil ise toplamları da elde edilen yeni eşitsizliğe dâhil edilir.

Diğer durumlarda ise toplama dâhil edilmez.

Eşitsizlikler taraf tarafa toplanabilir.

$$\begin{array}{rl} & a < x < b \\ + & c < y < d \\ \hline & a+c < x+y < b+d \end{array}$$

ÖRNEK 13

$x, y \in R$ olmak üzere $-2 < x \leq 8$ ve $5 \leq y \leq 11$ ise $x+y$ nin değer aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{array}{rl} & -2 < x \leq 8 \\ + & 5 \leq y \leq 11 \\ \hline \end{array}$$

$-2+5 < x+y \leq 8+11 \Rightarrow 3 < x+y \leq 19$ olur.

Bir eşitsizliğin her iki tarafı aynı pozitif gerçek sayı ile çarpılır ya da bölünürse eşitsizlik yön değiştirmez.

a, b, c birer gerçek sayı ve $c > 0$ olmak üzere

$a < b$ ise $a \cdot c < b \cdot c$ ve $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ olur.

Bir eşitsizliğin her iki tarafı aynı negatif gerçek sayı ile çarpılır ya da bölünürse eşitsizlik yön değiştirir.

a, b, c birer gerçek sayı ve $c < 0$ olmak üzere

$a < b$ ise $a \cdot c > b \cdot c$ ve $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ olur.

Aşağıdaki çalışmaları inceleyiniz.

- $2 \leq 10$ ise $5 \cdot 2 \leq 5 \cdot 10$
  $10 \leq 50$
- $2 \leq 10$ ise $-5 \cdot 2 \geq -5 \cdot 10$
  $-10 \geq -50$
- $5x \geq 20$ ise $\frac{5x}{5} \geq \frac{20}{5}$ ve $x \geq 4$
- $-5x \geq 20$ ise $\frac{-5x}{-5} \leq \frac{20}{-5}$ ve $x \leq -4$
- $\frac{x}{2} < -6$ ise $2 \cdot \frac{x}{2} < 2 \cdot (-6)$
  $x < -12$
- $-\frac{3x}{5} < 7$ ise $\left(-\frac{5}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3x}{5}\right) > \left(-\frac{5}{3}\right) \cdot 7$
  $x > -\frac{35}{3}$

ÖRNEK 14

$\frac{-2x+2}{5} - \frac{x+1}{2} > 1 - x$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\underset{(2)}{\frac{-2x+2}{5}} - \underset{(5)}{\frac{x+1}{2}} > \underset{(10)}{\frac{1-x}{1}}$ (Paydalar eşitlenir.)

$$\frac{-4x+4}{10} - \frac{5x+5}{10} > \frac{10-10x}{10}$$

$$-4x+4-5x-5 > 10-10x$$

$$-9x-1 > 10-10x$$

$$10x-9x > 10+1$$

$x > 11$ olur. Bu durumda $ÇK = (11, \infty)$ olur.



ÖRNEK 15

$-5 \le \frac{-3x-1}{2} < 3$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$-\underset{(2)}{\frac{5}{1}} \le \frac{-3x-1}{2} < \underset{(2)}{\frac{3}{1}} \text{ (Paydalar eşitlenir.)}$$

$$-\frac{10}{2} \le \frac{-3x-1}{2} < \frac{6}{2} \text{ (Her bölge 2 ile çarpılır.)}$$

$$-10 \le -3x-1 < 6$$

$$-10+1 \le -3x-1+1 < 6+1 \text{ (Her bölgeye 1 eklenir.)}$$

$$-9 \le -3x < 7$$

$$\frac{-9}{-3} \ge \frac{-3x}{-3} > \frac{7}{-3}$$

$$3 \ge x > -\frac{7}{3} \quad \text{ve } ÇK = \left(-\frac{7}{3}, 3\right] \text{ olur.}$$

ÖRNEK 16

x ve y birer gerçek sayıdır.

$-4 \le x \le 6$

$-6 \le y < 3$

ise $2x + 3y$ toplamının alabileceği en geniş değer aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM

$2 \cdot (-4) \le 2x \le 2 \cdot 6$ ve $3 \cdot (-6) \le 3y < 3 \cdot 3$

$-8 \le 2x \le 12$ $\qquad$ $-18 \le 3y < 9$ olur.

Elde edilen eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{array}{rl} & -8 \le 2x \le 12 \\ + & -18 \le 3y < 9 \\ \hline \end{array}$$

$-26 \le 2x + 3y < 21$ olur. Buradan ifadenin en geniş değer aralığı $[-26, 21)$ olur.



İki eşitsizliğin taraf tarafa toplanması işleminde eşitsizlik yönlerinin aynı olmasına dikkat ediniz.

ÖRNEK 17

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x + 2 \le 3x - 10 < 2x + 4$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulup sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

ÇÖZÜM

Bu türdeki eşitsizlik çözümleri $x + 2 \le 3x - 10$ ve $3x - 10 < 2x + 4$ eşitsizlikleri çözülerek yapılır ve bulunan kümelerin kesişimi alınır.

$x + 2 \le 3x - 10$	ve	$3x - 10 < 2x + 4$
$2 + 10 \le 3x - x$		$3x - 2x < 10 + 4$
$12 \le 2x$		$x < 14$ olur.
$6 \le x$		

$6 \le x$ ve $x < 14$ eşitsizliklerin kesişimi $6 \le x < 14$ olup verilen eşitsizliğin çözüm kümesi $ÇK = [6,14)$ olur. Sayı doğrusunda ise



olarak gösterilir.



ÖRNEK 18

$x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$-3 \leq x < 9$ eşitsizliği ve $y + 2x - 6 = 0$ denklemi veriliyor. y nin alabileceği değer aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Önce y değişkeni x değişkeni cinsinden yazılır.

$y + 2x - 6 = 0$ ise $y = -2x + 6$ olur.

Verilen $-3 \leq x < 9$ eşitsizliğinden $-2x + 6$ ifadesi elde edip yerine y yazılır.

$-3 \leq x < 9 \Rightarrow (-2) \cdot (-3) \geq (-2) \cdot x > (-2) \cdot 9$

$\Rightarrow \quad 6 \geq -2x > -18$

$\Rightarrow \quad 6 + 6 \geq -2x + 6 > -18 + 6$

$\Rightarrow \quad 12 \geq y > -12$ olur. Buradan y nin $ÇK = (-12, 12]$ olur.

$a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $a < b, c < d$ ise $a \cdot c < b \cdot d$ olur.

Örneğin $4 < 8$ ve $5 < 7$ ise $20 < 56$ olarak yazılır.

ÖRNEK 19

$3 \leq x \leq 7$ ve $-4 \leq y < 5$ ise $x - y$ ile $x \cdot y$ ifadelerinin değer aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM

- $x - y = x + (-y)$ olduğundan x ile $-y$ nin aralıkları taraf tarafa toplanır. Bunun için öncelikle $-y$ nin aralığı bulunur. $-4 \leq y < 5$ eşitsizliğinin her tarafı -1 ile çarpılırsa $-5 < -y \leq 4$ olur.

$$\begin{array}{rl} & 3 \leq x \leq 7 \\ + & -5 < -y \leq 4 \\ \hline \end{array}$$

$3 + (-5) < x + (-y) \leq 7 + 4 \Rightarrow -2 < x - y \leq 11$ olur.

- $3 \leq x \leq 7$ ve $-4 \leq y < 5$ eşitsizlikleri için x ve y nin sınır değerleri ile aşağıdaki çarpma tablosu oluşturulur.

•	3	7
−4	−12	−28
5	15	35

$x \cdot y$ ifadesinin değer aralığı tablodaki en küçük ve en büyük değer kullanılarak $-28 \leq x \cdot y < 35$ bulunur.

a ve b aynı işaretli ve sıfırdan farklı iki gerçek sayı olmak üzere

$a < b$ ise $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ olur.

ÖRNEK 20

$x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2} \leq x < 4 \\ -\frac{1}{2} \leq y < -\frac{1}{8} \end{array}\right\}$ olarak veriliyor. $\frac{x + y}{x \cdot y}$ ifadesinin değer aralığını bulunuz.



ÇÖZÜM

$\frac{1}{2} \leq x < 4$ ise $2 \geq \frac{1}{x} > \frac{1}{4}$ olur.

$-\frac{1}{2} \leq y < -\frac{1}{8}$ ise $-2 \geq \frac{1}{y} > -8$ olur.

Elde edilen eşitsizlikler taraf tarafa toplanır

$$2+(-2) \geq \frac{1}{x}+\frac{1}{y} > \frac{1}{4}+(-8)$$
$$\quad\;\;(y)\;\;(x)$$

$$0 \geq \frac{x+y}{x \cdot y} > -\frac{31}{4}$$ bulunur.

ÖRNEK 21

Bir firmada aynı reyonda çalışan Cengiz ve Ceren'in sattıkları ürün sayısı toplam 56 dır. Cengiz'in sattığı ürün sayısı 22 den fazla 29 dan az ise Ceren'in sattığı ürün sayısının değer aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM

- Cengiz'in sattığı ürün sayısına x, Ceren'in sattığı ürün sayısına y denirse $x + y = 56$ olur.
- Cengiz'in sattığı ürün sayısı 22 den fazla 29 dan az ise $22 < x < 29$ olur.
- $x+y=56$ eşitliğinden x yalnız bırakılarak $x = 56 - y$ bulunur.

Bu ifade x in değer aralığında yerine yazılırsa

$$22 < 56-y < 29 \text{ olur.}$$
$$22 - 56 < -y < 29 - 56$$
$$-34 < -y < -27$$
$$27 < y < 34 \text{ olur.}$$

Bu durumda Ceren'in sattığı ürün sayısı 27 ile 34 arasındadır.

ÖRNEK 22

Bir GSM şirketi ₺50 sabit ücretli tarife için

- Sınırsız konuşma,
- Sınırsız mesajlaşma,
- 500 MB internet paketi ve paket aşımında 1MB ücreti olarak 2,50 kuruş şartlarını belirliyor.

Telefon faturasını aylık en fazla ₺60 olacak şekilde ödemeyi planlayan Utku'nun bu tarifeye göre **en fazla** kaç MB internet kullanabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

MB aşım miktarına x, paket aşımı ile oluşacak fatura tutarına F denilirse

F = Sabit ücret + Paket aşım ücreti
F = ₺50 + x · 2,50 kuruş
F = (5000 + x · 2,50) kuruş olur (₺50 = 5000 kuruş).

Bu tarifeyi seçen Utku'nun fatura tutarı en fazla ₺60 olacağından $F \leq 6000$ kuruş olur.

$$5000 + x \cdot 2{,}50 \leq 6000$$
$$x \cdot 2{,}50 \leq 1000$$
$$x \leq \frac{1000}{2{,}50}$$
$$x \leq 400 \text{ olur.}$$

Bu durumda en fazla 400 MB tarife aşımı yapabilir.



El Hârezmî



Temsilî El Hârezmî

Ebu Ca'fer Muhammed bin Musa el–Hârezmî İslam dünyasında cebir ilminin kurucusu kabul edilen matematikçi, astronom ve coğrafyacıdır. Hârezmî'nin yazdığı "El' Kitab'ül–Muhtasar fi Hisab 'il Cebri ve'l Mukabele" (Cebir ve Eşitlik Üzerine Özet Kitap) düzenli biçimde telif edilmiş, adında "cebir" kelimesini taşıyan ilk matematik kitabıdır. Kitabında cebirsel denklemleri çözerken analitik çözüm yanında geometrik çizimi de kullanan ilk matematikçidir. Ayrıca eserinde sayılar dâhil hiçbir aritmetiksel ve cebirsel işlem için sembol kullanmamış ve bütün işlemleri sözel olarak ifade etmiştir. Hârezmî, ilk defa birinci ve ikinci dereceden denklemleri analitik metotlarla bir bilinmeyenli denklemleri de cebirsel ve geometrik metotlarla çözmenin kurallarını ve usullerini tespit etmiştir. Matematikte ilk defa sıfır rakamını kullanmıştır. Kendi adıyla anılan "algoritma" yı ortaya çıkarmış ve bugün Arap rakamları olarak da bilinen Hint numaralama sistemini tanıtmıştır. Kesirlerde, işlemler de içinde olmak üzere birçok aritmetik yöntem geliştirmiştir. Hârezmî'nin bu çalışmaları, evrenin ahengini matematik yoluyla anlamaya çalışanlara yüzyıllar boyunca ilham vermiştir.

Düzenlenmiştir.

ALIŞTIRMALAR

1. $-6 \cdot (2x + 4) + 4x = 8x + 40$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

2. $3x - 5 - [x + 6 - 2(9 + 3x)] = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

3. $\dfrac{2x + a - 5}{ax - 7} = \dfrac{x + 1}{x - 1}$ denkleminin kökü 4 olduğuna göre a değerini bulunuz.

4. $m, n \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$-m \cdot (2x - 6) + 6x - n = 0$ denkleminin çözüm kümesinin tüm gerçek sayılar olabilmesi için m ve n değerlerini bulunuz.

5. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $-2 \leq \dfrac{x - 4}{3} < 4$ ise x in değer aralığını bulup sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

6. $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $-4 < a \leq 5$ eşitsizliği veriliyor. $-3a + 7$ ifadesinin alabileceği kaç farklı tam sayı değerinin olduğunu bulunuz.

7. $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$5 < x - 2 \leq 9$

$-3 \leq y + 3 \leq 6$

eşitsizlikleri veriliyor. Aşağıdaki ifadelerin değer aralıklarını bulunuz.

a) $x + y$

b) $x - y$

c) $x \cdot y$

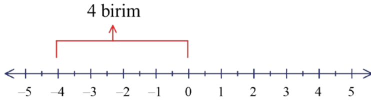
ç) $2x - 3y$

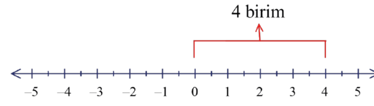
8. $3x - 6 \leq 4x + 2 < 2x + 10$ eşitsizliğini sağlayan x gerçek sayılarının alabileceği kaç farklı tam sayı değeri olduğunu bulunuz.



9.3.3.3. Mutlak Değer İçeren Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler ve Eşitsizlikler

Bir gerçek sayının sayı doğrusu üzerindeki yerinin sıfır noktasına olan uzaklığına **bu sayının mutlak değeri** denir. x gerçek sayısının mutlak değeri "|x|" ile gösterilir.





−4 sayısının mutlak değeri 4 tür.
$|-4| = 4$ olur.

4 sayısının mutlak değeri 4 tür.
$|4| = 4$ olur.



Sayı doğrusu üzerinde a ile b gerçek sayılarının birbirine uzaklığı $|a-b|$ ile gösterilir.

Mutlak değer, $|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \text{ ise} \\ -x & , x < 0 \text{ ise} \end{cases}$ şeklinde tanımlanır.

Mutlak değerin içerisindeki ifadenin gerçek sayı değeri 0 ya da 0 dan büyük ise ifade mutlak değer dışına aynı olarak çıkarılır.

Aşağıdaki çalışmayı inceleyiniz.

a) $|12| = 12$
b) $x > 0$ ise $|6x| = 6x$
c) $a > 0$ ise $|5a + 3| = 5a + 3$
ç) $a \in \mathbb{R}$ ise $|a^2 + 3| = a^2 + 3$
d) $|0| = 0$

Mutlak değerin içindeki ifadenin gerçek sayı değeri 0 dan küçükse ifade mutlak değer dışına −1 ile çarpılarak çıkarılır. Böylece dışarıya 0 dan büyük çıkması sağlanır.

Aşağıdaki çalışmayı inceleyiniz.

a) $|-7| = -1 \cdot (-7) = 7$
b) $|-\sqrt{3}| = -1 \cdot (-\sqrt{3}) = \sqrt{3}$
c) $x < 0$ ise $|5x| = -1 \cdot (5x) = -5x$
ç) $x > 0$ ise $|-5x| = -1 \cdot (-5x) = 5x$
d) $a \in \mathbb{R}$ ise $|-a^2 - 2| = -1 \cdot (-a^2 - 2) = a^2 + 2$

ÖRNEK 23

$x > 0$ ve $x \in \mathbb{R}$ için $|3x| + |-2x| - |1+x|$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$x > 0$ için $|3x| = 3x$, $|-2x| = 2x$ ve $|1+x| = 1+x$ olarak mutlak değer dışına çıkarılır.
Böylece $|3x| + |-2x| - |1+x| = 3x + 2x - (1 + x) = 5x - 1 - x = 4x - 1$ olur.



ÖRNEK 24

Değer aralığı $2 < a < 3$ olan bir a gerçek sayısı için $|3a| + |a - 3| + |a - 2| - |-4a|$ ifadesinin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$2 < a < 3$ ise $3 \cdot 2 < 3 \cdot a < 3 \cdot 3$ ve $6 < 3a < 9$ olup $|3a| = 3a$ olur.
$2 < a < 3$ ise $2 - 3 < a - 3 < 3 - 3$ ve $-1 < a - 3 < 0$ olup $|a - 3| = -a + 3$ olur.
$2 < a < 3$ ise $2 - 2 < a - 2 < 3 - 2$ ve $0 < a - 2 < 1$ olup $|a - 2| = a - 2$ olur.
$2 < a < 3$ ise $-4 \cdot 2 > -4 \cdot a > -4 \cdot 3$ ve $-8 > -4a > -12$ olup $|-4a| = 4a$ olur.
$3a - a + 3 + a - 2 - (4a) = 3a + 1 - 4a = -a + 1$ olur.

ÖRNEK 25

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < 0 < b$ olmak üzere $|-2a| + |a - 2| - |-3b|$ ifadesinin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$a < 0$ ise $-2a > 0$ olup $|-2a| = -2a$ olur.
$a < 0$ ise $a - 2 < 0$ olup $|a - 2| = 2 - a$ olur.
$0 < b$ ise $-3b < 0$ olup $|-3b| = 3b$ olur.
$|-2a| + |a - 2| - |-3b| = -2a + 2 - a - (3b) = -2a + 2 - a - 3b = -3a - 3b + 2$ olur.

ÖRNEK 26

$a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $|2a^2 + 1| + |-a^2 - 5|$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Her a gerçek sayısı için $a^2 \geq 0$ ve $2a^2 + 1 > 0$ olacağından $|2a^2 + 1| = 2a^2 + 1$ olur.
Aynı şekilde $-a^2 - 5 < 0$ olduğundan $|-a^2 - 5| = a^2 + 5$ olur.
Bu durumda $|2a^2 + 1| + |-a^2 - 5| = 2a^2 + 1 + a^2 + 5 = 3a^2 + 6$ olur.

Mutlak Değerin Özellikleri

1. $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere çarpım durumundaki iki gerçek sayının mutlak değeri bu sayıların mutlak değerleri çarpımı olarak yazılabilir.
$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ olur.

2. $x, y \in \mathbb{R}$ ve $y \neq 0$ olmak koşuluyla bölüm durumundaki iki gerçek sayının mutlak değeri bu sayıların mutlak değerlerinin bölümü olarak yazılabilir.
$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ dir.



Bir gerçek sayının mutlak değeri daima kendisine eşit ya da kendisinden büyüktür.

$|x| \geq x$

Aşağıdaki çalışmayı inceleyiniz ($x, y \in \mathbb{R}$).

a) $|7 \cdot 3| = |7| \cdot |3| = 21$
b) $|-6 \cdot 5| = |-6| \cdot |5| = 30$
c) $|-4 \cdot (-2)| = |-4| \cdot |-2| = 8$
ç) $|-6 \cdot x| = |-6| \cdot |x| = 6 \cdot |x|$
d) $|3x + 3| = |3 \cdot (x + 1)| = |3| \cdot |x + 1| = 3 \cdot |x + 1|$
e) $|-3 \cdot x \cdot y| = |-3| \cdot |x| \cdot |y| = 3 \cdot |x| \cdot |y|$ olur.

3. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $|x| = |-x|$ olur.
Doğruluğu $|-x| = |-1 \cdot x| = |-1| \cdot |x| = |x|$ olarak gösterilir.

Aşağıdaki çalışmayı inceleyiniz ($x, y \in \mathbb{R}$).

a) $|x - y| = |-x + y|$
b) $|3x - 5y| = |-3x + 5y|$
c) $y \neq 0$ olmak üzere $\left|-\frac{x}{y}\right| = \left|\frac{x}{y}\right|$ olur.



4. $x \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ için $|x^n| = |x|^n$ olur.

Aşağıdaki çalışmayı inceleyiniz.

a) $|5^3| = |5|^3 = 125$
b) $|-5^3| = |-5|^3 = 5^3 = 125$
c) $|(-5)^4| = |-5|^4 = 5^4 = 625$
ç) $x, y \in \mathbb{R}$, $|(x-y)^3| = |x-y|^3$ olur.

5. İki gerçek sayının toplamının mutlak değeri sayıların ayrı ayrı mutlak değerlerinin toplamından küçük veya eşittir. Bu durum $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere $|x+y| \le |x| + |y|$ olarak ifade edilir.

Aşağıdaki çalışmayı inceleyiniz.

a) $|6+3| \le |6| + |3|$ ve $9 \le 9$
b) $|-8+2| \le |-8| + |2|$ ve $6 \le 10$
c) $|-5-3| \le |-5| + |-3|$ ve $8 \le 8$ olur.



$|x| = x$ ise $x \ge 0$ ve

$|x| = -x$ ise $x \le 0$ olur.

ÖRNEK 27

x ve y sıfırdan farklı gerçek sayılar ise $\dfrac{|5x+5y|}{|x|+|y|}$ ifadesinin alabileceği **en büyük** değeri bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen ifade $\dfrac{|5(x+y)|}{|x|+|y|} = \dfrac{|5| \cdot |x+y|}{|x|+|y|} = \dfrac{5 \cdot |x+y|}{|x|+|y|}$ olarak düzenlenir.

$|x+y| \le |x|+|y|$ eşitsizliğinin her iki tarafı sıfırdan büyük olan $|x|+|y|$ toplamına bölünüp sonra her iki taraf 5 ile çarpılır. Böylece

$$\frac{|x+y|}{|x|+|y|} \le \frac{|x|+|y|}{|x|+|y|}$$

$$\frac{|x+y|}{|x|+|y|} \le 1$$

$$5 \cdot \frac{|x+y|}{|x|+|y|} \le 5 \cdot 1$$

$$\frac{5 \cdot |x+y|}{|x|+|y|} \le 5 \text{ bulunur.}$$

Bu durumda $\dfrac{5 \cdot |x+y|}{|x|+|y|}$ ifadesinin alabileceği en büyük değer 5 olur.

Mutlak Değerli Denklemler

$|x| = 7$ denkleminde x değişkeni 7 ve -7 değerlerini alır.

$|x| = -7$ denkleminde ise x değişkeni herhangi bir gerçek sayı değeri alamaz. Bu durumda çözüm kümesi boş kümedir. Bu durumlar aşağıdaki gibi genellenebilir.

$x, a \in \mathbb{R}$ olmak üzere

- $a \ge 0$ için $|x| = a$ ise $x = a$ veya $x = -a$ olur.
- $a < 0$ için $|x| = a$ ise denklemin çözüm kümesi boş kümedir ve ÇK = Ø olarak yazılır.



$|x| = 0$ ise $x = 0$ olur.

ÖRNEK 28

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $|2x-3| = 11$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$2x - 3 = 11$ veya $2x - 3 = -11$

$2x = 14$ $2x = -8$

$x = 7$ $x = -4$ olup

ÇK = {−4, 7} olur.





$|ax + b| = c$ denkleminde $c < 0$ ise denklemin çözüm kümesi boş kümedir.

ÖRNEK 29

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $|-7x + 13| + 5 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$|-7x + 13| + 5 = 0$ ise $|-7x + 13| = -5$ olur.
Mutlak değerin sonucu 0 dan küçük bir sayıya eşit olamayacağından ÇK = Ø olur.

ÖRNEK 30

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $|-5x| + |2x| - |-3x| = 5$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$|-5| \cdot |x| + |2| \cdot |x| - |-3| \cdot |x| = 5$$
$$5 \cdot |x| + 2 \cdot |x| - 3 \cdot |x| = 5$$
$$4 \cdot |x| = 5$$
$$|x| = \frac{5}{4} \Longrightarrow x = \frac{5}{4} \text{ veya } x = -\frac{5}{4} \text{ olur.}$$

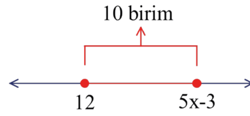
Bu durumda $ÇK = \left\{-\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right\}$ olur.

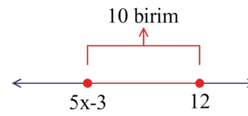
ÖRNEK 31

Sayı doğrusu üzerinde $5x - 3$ ve 12 sayıları arasındaki uzaklık 10 birimdir. Buna göre x gerçek sayısının alabileceği değerler toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen $5x - 3$ ve 12 sayıları için sayı doğrusu üzerinde aşağıdaki gibi iki farklı durum söz konusudur.





$$5x - 3 - 12 = 10 \quad \text{veya} \quad 12 - (5x - 3) = 10$$
$$5x - 15 = 10 \qquad 12 - 5x + 3 = 10$$
$$5x = 25 \qquad -5x + 15 = 10$$
$$x = 5 \qquad -5x = -5$$
$$x = 1 \text{ olur.}$$

Bu durumda x in alabileceği değerler toplamı $5 + 1 = 6$ olur.
Bu sorunun mutlak değer yardımıyla çözülebilmesi için $|(5x - 3) - 12| = 10$ denkleminin kurulması gerektiğine dikkat ediniz.

a ve b gerçek sayıları arasındaki uzaklık k birim ise bu durum $|a - b| = k$ ile gösterilir.

ÖRNEK 32

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $||x - 4| - 6| = 10$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$|x - 4| - 6 = 10$ ise $|x - 4| = 16$ olur. Buradan,

$$x - 4 = 16 \quad \text{veya} \quad x - 4 = -16$$
$$x = 20 \qquad x = -12$$

$|x - 4| - 6 = -10$ ise $|x - 4| = -4$
Mutlak değerin sonucu negatif olamaz.

Bu durumda ÇK = {−12, 20} olur.



ÖRNEK 33

$a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $|a^2+7| = 56$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

Her $a \in \mathbb{R}$ için $a^2+7 > 0$ olacağından $|a^2+7| = a^2+7$ olur.
$a^2+7 = 56 \implies a^2 = 49 \implies a = 7$ veya $a = -7$ olur.
Bu durumda ÇK = {−7, 7} olur.

ÖRNEK 34

$x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere $|-3x+18| + |-2y+6| = 0$ denklemini sağlayan x ve y değerlerinin toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$|-3x+18| + |-2y+6| = 0$ denklemi $|0| + |0| = 0$ dışında herhangi bir durumda sağlanamayacağından

$-3x+18 = 0$ ve $-2y+6 = 0$
$-3x = -18$ $\qquad$ $-2y = -6$
$x = 6$ $\qquad$ $y = 3$ olur.

Bu durumda $x + y = 6 + 3 = 9$ olur.



a, b $\in \mathbb{R}$ olmak üzere
$|a|+|b|=0$ ise $a=0$ ve $b=0$
olur.

ÖRNEK 35

$A, x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $A = |x-7| + |2x-8|$ olarak veriliyor.
A nın alabileceği **en küçük** değeri bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen örnekte mutlak değerler içerisinde aynı değişkenler kullanıldığı için içlerini aynı anda 0 yapan x değeri bulunamaz. Bundan dolayı ayrı ayrı 0 a eşitlenip bulunan her bir x değeri verilen denklemde tekrar yerine yazılır.

$x - 7 = 0$ ise $x = 7$ olur. Bu durumda
$A = |7-7| + |2 \cdot 7 - 8|$
$A = 0 + 6$
$A = 6$ olur.

$2x - 8 = 0$ ise $x = 4$ olur. Bu durumda
$A = |4-7| + |2 \cdot 4 - 8|$
$A = 3 + 0$
$A = 3$ olur.

A değerlerinden küçük olan 3 olduğundan yanıt 3 tür.

ÖRNEK 36

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $|2x-9| = -4x+3$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$2x - 9 = -4x + 3$
$2x + 4x = 9 + 3$
$6x = 12$
$x = 2$

$2x - 9 = 4x - 3$
$2x - 4x = 9 - 3$
$-2x = 6$
$x = -3$ olur.

Bir değişken hem mutlak değerin içinde hem de dışında kullanılmışsa bulunan değerler, ilk denklemde yerine yazılarak değerlerin denklemi sağlayıp sağlamadığı kontrol edilir.

x=2 için $|2 \cdot 2 - 9| = -4 \cdot 2 + 3$
$|-5| = -5$
$5 = -5$ (Yanlış olduğuna dikkat ediniz.)

$x = -3$ için $|2 \cdot (-3) - 9| = -4 \cdot (-3) + 3$
$|-15| = 15$
$15 = 15$ olur.

$x = 2$ değeri yanlış bir eşitlik verdiği için çözüm kümesine alınamaz. ÇK = {−3} olur.



ÖRNEK 37

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $|x + 12| = |x - 4|$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x + 12 = x - 4$
$x - x = -12 - 4$
$0 = -16$ (Yanlıştır.)

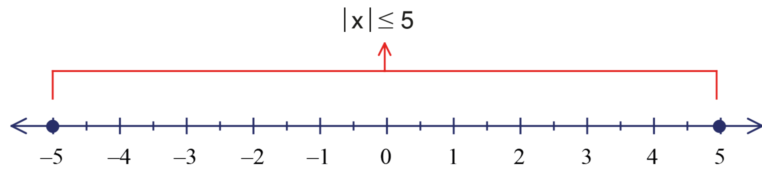
$x + 12 = -x + 4$
$x + x = -12 + 4$
$2x = -8$
$x = -4$ olur. -4 sayısı denklemde yerine yazıldığında denklemi sağladığı görülür. ÇK $= \{-4\}$ olur.

Mutlak Değerli Eşitsizlikler

Sıfıra olan uzaklığı 5 birim olan x gerçek sayıları $|x - 0| = 5$ ($|x| = 5$) denkleminin çözüm kümesi ile hesaplanır.

Sıfıra olan uzaklığı 5 birim veya 5 birimden küçük olan gerçek sayılar ise

$|x-0| \leq 5$ ($|x| \leq 5$) eşitsizliğinin çözüm kümesinin birer elemanıdır. Bu durum sayı doğrusunda aşağıdaki gibi gösterilmiştir.



Dolayısıyla $|x| \leq 5$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $-5 \leq x \leq 5$ eşitsizliğini sağlayan tüm gerçek sayılardır.

$x \in \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$ olur.

ÖRNEK 38

Sayı doğrusu üzerinde 0 sayısına olan uzaklığı 7 birimden küçük olan gerçek sayıların belirttiği aralığı bulunuz.

ÇÖZÜM

$|x - 0| < 7$ ise $|x| < 7$ olur ve $-7 < x < 7$ olur. $(-7, 7)$ aralığı biçiminde gösterilir.

$|x| < 0$ ise ÇK $= \varnothing$
$|x| \leq 0$ ise ÇK $= \{0\}$ olur.

ÖRNEK 39

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $|7x - 21| \leq 14$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$-14 \leq 7x - 21 \leq 14$
$-14 + 21 \leq 7x - 21 + 21 \leq 14 + 21$
$7 \leq 7x \leq 35$
$\frac{7}{7} \leq \frac{7x}{7} \leq \frac{35}{7}$
$1 \leq x \leq 5$ olup ÇK $= [1, 5]$ olur.

ÖRNEK 40

$x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere $|x - 2| < 4$ ve $|y + 2| \leq 6$ eşitsizlikleri veriliyor. $2x + y$ toplamının değer aralığını bulunuz.



ÇÖZÜM

$$-4 < x-2 < 4 \qquad\qquad -6 \le y+2 \le 6$$
$$-4+2 < x-2+2 < 4+2 \qquad -6-2 \le y+2-2 \le 6-2$$
$$-2 < x < 6 \qquad\qquad -8 \le y \le 4$$
$$2\cdot(-2) < 2\cdot x < 2\cdot 6$$
$$-4 < 2x < 12$$

Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa $-12 < 2x+y < 16$ elde edilir. Bu durumda çözüm kümesi aralık biçimde $(-12, 16)$ şeklindedir.



$|x| \ge 0$ ise $ÇK = \mathbb{R}$ ve
$|x| > 0$ ise $ÇK = \mathbb{R} - \{0\}$
olur.

$x \in \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $|x| \ge a \iff x \ge a$ veya $x \le -a$ olur.

ÖRNEK 41

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $|2x-8| \ge 6$ eşitsizliğinin çözüm kümesini sayı doğrusu üzerinde gösterip aralık biçiminde yazınız.

ÇÖZÜM

$$2x-8 \ge 6 \qquad \text{veya} \qquad 2x-8 \le -6$$
$$2x \ge 14 \qquad\qquad 2x \le 2$$
$$x \ge 7 \qquad\qquad x \le 1 \text{ olur.}$$

Bu durum sayı doğrusu üzerinde aşağıdaki gibi gösterilir.



$ÇK = (-\infty, 1] \cup [7, \infty)$ veya $ÇK = \mathbb{R} - (1, 7)$ olur.

ÖRNEK 42

$\left|\frac{x}{2}+1\right| > 2$ eşitsizliğini sağlamayan x tam sayılarının toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{x}{2}+1 > 2 \qquad \text{veya} \qquad \frac{x}{2}+1 < -2$$
$$\frac{x}{2} > 1 \qquad\qquad \frac{x}{2} < -3$$
$$x > 2 \qquad\qquad x < -6$$

Bu eşitsizliklerin sayı doğrusu üzerindeki gösterimi aşağıda verilen şekildeki gibidir.



-6 ve 2 sayıları ve bunların arasında kalan tam sayılar eşitsizliği sağlamaz. Dolayısıyla cevap $-6+(-5)+(-4)+(-3)+(-2)+(-1)+0+1+2=-18$ olur.

$x \in \mathbb{R}$ ve $a, b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$a \le |x| \le b \iff (a \le x \le b$ veya $-b \le x \le -a)$ olur.

ÖRNEK 43

$4 < |4x-8| \le 12$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$4 < 4x-8 \le 12 \qquad \text{veya} \qquad -12 \le 4x-8 < -4$$
$$4+8 < 4x \le 12+8 \qquad -12+8 \le 4x < -4+8$$
$$\frac{12}{4} < \frac{4x}{4} \le \frac{20}{4} \qquad -4 \le 4x < 4$$
$$3 < x \le 5 \qquad -1 \le x < 1 \text{ olur.}$$

Bu durumda $ÇK = (3, 5] \cup [-1, 1)$ olur.



ÖRNEK 44

$|2x-10| \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

Mutlak değerin sonucu 0 sayısından küçük olamayacağı için verilen durum sadece $|2x-10| = 0$ için geçerlidir.

Bu durumda $2x-10=0 \Rightarrow 2x=10 \Rightarrow x=5$ olur. Bu durumda ÇK = {5} olur.

ÖRNEK 45

$|2x-14| > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

Mutlak değerin içini 0 yapan $x=7$ değeri dışındaki tüm gerçek sayılar bu eşitsizliği sağlar. Dolayısıyla ÇK = $\mathbb{R}-\{7\}$ olur.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıda verilen ifadeleri mutlak değer dışına çıkarınız.
   a) $x \in \mathbb{R}$ ve $x>0$ ise $|5x+7|$
   b) $x \in \mathbb{R}$ ve $x<0$ ise $|3x-|-x||$
   c) $a, b \in \mathbb{R}$ ve $0<a<b$ ise $|a-b|-|b-a|$
   ç) $x, y \in \mathbb{R}$ ve $x<y<0$ ise $|x+y|+|-x|-|y|$

2. Aşağıda verilen mutlak değerli denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.
   a) $x \in \mathbb{R}, |-2x+7|=11$
   b) $x \in \mathbb{R}, |-7x+17|=-2$
   c) $a \in \mathbb{R}, |5a-20|=0$
   ç) $b \in \mathbb{R}, |-3b|+|2b|-20=0$

3. Aşağıda verilen mutlak değerli eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulunuz.
   a) $x \in \mathbb{R}, |5x-5|<10$
   b) $a \in \mathbb{R}, |7a-13|<0$
   c) $a \in \mathbb{R}, |6a-12|<-7$
   ç) $a \in \mathbb{R}, |2a-2|-8 \leq 0$
   d) $x \in \mathbb{R}, |x+6|>0$
   e) $x \in \mathbb{R}, 6 \leq |x-8| \leq 10$

4. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $||x-4|-6|=2$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

5. $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere $|x-3|<5$ ve $3x-y=2$ ise y nin alabileceği kaç farklı tam sayı değeri olduğunu bulunuz.

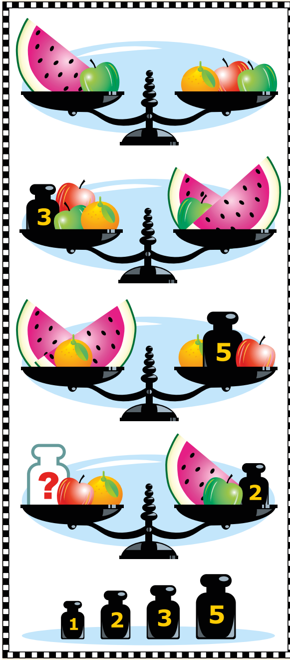
6. Sayı doğrusu üzerinde 7 ye olan uzaklığı 5 birimden fazla olmayan kaç tam sayı değerinin olduğunu bulunuz.

7. $\dfrac{2}{|a-2|} > \dfrac{1}{3}$ eşitsizliğini sağlayan kaç farklı a tam sayısının olduğunu bulunuz (a nın 2 olamayacağına dikkat ediniz.).



9.3.3.4. Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklemler ve Eşitsizlikler

DÜŞÜNÜYORUM



- Yeşil ve kırmızı elmaların aynı ağırlıkta olduğu yandaki resimde tüm şekiller dengede olduğuna göre "?" ifadesi yerine resmin alt kısmındaki ağırlıklardan hangisinin gelmesi gerektiğini bulmaya çalışınız.
- Birden çok bilinmeyenin olduğu durumlarda sonuca ulaşmak için hangi yöntemleri kullanabileceğinizi arkadaşlarınızla tartışınız.
- Yeşil ve kırmızı elmalar aynı ağırlıkta olmasaydı sonuca ulaşabilir miydiniz? Düşünüp yorumlayınız.

$a \neq 0$, $b \neq 0$ ve a, b, c $\in \mathbb{R}$; x ile y değişkenler olmak üzere $ax+by = c$ şeklindeki denklemlere **birinci dereceden iki bilinmeyenli denklemler** adı verilir. Bu denklemi sağlayan (doğrulayan) x ve y gerçek sayıları ise (x, y) sıralı ikilisi olarak yazılır ve bu sıralı ikiliye **denklemin çözüm kümesinin bir elemanı** denir.

$ax+by = c$ birinci dereceden iki bilinmeyenli denklemlerin grafikleri doğru belirtir.



Bir doğrunun çizilebilmesi için en az iki noktasının bilinmesine ihtiyaç vardır.

ÖRNEK 46

$2x - 3y = 12$ denklemini sağlayan tüm (x, y) sıralı ikililerinin analitik düzlemde belirttiği grafiği çiziniz.

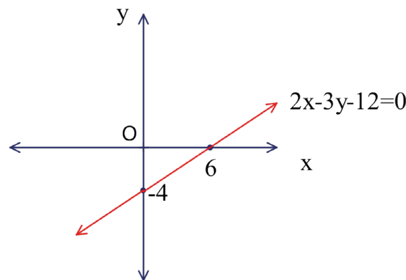
ÇÖZÜM

Verilen denklem bir doğru belirtir. Bir doğru grafiğinin çizimi için 2 nokta yeterlidir.

x = 0 için
$2 \cdot 0 - 3y = 12$
$-3y = 12$
$y = -4$

y = 0 için
$2x - 3 \cdot 0 = 12$
$2x = 12$
$x = 6$ olur.

İstenen doğrunun grafiği (0, −4) ve (6, 0) noktalarından geçeceğinden analitik düzlemde bu noktalar işaretlenip doğrunun grafiği yandaki gibi çizilebilir.



Doğru üzerindeki her noktanın belirttiği sıralı ikili, denklemin çözüm kümesinin bir elemanıdır.

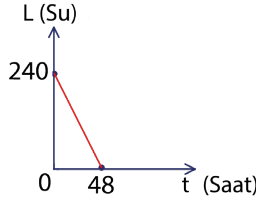


ÖRNEK 47

Bir su deposunda 240 litre su vardır. Bir saatte 5 litre azalan suyun zamana bağlı değişimini gösteren denklemi bulup bu denklemin grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM

Su miktarı S ve geçen süre ise t ile gösterilirse
$t = 1$ için depoda kalan su miktarı $S = 240 - 5 \cdot 1$
$t = 2$ için depoda kalan su miktarı $S = 240 - 5 \cdot 2$
$t = 3$ için depoda kalan su miktarı $S = 240 - 5 \cdot 3$ olacaktır.



Yukarıdaki eşitlikler genellenecek olursa $S = 240 - 5t$ denklemi elde edilir.
Buradan $S + 5t = 240$ birinci dereceden iki bilinmeyenli denklemi elde edilip denklemin grafiği yandaki gibi çizilir.

ÖRNEK 48



"Bir parkta toplam 40 bank vardır. Bunlardan bir kısmı üçer kişilik geri kalanları ise dörder kişiliktir. Banklara toplam 146 kişi oturabildiğine göre dört kişilik ve üç kişilik bank sayılarını bulunuz." şeklindeki bir problemin çözümü için gerekli denklemleri kurunuz.

ÇÖZÜM

Dört kişilik bank sayısı x, üç kişilik bank sayısı ise y ile gösterilecek olursa
$x + y = 40$ ve $4x + 3y = 146$ olarak ifade edilen iki denklem elde edilir.
Her iki denklemi doğru yapan x ve y değerleri ise bu denklem grubunun çözüm kümesini oluşturur.

$ax + by = m$
$cx + dy = n$ şeklinde verilen aynı değişkenden oluşan ve birden fazla denklem bulunduran ifadelere **birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi** adı verilir.

Birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemlerinin çözüm kümesini bulmak için yok etme, yerine koyma ve grafik çizimi gibi yöntemler kullanılır.

Yok Etme Yöntemi

Denklem sisteminde bilinmeyenlerden herhangi birinin katsayısı diğer denklemdeki aynı bilinmeyenin katsayısıyla mutlak değerce eşit, işaret bakımından ters olacak şekilde düzenlenir. Taraf tarafa toplama yoluyla seçilen değişken yok edilir.

ÖRNEK 49

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 11 \\ 3x + 4y = 15 \end{array}\right\}$$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{array}{r} 3 \cdot (2x + 3y) = 11 \cdot 3 \\ -2 \cdot (3x + 4y) = 15 \cdot (-2) \\ \hline 6x + 9y = 33 \\ + \; -6x - 8y = -30 \\ \hline y = 3 \text{ olur.} \end{array}$$

Yanda bulunan y değeri verilen ilk denklemlerin herhangi birinde yerine yazılarak diğer bilinmeyen hesaplanır.
$2x + 3y = 11$ denkleminde y=3 değeri yazılırsa
$2x + 3 \cdot 3 = 11 \Rightarrow 2x + 9 = 11 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$ olur. Bu durumda çözüm kümesi ÇK={(1, 3)} olur.



ÖRNEK 50

$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=\frac{4}{3}\\ \frac{3}{x}-\frac{4}{y}=-1\end{array}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesini yok etme yöntemi ile bulunuz.

ÇÖZÜM

$$2\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right)=\frac{4}{3}\cdot 2$$

$$+\ \frac{3}{x}-\frac{4}{y}=-1$$

$$\frac{2}{x}+\frac{4}{y}=\frac{8}{3}$$

$$+\ \frac{3}{x}-\frac{4}{y}=-1$$

$$\frac{5}{x}=\frac{5}{3}\Rightarrow x=3 \text{ olur.}$$

Soldaki toplamdan elde edilen x = 3 değeri 2. denklemde yerine yazılır.

$$\frac{3}{3}-\frac{4}{y}=-1$$

$$-\frac{4}{y}=-2$$

$$-2y=-4$$

$$y=2 \text{ olur.}$$

Bu durumda $ÇK=\{(3,2)\}$ olur.

Yerine Koyma Yöntemi

Denklem sistemindeki denklemlerin herhangi birinden herhangi bir değişken eşitliğin bir tarafında yalnız bırakılır ve diğer denklemde yerine yazılır.

ÖRNEK 51

$\left.\begin{array}{r}5x+y=-5\\ -2x+3y=19\end{array}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$5x+y=-5$ denkleminde y yalnız bırakılırsa $y=-5x-5$ olur.
İkinci denklemde y yerine $-5x-5$ yazılırsa

$$-2x+3\cdot(-5x-5)=19 \Rightarrow -2x-15x-15=19 \Rightarrow -17x-15=19$$

$$\Rightarrow -17x=34$$

$$\Rightarrow x=-2 \text{ olur.}$$

$y=-5x-5$ eşitliğinde x yerine -2 yazılırsa $y=-5\cdot(-2)-5=5$ olur.

Bu durumda $ÇK=\{(-2,5)\}$ olur.

Grafik Yorumu

Birinci dereceden iki bilinmeyenli bir denklemin çözüm kümesini oluşturan sıralı ikililer analitik düzlemde bir doğru belirtir.

Denklem sistemini oluşturan denklemlerin belirttiği doğruların kesim noktası ya da noktaları bu denklem sisteminin çözüm kümesini oluşturur.

ÖRNEK 52

$\left.\begin{array}{r}x+y=5\\ 3x+3y=15\end{array}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulup çözüm kümesinin grafiksel yorumunu yapınız.

ÇÖZÜM

$$-3\cdot(x+y)=5\cdot(-3)$$

$$3x+3y=15$$

$$-3x-3y=-15$$

$$+3x+3y=15$$

$$0=0$$

Elde edilen bu doğru eşitlik denklem sisteminin çözüm kümesinin sonsuz elemanlı olduğunu ifade eder.

İkinci denklemin her iki tarafı $\frac{1}{3}$ ile çarpılırsa

$$\frac{1}{3}(3x+3y)=\frac{1}{3}\cdot 15$$

$$x+y=5 \text{ olur.}$$

Aslında verilen iki denklem birbirinin aynısıdır. Grafikleri aynı doğruyu belirtir. Bu duruma **doğruların çakışık olması** adı verilir. Çakışık iki doğrunun tüm noktaları ortaktır.



ÖRNEK 53

$\left.\begin{matrix} 3x - y = 3 \\ x + 2y = 8 \end{matrix}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

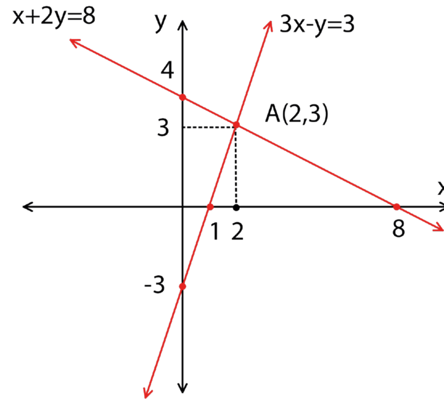
ÇÖZÜM

Denklem sistemini oluşturan denklemlerin her biri analitik düzlemde bir doğru belirtir.

$3x - y = 3$ denkleminde **x = 0** ise **y = -3** ve **y = 0** ise **x = 1** olduğundan bu doğru (0,−3) ile (1, 0) noktalarından geçer.

$x + 2y = 8$ denkleminde **x = 0** ise **y = 4** ve **y = 0** ise **x = 8** olduğundan bu doğru ise (0, 4) ile (8, 0) noktalarından geçer.

İki doğrunun grafiği çizildiğinde kesişme noktası denklem sisteminin çözüm kümesi olur. Bu doğruların grafikleri aşağıdaki gibi çizilmiştir.



Bu denklem sistemi için ÇK={(2, 3)}, yerine koyma ya da yok etme metodu ile de bulunabilir.

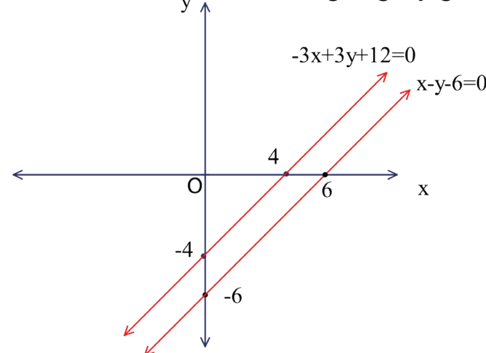
ÖRNEK 54

$\left.\begin{matrix} x - y - 6 = 0 \\ -3x + 3y + 12 = 0 \end{matrix}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulup çözüm kümesinin grafiksel yorumunu yapınız.

ÇÖZÜM

$$\begin{array}{r} 3 \cdot (x - y - 6) = 0 \cdot 3 \\ -3x + 3y + 12 = 0 \\ \hline 3x - 3y - 18 = 0 \\ + \quad -3x + 3y + 12 = 0 \\ \hline -6 = 0 \end{array}$$ bulunur.

Bulunan bu yanlış eşitlik denklem sisteminin çözüm kümesinin boş küme olduğunu belirtir. Bu denklemlerin grafiği aşağıdaki gibi çizilir.



Grafik incelendiğinde verilen denklemlerin grafiklerinin birbirine paralel olduğu görülmektedir. Ortak noktaları olmadığı için ÇK = Ø olur.



Paralel iki doğru birbirini kesmez.



$\left.\begin{array}{r} ax+by+m=0 \\ cx+dy+n=0 \end{array}\right\}$ denklem sisteminde her bir denklem bir doğru belirtir.

1. $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{m}{n}$ ise doğrular çakışıktır ve çözüm kümesi sonsuz elemanlıdır.

2. $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\neq\frac{m}{n}$ ise doğrular paraleldir ve çözüm kümesi boş kümedir.

3. $\frac{a}{c}\neq\frac{b}{d}$ ise doğrular tek noktada kesişir ve çözüm kümesi bir elemanlıdır.

ÖRNEK 55

$\left.\begin{array}{r} (a-2)\cdot x+3y-b+3=0 \\ 3x-2y+5=0 \end{array}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesi sonsuz elemanlı ise a+b değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\frac{a-2}{3}=\frac{3}{-2}=\frac{-b+3}{5}$ olmalıdır.

$\frac{a-2}{3}=\frac{3}{-2}$

$-2a+4=9$

$-2a=5$

$a=-\frac{5}{2}$

$\frac{3}{-2}=\frac{-b+3}{5}$

$2b-6=15$

$2b=21$

$b=\frac{21}{2}$ olur.

Bu durumda $a+b=-\frac{5}{2}+\frac{21}{2}=8$ olur.

ÖRNEK 56

$\left.\begin{array}{r} (2m-2)\cdot x-3y+1=0 \\ (m+1)\cdot x+5y-7=0 \end{array}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesi boş küme ise m değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\frac{2m-2}{m+1}=\frac{-3}{5}\neq\frac{1}{-7}$ olmalıdır.

Bu durumda $10m-10=-3m-3$

$13m=7$

$m=\frac{7}{13}$ olur.

ÖRNEK 57

$\left.\begin{array}{r} (m-2)x+4y-3=0 \\ 4x+8y-6=0 \end{array}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesinin tek elemanlı olması için m nin hangi değeri alamayacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen iki denklemin çözüm kümesinin tek elemanlı olması için

$\frac{m-2}{4}\neq\frac{4}{8}$ olmalıdır. Buradan

$8\cdot(m-2)\neq 4\cdot 4$

$8m-16\neq 16$

$8m\neq 32$

$m\neq 4$ olur.

Dolayısıyla m değeri 4 olamaz.



a, b, c birer gerçek sayı , a ve b sıfırdan farklı olmak üzere
$ax + by \leq c$
$ax + by < c$
$ax + by \geq c$
$ax + by > c$
şeklindeki ifadelere **birinci dereceden iki bilinmeyenli eşitsizlikler** denir.

Birinci dereceden iki bilinmeyenli denklemlerde olduğu gibi bu eşitsizliğin çözüm kümesi de (x, y) şeklindeki sıralı ikililerden oluşur. Eşitsizliği doğru yapan sonsuz sayıda sıralı ikili bulunacağından çözüm kümesi analitik düzlemde boyalı bölgeler çizilerek gösterilir.

ÖRNEK 58

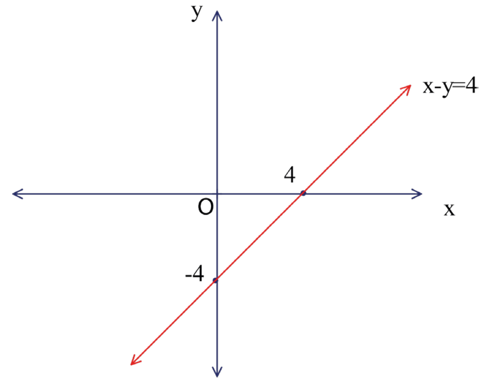
$x - y \leq 4$ eşitsizliğinin çözüm kümesini analitik düzlemde gösteriniz.

ÇÖZÜM

İlk olarak $x - y = 4$ doğrusunun grafiği çizilir.
$x = 0$ için $y = -4$
$y = 0$ için $x = 4$ olur.



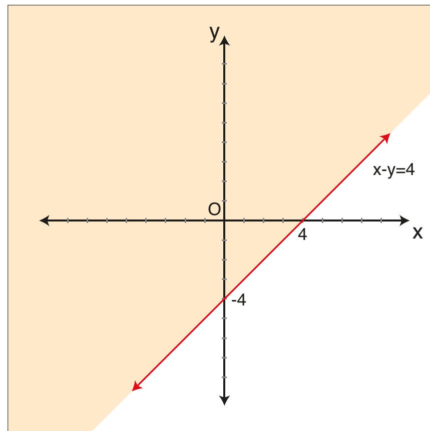
Doğru grafiğinin kesiksiz (devamlı) çizimi, doğru üzerindeki noktaların çözüm kümesine dâhil olduğu anlamına gelir. Kesikli çizimi ise doğru üzerindeki noktaların çözüm kümesine dâhil olmadığı anlamındadır.



Eşitsizlik işaretlerinin "≤" ya da "≥" verildiği durumlarda doğru grafiği kesiksiz çizgi ile çizilir. "<" ya da ">" durumunda ise doğru grafiği kesikli çizilmelidir.

Çizilen doğrunun analitik düzlemi iki bölgeye ayırdığı görülür. Bu bölgelerden hangisinin çözüm kümesinin elemanlarını bulundurduğunu anlamak için ayrılan bölgelerin herhangi birinden herhangi bir nokta seçilir. Bu nokta verilen eşitsizlikte yerine koyulur. Elde edilen ifade doğru ise noktanın bulunduğu bölge, yanlış ise diğer bölge boyanarak çözüm kümesinin elemanları gösterilmiş olur.

Çizilen doğru grafiğinde O(0, 0) noktası alınarak $x - y \leq 4$ eşitsizliğinde yerine koyulur. Böylece $0 - 0 \leq 4$ yani $0 \leq 4$ ifadesinin doğru olduğu görülür. Bu durumda O(0,0) noktasının yer aldığı bölge boyanmalıdır. Grafik aşağıdaki gibidir.



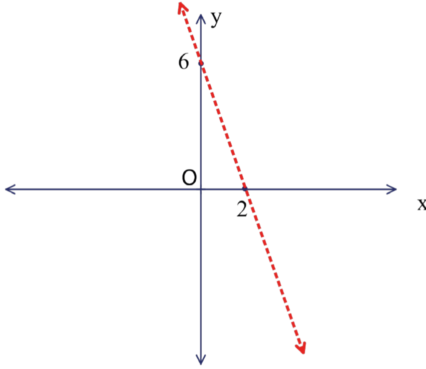
Boyalı bölgede bulunan sonsuz farklı nokta verilen eşitsizliğin çözüm kümesini oluşturur.



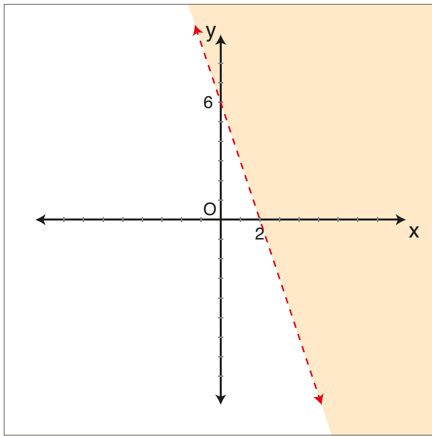
ÖRNEK 59

$y > -3x + 6$ eşitsizliğinin çözüm kümesini analitik düzlemde gösteriniz.

ÇÖZÜM



Önce $y = -3x + 6$ doğrusunun grafiği kesikli çizgi ile yandaki gibi çizilir.



Sonra O(0,0) noktası eşitsizlikte yerine yazılır.

$0 > -3{\cdot}0 + 6 \Rightarrow 0 > 6$ yanlış olur.

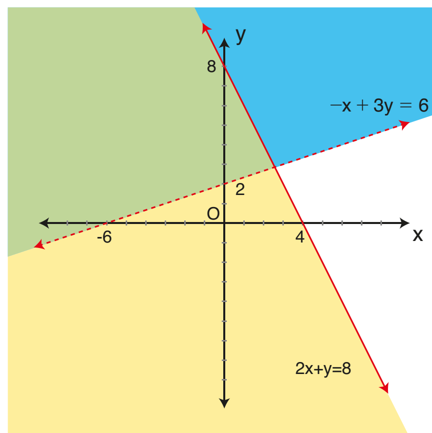
O(0,0) noktası eşitsizliği sağlamadığı için O(0,0) nın bulunmadığı bölge boyanır.

ÖRNEK 60

$\left.\begin{matrix} 2x + y \leq 8 \\ -x + 3y > 6 \end{matrix}\right\}$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini analitik düzlemde gösteriniz.

ÇÖZÜM

Verilen eşitsizliklerin analitik düzlemde oluşturduğu bölgeler boyanır. Yeşil renge boyanan bölge eşitsizlik sisteminin çözüm kümesidir.





Boyanan bölgedeki her sıralı ikili eşitsizlik sisteminin çözüm kümesinin bir elemanıdır.

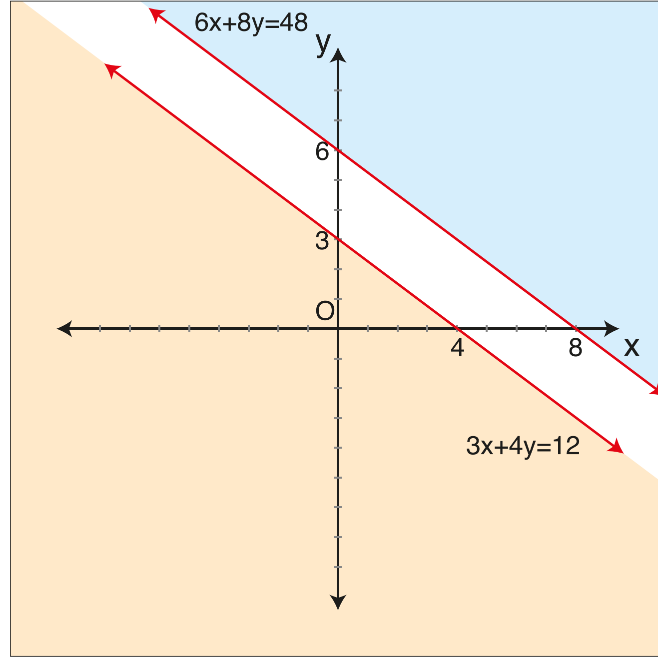


ÖRNEK 61

$\left.\begin{array}{l} 3x + 4y \leq 12 \\ 6x + 8y \geq 48 \end{array}\right\}$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini analitik düzlemde gösteriniz.

ÇÖZÜM

Verilen eşitsizliklerin belirttiği bölgeler aşağıdaki gibi gösterilir. Her iki eşitsizliğin belirttiği ortak bölge bulunmadığı için ÇK = Ø olur.

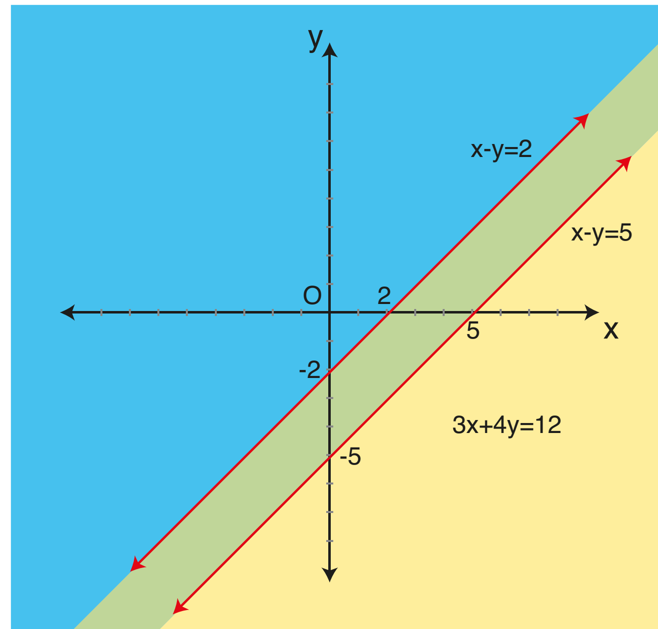


ÖRNEK 62

$2 \leq x - y \leq 5$ eşitsizliğini sağlayan (x, y) sıralı ikililerinin belirttiği bölgeyi analitik düzlemde gösteriniz.

ÇÖZÜM

$2 \leq x - y$ ve $x - y \leq 5$ eşitsizliklerinin belirttiği bölgeler çizilerek $2 \leq x - y \leq 5$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdaki yeşil boyalı bölge olarak bulunur.





ALIŞTIRMALAR

1. $A=\left\{(0,4),\left(\frac{1}{2},3\right),(-1,5),\left(5,\frac{2}{3}\right),(3,2)\right\}$ kümesinin elemanlarından kaç tanesinin $2x+3y=12$ denklemini sağladığını bulunuz.

2. Aşağıda verilen denklem sistemlerinin çözüm kümelerini bulunuz.

a) $-5x+3y=22$
$2x-3y=-16$

b) $7a-3b=10$
$2a+5b=-3$

c) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=-1$
$\frac{2x}{3}-\frac{y}{2}=10$

ç) $\frac{1}{x+1}-2y=-11$
$\frac{x}{x+1}+4y=22$

3. $3x+4y=78$ denkleminin çözüm kümesinin elemanlarından biri $(a-1\ ,\ a+1)$ ise a değerini bulunuz.

4. $\left.\begin{array}{r}-2x+5y=-3\\(m-2)\cdot x+2y=n-2\end{array}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesi sonsuz elemanlı ise $m\cdot n$ değerini bulunuz.

5. $\left.\begin{array}{l}y<x-5\\y\geq -x+6\end{array}\right\}$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesinin elemanlarını analitik düzlemde gösteriniz.

6. Toplamları en çok 6, farkları en az −2 olan gerçek sayı ikililerini analitik düzlemde gösteriniz.

7. $\left.\begin{array}{r}-5x+y>10\\x\leq -2\end{array}\right\}$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini analitik düzlemde gösteriniz.

8. $|x+y|<3$ eşitsizliğinin çözüm kümesini analitik düzlemde gösteriniz ($a\in\mathbb{R}^+$, $|x|<a$ ise $-a<x<a$ olduğunu hatırlayınız.).



9.3.4. Üslü İfadeler ve Denklemler



Terimler ve Kavramlar
- Üslü İfade
- Taban
- Üs
- Köklü İfade
- Rasyonel Kuvvet

Neler Öğreneceksiniz?

- Üslü ifade içeren denklemleri,
- Köklü ifade içeren denklemleri öğreneceksiniz.



Sembol ve Gösterimler

x^n, $\sqrt[n]{x^m}$, $x^{\frac{m}{n}}$

9.3.4.1. Üslü İfade İçeren Denklemler

Gerçek Sayıların Tam Sayı Kuvvetleri

Bir gerçek sayının kendisi ile birden çok çarpımını göstermek için üslü ifadeler kullanılır.

Örneğin 3 sayısının kendisi ile 4 kez çarpımı $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$ olarak gösterilir.

$2^6 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{6 \text{ tane}} = 64$ olur.

$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}_{4 \text{ tane}} = \frac{1}{16}$ olur.

$\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27}$ olur.

$a \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere a^n ifadesine **üslü ifade** adı verilir. a^n ifadesinde a sayısına **taban** , n ye ise **üs** veya **kuvvet** denir.

$a^n = \underbrace{a.a.a.a.a...a}_{n \text{ tane}}$ olarak hesaplanır.



Taban 0 dan farklı olmak üzere üs alma işlemlerinde kuvvet çift sayı ise işlem sonucu daima 0 dan büyüktür.

Aşağıda verilen çalışmaları inceleyiniz.

a) $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$ (Parantezin üzerindeki çift sayı olan kuvvetin sonucu pozitif yaptığına dikkat ediniz.)

b) $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$ (Tek kuvvetler tabanın işaretini etkilemez.)

c) $-2^4 = -(2) \cdot (2) \cdot (2) \cdot (2) = -16$

ç) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{32}{243}$

d) $0^4 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$ (0 sayısının pozitif kuvvetleri yine 0 olur.)

e) $(-1)^{200} = \underbrace{(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdots (-1)}_{200 \text{ tane}} = 1$

f) $(-1)^{201} = \underbrace{(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdots (-1)}_{201 \text{ tane}} = -1$



Bir Gerçek Sayının Negatif Kuvveti

$x \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

- $x^{-1} = \frac{1}{x}$ olur.
- $x^{-n} = (x^{-1})^n = \left(\frac{1}{x}\right)^n$ olur.

Aşağıdaki verilen çalışmaları inceleyiniz.

a) $5^{-1} = \frac{1}{5}$

b) $-5^{-1} = -\frac{1}{5}$

c) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{3}$

ç) $\left(-\frac{5}{11}\right)^{-1} = -\frac{11}{5}$

d) $7^{-2} = \left(\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49}$

e) $\left(\frac{2}{11}\right)^{-2} = \left(\frac{11}{2}\right)^2 = \frac{121}{4}$

f) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(-\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}$

g) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{27}{8}$

ğ) $\frac{4^{-1}}{5} = \frac{\frac{1}{4}}{5} = \frac{1}{20}$



Sıfır sayısının çarpma işlemine göre tersi olmadığından negatif kuvveti tanımsızdır. Sıfır sayısının pozitif kuvvetleri yine sıfırdır.

Üslü Sayılarda Toplama ve Çıkarma İşlemi

Hem tabanı hem de üssü aynı olan üslü sayılar, ortak paranteze alınarak toplanabilir veya çıkartılabilir.

$a, b, c, x \in \mathbb{R}$ ve $m \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$a \cdot x^m + b \cdot x^m - c \cdot x^m = (a + b - c) \cdot x^m$ olur.

Aşağıda verilen çalışmaları inceleyiniz.

a) $7 \cdot 10^8 + 2 \cdot 10^8 = (7 + 2) \cdot 10^8 = 9 \cdot 10^8$

b) $11 \cdot 3^{20} - 4 \cdot 3^{20} = (11 - 4) \cdot 3^{20} = 7 \cdot 3^{20}$

c) $-2 \cdot 7^{11} + 6 \cdot 7^{11} - 8 \cdot 7^{11} = (-2 + 6 - 8) \cdot 7^{11} = -4 \cdot 7^{11}$

ç) $x \cdot y^8 + z \cdot y^8 = (x + z) \cdot y^8$

d) $2^9 + 2^9 + 2^9 = (1 + 1 + 1) \cdot 2^9 = 3 \cdot 2^9$

e) $-m^n - m^n - m^n - m^n = (-1 - 1 - 1 - 1) \cdot m^n = -4 \cdot m^n$

f) $0{,}02 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^4 = 2 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^4 = (2 + 5) \cdot 10^4 = 7 \cdot 10^4$

Üslü Sayılarda Çarpma ve Bölme İşlemi

Tabanları aynı olan üslü sayılar çarpılabilir.

$x \in \mathbb{R}$, ve $a, b \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$ olur.

Bu ifadenin doğruluğu aşağıdaki gibi ispatlanır.

$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$ olduğu aşağıdaki gibi gösterilir.

$x^a \cdot x^b = \underbrace{x \cdot x \cdot \cdot\cdot x}_{a \text{ tane}} \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot \cdot\cdot x}_{b \text{ tane}} = \underbrace{x \cdot x \cdot \cdot\cdot x}_{a+b \text{ tane}} = x^{a+b}$ olur.

Aşağıdaki çalışmaları inceleyiniz.

a) $3^6 \cdot 3^{-2} = 3^{6+(-2)} = 3^4$

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^4 = \left(\frac{1}{5}\right)^{3+4} = \left(\frac{1}{5}\right)^7$

c) $(-2)^{11} \cdot (-2)^{13} = (-2)^{11+13} = (-2)^{24} = 2^{24}$

ç) $(-5)^7 \cdot (-5)^8 = (-5)^{7+8} = (-5)^{15}$

d) $m^{-3n} \cdot m^{5n} \cdot m^3 = m^{-3n+5n+3} = m^{2n+3}$

e) $x^7 \cdot x^5 = x^{7+5} = x^{12}$



$x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ ve $a, b \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\dfrac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$ olur.

Bu ifadenin doğruluğu aşağıdaki gibi ispatlanır.

$a < b$ olsun.

$$\frac{x^a}{x^b} = \frac{\overbrace{x \cdot x \cdot \cdot\cdot x}^{a \text{ tane}}}{\underbrace{x \cdot x \cdot \cdot\cdot x}_{b \text{ tane}}} = \underbrace{\frac{x}{x} \cdot \frac{x}{x} \cdot \cdot\cdot \frac{x}{x}}_{a \text{ tane}} \cdot \underbrace{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \cdot\cdot \frac{1}{x}}_{b-a \text{ tane}} = \left(\frac{x}{x}\right)^a \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{b-a} = x^{a-b} \text{ olur.}$$

Siz de $a = b$ ve $a > b$ durumlarını ispatlayınız.

Aşağıdaki çalışmaları inceleyiniz.

a) $\dfrac{10^{11}}{10^3} = 10^{11-3} = 10^8$

c) $\dfrac{(11)^{-6}}{(11)^{-2}} = 11^{-6-(-2)} = 11^{-4}$

b) $\dfrac{\left(\frac{1}{5}\right)^6}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{6-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^4$

ç) $\dfrac{(-13)^8}{(-13)^3} = (-13)^{8-3} = (-13)^5$

ÖRNEK 1

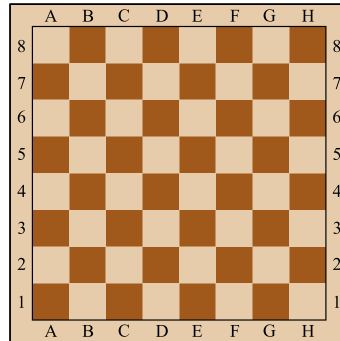


Dünya'nın Güneş etrafındaki dönme hızı saatte 108 000 km dir. Dünya'nın uzayda 1 saniyede kaç metre yol katettiğini üslü sayılar yardımıyla hesaplayınız.

ÇÖZÜM

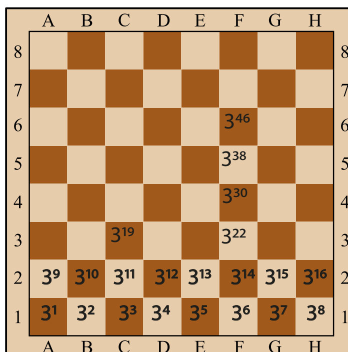
$108\,000 = 108 \cdot 10^3$ olarak yazılır. $108 \cdot 10^3$ km yi metreye çevirmek için bu sayının 1000 ile (10^3) çarpılması gerekir. $108 \cdot 10^3 \cdot 10^3 = 108 \cdot 10^6$ olur. 1 saat = 60 dakika ve 60 dakika ise $60 \cdot 60 = 3600 = 36 \cdot 10^2$ saniyedir. Dünya uzayda 1 saniyede $\dfrac{108 \cdot 10^6}{36 \cdot 10^2} = 3 \cdot 10^4 = 30\,000$ metre yol kateder.

ÖRNEK 2



Yandaki satranç tahtasında sırasıyla A1, B1, C1, ... , A2, B2, C2, ..., A8, B8, ..., H8 karelerine 3^1 den başlayarak 3^{64} e kadar sayılar yazılıyor. F6 karesine yazılan sayının C3 karesine yazılan sayıya oranını bulunuz.

ÇÖZÜM



Herhangi bir karenin hemen üstündeki kareye yazılan sayı, alttaki karede bulunan üslü sayının üssüne 8 eklenerek bulunmaktadır. Bu durumda F6 daki sayının C3 teki sayıya oranı $\dfrac{3^{46}}{3^{19}} = 3^{46-19} = 3^{27}$ olur.



ÖRNEK 3

$\dfrac{3^{-3}+3^{-3}+3^{-3}}{3^{-2}\cdot 3^{-2}\cdot 3^{-2}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$\dfrac{3^{-3}+3^{-3}+3^{-3}}{3^{-2}\cdot 3^{-2}\cdot 3^{-2}} = \dfrac{3\cdot 3^{-3}}{3^{-2-2-2}} = \dfrac{3^{-2}}{3^{-6}} = 3^{-2-(-6)} = 3^{4} = 81$ olur.

ÖRNEK 4

$\dfrac{0,2\cdot 5^{-6}}{\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$0,2 = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5} = 5^{-1}$ ve $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-2} = 5^{2}$ olur.

Bu durumda $\dfrac{5^{-1}\cdot 5^{-6}}{5^{2}} = \dfrac{5^{-7}}{5^{2}} = 5^{-7-2} = 5^{-9}$ olur.

Üslü İfadelerle İlgili Bazı Özellikler

1. $x \in \mathbb{R}$ ve $x \neq 0$ olmak üzere $x^{0} = 1$ olur.

Aşağıdaki çalışmaları inceleyiniz.

a) $11^{0} = 1$ **ç)** $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{0} = 1$ **f)** $(10^{20})^{0} = 1$

b) $-11^{0} = -1$ **d)** $\left(-\dfrac{3}{7}\right)^{0} = 1$ **g)** 0^{0} belirsizdir.

c) $(-11)^{0} = 1$ **e)** $\dfrac{3^{0}}{7} = \dfrac{1}{7}$ **ğ)** $(\sqrt{3})^{0} = 1$

2. $x, a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x^{1} = x$ ve $1^{a} = 1$ olur.

Aşağıdaki çalışmaları inceleyiniz.

a) $5^{1} = 5$ **c)** $(-7)^{1} = -7$ **d)** $1^{-14} = 1$

b) $1^{1000} = 1$ **ç)** $-8^{1} = -8$ **e)** $\underbrace{2017^{1}}_{2017} + \underbrace{1^{2017}}_{1} = 2018$

3. $x \in \mathbb{R}-\{0\}$ ve $a, b \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(x^{a})^{b} = (x^{b})^{a} = x^{a\cdot b}$ olur.

Bu ifadenin doğruluğu aşağıdaki gibi ispatlanır.

$$(x^{a})^{b} = \underbrace{x^{a}\cdot x^{a}\cdot x^{a}...x^{a}}_{b \text{ tane}} = x^{\overbrace{a+a+...+a}^{b \text{ tane}}} = x^{a\cdot b}$$

Aynı yolla $(x^{a})^{b} = x^{a\cdot b} = x^{b\cdot a} = (x^{b})^{a}$ olduğu görülür.

Aşağıdaki çalışmaları inceleyiniz.

a) $(2^{5})^{3} = 2^{15}$ **c)** $\left[\left(\dfrac{1}{5}\right)^{3}\right]^{-2} = \left(\dfrac{1}{5}\right)^{-6}$ **d)** $\left[\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{3}\right]^{6} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{18}$

b) $(3^{-4})^{5} = 3^{-20}$ **ç)** $\left[\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{3}\right]^{5} = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^{15}$ **e)** $(3^{x+1})^{2} = 3^{2x+2}$



1 sayısının bütün gerçek sayı kuvvetleri yine 1 olur.



4. $x, y \in \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $x^a \cdot y^a = (x \cdot y)^a$ olur.

Bu ifadenin doğruluğu aşağıdaki gibi ispatlanır.

$$x^a \cdot y^a = \underbrace{x \cdot x \cdot x \ldots x}_{a \text{ tane}} \cdot \underbrace{y \cdot y \cdot y \ldots y}_{a \text{ tane}} = \underbrace{(x \cdot y) \cdot (x \cdot y) \cdot (x \cdot y) \ldots (x \cdot y)}_{a \text{ tane}} = (x \cdot y)^a \text{ dır.}$$

Aşağıdaki çalışmaları inceleyiniz.

a) $3^4 \cdot 5^4 = 15^4$

b) $2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^7 = 30^7$

c) $2^8 \cdot 5^8 = 10^8$

ç) $7^a \cdot 3^a = 21^a$

d) $(-3)^5 \cdot (-2)^5 = 6^5$

e) $(-5)^7 \cdot (2)^7 = (-10)^7$

ÖRNEK 5

$A = 13 \cdot (16)^4 \cdot (125)^5$ olarak veriliyor. A sayısının kaç basamaklı olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

A sayısı 10 un kuvvetini bulunduracak şekilde düzenlenir.

$A = 13 \cdot (2^4)^4 \cdot (5^3)^5 = 13 \cdot 2^{16} \cdot 5^{15} = 13 \cdot 2^1 \cdot 2^{15} \cdot 5^{15} = 26 \cdot 10^{15}$ bulunur.

2 basamaklı olan 26 sayısının yanına 15 tane sıfır geldiği düşünülürse A sayısı 15+2=17 basamaklı olur.

5. $x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0$ ve $a \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\dfrac{x^a}{y^a} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^a$ olur.

Bu ifadenin doğruluğu aşağıdaki gibi ispatlanır.

$$\frac{x^a}{y^a} = \frac{\overbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}^{a \text{ tane}}}{\underbrace{y \cdot y \cdot y \cdots y}_{a \text{ tane}}} = \overbrace{\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \left(\frac{x}{y}\right) \cdot \left(\frac{x}{y}\right) \cdots \left(\frac{x}{y}\right)}^{a \text{ tane}} = \left(\frac{x}{y}\right)^a$$

Aşağıdaki çalışmaları inceleyiniz.

a) $\dfrac{6^8}{2^8} = \left(\dfrac{6}{2}\right)^8 = 3^8$

b) $\dfrac{(-10)^7}{(-2)^7} = \left(\dfrac{-10}{-2}\right)^7 = 5^7$

c) $\dfrac{(-10)^7}{(2)^7} = \left(-\dfrac{10}{2}\right)^7 = (-5)^7 = -5^7$

ç) $\dfrac{(\sqrt{3})^5}{(\sqrt{2})^5} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^5$

ÖRNEK 6

$x, a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $2^x = a$ ise 4^{x+1} üslü ifadesinin a cinsinden eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} 4^{x+1} &= 4^x \cdot 4 \\ &= (2^2)^x \cdot 4 \\ &= (2^x)^2 \cdot 4 \quad (2^x \text{ yerine } a \text{ yazılır.}) \\ &= 4 \cdot a^2 \text{ olur.} \end{aligned}$$



ÖRNEK 7

$\dfrac{-5\cdot 7^n+9\cdot 7^n+45\cdot 7^n}{-7^n-6\cdot 7^n}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{-5\cdot 7^n+9\cdot 7^n+45\cdot 7^n}{-7^n-6\cdot 7^n}=\frac{(-5+9+45)\cdot \cancel{7^n}}{(-1-6)\cdot \cancel{7^n}}=\frac{49}{-7}=-7 \text{ olur.}$$

ÖRNEK 8

x, a, b, c $\in \mathbb{R}$ olmak üzere

$\left.\begin{array}{l}2^x=a\\3^x=b\\5^x=c\end{array}\right\}$ olarak veriliyor. $(720)^x$ üslü ifadesini a, b, c cinsinden yazınız.

ÇÖZÜM

720 sayısı asal çarpanlara ayrılırsa

720	2
360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$720=2^4\cdot 3^2\cdot 5$ olur.

$(2^4\cdot 3^2\cdot 5)^x=2^{4x}\cdot 3^{2x}\cdot 5^x$

$=(2^x)^4\cdot(3^x)^2\cdot 5^x$

$=a^4\cdot b^2\cdot c$ bulunur.

ÖRNEK 9

$a=8^{12},\quad b=\left(\frac{1}{16}\right)^{-10},\quad c=(0,25)^{-19}$

Yukarıda verilen a, b, c sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

ÇÖZÜM

$a=8^{12}=(2^3)^{12}=2^{36}$

$b=\left(\frac{1}{16}\right)^{-10}=(2^{-4})^{-10}=2^{40}$

$c=(0,25)^{-19}=\left(\frac{25}{100}\right)^{-19}=\left(\frac{1}{4}\right)^{-19}=\left(\frac{1}{2^2}\right)^{-19}=(2^{-2})^{-19}=2^{38}$ olur.

Bu durumda sayılar $a<c<b$ olarak sıralanır.

ÖRNEK 10

$K=-2^{90},\ L=-5^{45},\ M=-3^{60}$

Yukarıda verilen K, L, M sayılarını büyükten küçüğe doğru sıralayınız.

ÇÖZÜM

K, L, M sayılarının kuvvetlerinin en büyük ortak böleni 15 olduğundan verilen her sayının üssü 15 olacak şekilde düzenlenir.

$K=-(2^6)^{15}=-64^{15}$

$L=-(5^3)^{15}=-125^{15}$

$M=-(3^4)^{15}=-81^{15}$

Bu durumda $K>M>L$ olur.



İki üslü ifadenin birbirine göre büyüklük ya da küçüklüğü araştırılırken tabanları eşitlemek ya da üsleri eşitlemek kullanılan yöntemlerden ikisidir.



Üslü Denklemler

"2 sayısının kaçıncı kuvveti 32 dir?" olarak verilen sözel ifade matematiksel olarak bir üslü denklem oluşturur. Bu denklem $2^x = 32$ olarak yazılır.

32 sayısı 2 nin beşinci kuvveti olduğundan $2^x = 2^5$ ise $x = 5$ olur.

1. $x \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$ ve $m, n \in \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere $x^m = x^n$ ise $m = n$ olur.
Yani tabandaki sayının −1, 0 ya da 1 olmadığı üslü denklemlerde eşitliğin her iki tarafındaki tabanlar eşit ise üsler de eşittir.

ÖRNEK 11

$5^{2x-2} = 625$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$5^{2x-2} = 5^4 \Rightarrow 2x - 2 = 4$

$2x = 6$

$x = 3$ olur. Bu durumda $ÇK = \{3\}$ olur.

ÖRNEK 12

$81^{x+2} - 9^{x+6} = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$81^{x+2} - 9^{x+6} = 0$

$81^{x+2} = 9^{x+6}$

$(3^4)^{x+2} = (3^2)^{x+6}$ (Her iki üslü sayının da tabanı 3 olarak yazıldı.)

$3^{4x+8} = 3^{2x+12}$

$4x+8 = 2x+12$

$2x = 4$ ve $x = 2$ olur.

ÖRNEK 13

$2^{n+3} - 2^{n+1} + 2^n = 112$ denklemini sağlayan n değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$2^n \cdot 2^3 - 2^n \cdot 2^1 + 2^n = 112$

$2^n \cdot (2^3 - 2 + 1) = 112$

$2^n \cdot 7 = 112$

$2^n = 16$

$2^n = 2^4$ ve $n = 4$ olur.

ÖRNEK 14

$\dfrac{2 \cdot 27^x}{3^{x-1} \cdot 2^x} = \dfrac{81}{2^{x-1} \cdot 3^x}$ denklemini sağlayan x değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

İçler dışlar çarpımı yapılırsa $2 \cdot 2^{x-1} \cdot 27^x \cdot 3^x = 81 \cdot 3^{x-1} \cdot 2^x$

$2^x \cdot (3^3)^x \cdot 3^x = 3^4 \cdot 3^{x-1} \cdot 2^x$

$2^x \cdot 3^{3x} \cdot 3^x = 3^4 \cdot 3^{x-1} \cdot 2^x$

$2^x \cdot 3^{4x} = 3^{x+3} \cdot 2^x$

$\dfrac{2^x \cdot 3^{4x}}{2^x} = \dfrac{3^{x+3} \cdot 2^x}{2^x}$

$3^{4x} = 3^{x+3}$

$4x = x + 3$

$3x = 3$ ve $x = 1$ olur.



2. $x, y \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$ ve $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ olmak üzere
$x^n = y^n$ denkleminde
a) n tek ise $x = y$
b) n çift ise $|x| = |y|$ olur.

Aşağıdaki çalışmaları inceleyiniz.

a) $x^3 = 2^3$ ise $x = 2$ olur.

b) $x^4 = 16$ ise $x^4 = 2^4$ ve $|x| = 2$ olur. $x = 2$ veya $x = -2$ olur.

c) $x^{2013} = -1$ ise $x^{2013} = (-1)^{2013}$ ve $x = -1$ olur.

ç) $x^{2000} = 1$ ise $|x| = 1$ dir ve $x = 1$ veya $x = -1$ olur.

d) $(...)^{12} = 1$ ise parantez içine 1 veya -1 sayıları yazılabilir.

e) $(x + 2)^{15} = (-4)^{15}$ ise $x + 2 = -4$ ve $x = -6$ olur.



-1 sayısının

- tek kuvvetleri -1,
- çift kuvvetleri $+1$ olur.

ÖRNEK 15

$\left(\frac{x-1}{2}\right)^5 = 32$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\left(\frac{x-1}{2}\right)^5 = 2^5$

$\frac{x-1}{2} = 2$

$x - 1 = 4$

$x = 5$ olur. Bu durumda $ÇK = \{5\}$ olur.



İki üslü ifadenin birbirine eşit olması durumunda eşitliğin her iki tarafında üsler eşit ve çift ise tabanlar birbirine mutlak değerce eşittir.

ÖRNEK 16

$\left(\frac{x}{3} - 1\right)^4 = 81$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\left(\frac{x}{3} - 1\right)^4 = 3^4 \Rightarrow \left|\frac{x}{3} - 1\right| = 3$ olur.

$\frac{x}{3} - 1 = 3$ veya $\frac{x}{3} - 1 = -3$

$\frac{x}{3} = 4$ veya $\frac{x}{3} = -2$

$x = 12$ veya $x = -6$

Bu durumda $ÇK = \{-6, 12\}$ olur.

ÖRNEK 17

$(2x - 5)^8 = 16^6$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

16^6 sayısı üssü 8 olacak şekilde düzenlenir.

$16^6 = (2^4)^6 = 2^{24} = (2^3)^8 = 8^8$ olur.

$(2x - 5)^8 = 8^8$ ise $|2x - 5| = 8$ olur.

$2x - 5 = 8$ veya $2x - 5 = -8$

$2x = 13$ $2x = -3$

$x = \frac{13}{2}$ $x = -\frac{3}{2}$

$ÇK = \left\{-\frac{3}{2}, \frac{13}{2}\right\}$ olur.



ÖRNEK 18

$(2x-y+12)^2+(x+y-6)^2=0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

0 hariç tüm gerçek sayıların karesi pozitif olduğundan eşitlik yalnızca $(0)^2+(0)^2=0$ durumunda gerçekleşebilir.

$$\begin{array}{r} 2x-y+12=0 \\ +\quad x+y-6=0 \\ \hline 3x+6=0 \\ 3x=-6 \\ x=-2 \end{array}$$

Yanda bulunan $x=-2$ değeri $x+y-6=0$ denkleminde yerine yazılarak

$-2+y-6=0$

$y-8=0$

$y=8$ bulunur. Bu durumda ÇK=$\{(-2\,,8)\}$ olur.

ÖRNEK 19

$x\in\mathbb{R}$ olmak üzere $(x+8)^{2x+10}=1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$a^b=1$ denkleminin sağlanabilmesi için üç durum söz konusudur.

1. $b=0$ ve $a\neq 0$ olmalıdır (Her ikisi de sıfır olur ise $0^0\neq 1$ olur.).
2. $a=1$ ve $b\in\mathbb{R}$ olur.
3. $a=-1$ ve b nin bir çift sayı olması gerekir.

Bu durumlar örneğe uyarlanır.

1. $2x+10=0$
   $2x=-10$
   $x=-5$ olur.
   -5 değeri tabanı 0 yapmadığı için çözüm kümesinin bir elemanıdır.
2. $x+8=1$ için $x=-7$ olur.
3. $x+8=-1$ için $x=-9$ bulunur. $x=-9$ için taban -1 ve üs $2\cdot(-9)+10=-8$ bir çift sayı olduğundan verilen denklemi sağlar.

Dolayısıyla ÇK $=\{-9,-7,-5\}$ olur.



$a\in\mathbb{R}$ ve $m,n\in\mathbb{R}-\{0\}$ olmak üzere

- $0<a<1$ ve $a^n<a^m$ ise $n>m$ olur.
- $a>1$ ve $a^n<a^m$ ise $n<m$ olur.

ÖRNEK 20

$\left(\frac{3}{5}\right)^{x-1}<\left(\frac{25}{9}\right)^{x-4}$ eşitsizliğini sağlayan x değerlerinin çözüm kümesini aralık kavramı ile gösteriniz.

ÇÖZÜM

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x-1}<\left(\frac{25}{9}\right)^{x-4}\Rightarrow\left(\frac{3}{5}\right)^{x-1}<\left(\left(\frac{5}{3}\right)^{2}\right)^{x-4}\Rightarrow\left(\frac{3}{5}\right)^{x-1}<\left(\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}\right)^{x-4}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x-1}<\left(\frac{3}{5}\right)^{-2x+8}$$

$x-1>-2x+8$

$3x>9$

$x>3$ olur.

Bu durumda ÇK $=(3,\infty)$ olur.



ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki soruları cevaplandırınız.

a) $2^{x-1} = a$ ise 4^{x+1} in a cinsinden eşitini bulunuz.

b) $\dfrac{(-2^3)^4 \cdot (-2)^{-3}}{(-2^{-2})^{-3} \cdot (-2^{-1})}$ işleminin sonucunu bulunuz.

c) $a = 2^{(4^2)}$ ve $b = (2^4)^3$ ise $\frac{a}{b}$ ifadesinin eşitini bulunuz.

ç) x ve y , 0 dan farklı gerçek sayılardır.

$\dfrac{(x^3)^4 \cdot (y^6)^3}{(x^2 \cdot y^4)^5}$ işleminin sonucunu en sade hâlde yazınız.

2. a ve b birer tam sayı olmak üzere $7^{4a-2b-4} = 6^{a-5b+8}$ ise a + b değerini bulunuz.

3. $a = 4^x + 3$ ve $b = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2x} - 3$ olarak veriliyor. a nın b cinsinden eşitini bulunuz.

4. $a^x \neq 1$ olmak üzere $\dfrac{11}{a^x - 1} + \dfrac{11}{a^{-x} - 1}$ işleminin sonucunu bulunuz.

5. $\dfrac{2 \cdot 4^{a+1}}{8^{a+1}} = \dfrac{1}{4}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

6. $(x-4)^{2x-8} = 1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

7. $x, y, z \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$x^4 \cdot y^3 \cdot z^5 < 0$
$y^5 \cdot z^4 > 0$
$x^3 \cdot z < 0$

yukarıda verilenlere göre aşağıdaki eşitsizliklerden doğru olanın yanına (D), yanlış olanın yanına (Y) yazınız.

I. $y < 0$ tür . (.......)

II. $x < 0$ tür . (.......)

III. $z > 0$ tür . (.......)

IV. $x \cdot y > 0$ tür . (.......)

V. $\frac{y}{x} > 0$ tür . (.......)

8. $81^{10} + 27^{14} = a \cdot 9^{20}$ denklemini sağlayan a sayısını bulunuz.

9. $3 \cdot 2^a = x$ veriliyor. $9 \cdot 16^a$ ifadesinin x cinsinden eşitini bulunuz.

10. $\left(\frac{2-x}{5}\right)^3 + 8 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.



9.3.4.2. Köklü İfadeleri İçeren Denklemler

Köklü Sayılar

$n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$ ve $a, x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x^n = a$ eşitliğini sağlayan x değerlerine **a nın n. kuvvetten kökü** denir ve" $x = \sqrt[n]{a}$ " ile gösterilir.
$x^n = a$ denkleminin çözümü üç farklı durumda incelenir.

1. $a > 0$ için

n tek ise $x = \sqrt[n]{a}$ olur.
Örneğin $x^7 = 5$ ise $x = \sqrt[7]{5}$ olur.
n çift ise $x = +\sqrt[n]{a}$ veya $x = -\sqrt[n]{a}$ olur.
Örneğin $x^6 = 5$ ise $x = \sqrt[6]{5}$ veya $x = -\sqrt[6]{5}$ olur.

2. $a < 0$ için

n tek ise $x = \sqrt[n]{a}$ olmak üzere sadece bir gerçek sayı kökü vardır.
Örneğin $x^3 = -11$ ise $x = \sqrt[3]{-11}$ olur.
n çift ise x in bir gerçek sayı kökü yoktur.
Örneğin $x^2 = -11$ eşitliğini sağlayan bir x gerçek sayısı bulunamaz.
$\sqrt{-11} \notin \mathbb{R}$ olur.

3. $a = 0$ ise $\sqrt[n]{0} = 0$ olur.

- $n = 2 \Rightarrow \sqrt[2]{a}$ ya da $\sqrt{a}$ yazılır ve **ikinci dereceden kök a** ya da **kare kök a** olarak okunur. Derece 2 ise yazılmayabilir.
- $n = 3 \Rightarrow \sqrt[3]{a}$ yazılır ve **üçüncü dereceden kök a** ya da **küp kök a** olarak okunur.
- $n = 4 \Rightarrow \sqrt[4]{a}$ yazılır ve **dördüncü dereceden kök a** olarak okunur.



Bir köklü ifadede kökün derecesi çift ve kök içindeki sayı sıfırdan küçükse bu köklü ifade bir gerçek sayı belirtmez.

$n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$\sqrt[2n+1]{a}$ ifadesinin tanımlı olması için $a \in \mathbb{R}$ olmalıdır.

$\sqrt[2n]{a}$ ifadesinin tanımlı olması için $a \geq 0$ olmalıdır.

ÖRNEK 21

$\sqrt{3}, \sqrt{-3}, \sqrt[6]{2}, \sqrt[10]{-2}, \sqrt[4]{\frac{5}{2}}, \sqrt{-1}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[7]{-1}$ sayılarını gerçek sayı olanlar ve olmayanlar şeklinde iki gruba ayırınız.

ÇÖZÜM

- $\sqrt{3}, \sqrt[6]{2}, \sqrt[4]{\frac{5}{2}}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[7]{-1}$ sayıları birer gerçek sayıdır.
- $\sqrt{-3}, \sqrt[10]{-2}, \sqrt{-1}$ sayıları gerçek sayı değildir.

ÖRNEK 22

$A = \sqrt{x-5} - \sqrt{9-x}$ sayısının gerçek sayı belirtmesi için x in değer aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM

$x - 5 \geq 0$ ve $9 - x \geq 0 \Rightarrow x \geq 5$ ve $9 \geq x$
$\Rightarrow 5 \leq x \leq 9$ olur.

ÖRNEK 23

$\sqrt[2017]{\frac{4}{x+3}}$ ifadesinin gerçek sayı belirtmesi için x in çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

Derece tek sayı olduğundan köklü ifadeyi tanımsız yapan (paydayı sıfır yapan) $x = -3$ değeri dışında bir gerçek sayı yoktur.
Dolayısıyla $ÇK = \mathbb{R} - \{-3\}$ bulunur.



$x \in \mathbb{R}^+$ ve $n, m \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ olur.

Yani her köklü sayı aynı zamanda bir üslü sayı olarak yazılabilir.

Aşağıdaki çalışmaları inceleyiniz

a) $\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$ **c)** $\sqrt{7} = 7^{\frac{1}{2}}$ **d)** $\sqrt[3]{2^7} = 2^{\frac{7}{3}}$

b) $3^{\frac{21}{11}} = \sqrt[11]{3^{21}}$ **ç)** $\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{3}{5}\right)^3}$ **e)** $(-2)^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{-2}$



Her köklü sayı aynı zamanda bir üslü sayı belirtir.

$n \in \mathbb{Z}^+$ ve $n \geq 2$ olmak üzere $x \in \mathbb{R}$ için
- n tek ise $\sqrt[n]{x^n} = x$
- n çift ise $\sqrt[n]{x^n} = |x|$

olarak kök dışına çıkarılır.

Aşağıdaki çalışmaları inceleyiniz.

a) $\sqrt[7]{2^7} = 2$ **c)** $\sqrt[10]{(-2)^{10}} = |-2| = 2$ **ç)** $\sqrt[7]{-2^7} = -2$ **d)** $\sqrt[4]{5^4} = |5| = 5$



Kök dereceleri çift olan köklü ifadelerin içleri negatif olamayacağından, içindeki sayılar kök dışına 0 ya da 0 dan büyük çıkarılır.

ÖRNEK 24

x,y gerçek sayılar ve $x < 0 < y$ olmak üzere

$\sqrt[4]{x^4} + \sqrt[5]{(-y)^5} - \sqrt[3]{(x-y)^3} + \sqrt{(x-y)^2}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{x^4} + \sqrt[5]{(-y)^5} - \sqrt[3]{(x-y)^3} + \sqrt{(x-y)^2} &= |x| + (-y) - (x-y) + |x-y| \\ &= -x - y - x + y - x + y \\ &= -3x + y \text{ olur.}\end{aligned}$$

ÖRNEK 25

$\dfrac{\sqrt{0,25} + \sqrt{0,64}}{\sqrt{0,01} - \sqrt{1,69}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{\sqrt{\frac{25}{100}} + \sqrt{\frac{64}{100}}}{\sqrt{\frac{1}{100}} - \sqrt{\frac{169}{100}}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{5}{10}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{8}{10}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{10}\right)^2} - \sqrt{\left(\frac{13}{10}\right)^2}} = \frac{\frac{5}{10} + \frac{8}{10}}{\frac{1}{10} - \frac{13}{10}} = \frac{\frac{13}{10}}{-\frac{12}{10}} = \frac{13}{10} \cdot \left(-\frac{10}{12}\right) = -\frac{13}{12} \text{ olur.}$$

ÖRNEK 26

$\sqrt[3]{23 + \sqrt{16}} - \sqrt{27 - \sqrt[3]{8}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{23 + \sqrt{4^2}} - \sqrt{27 - \sqrt[3]{2^3}} &= \sqrt[3]{23 + 4} - \sqrt{27 - 2} \\ &= \sqrt[3]{27} - \sqrt{25} \\ &= \sqrt[3]{3^3} - \sqrt{5^2} \\ &= 3 - 5 \\ &= -2 \text{ olur.}\end{aligned}$$



Köklü Sayılarda Toplama ve Çıkarma İşlemleri

$n \geq 2$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olsun. $x \in \mathbb{R}^+$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$a \cdot \sqrt[n]{x} + b \cdot \sqrt[n]{x} = (a+b) \cdot \sqrt[n]{x}$ olur.

Kök dereceleri ve kök içleri aynı olan iki köklü ifade toplanabilir ya da çıkarılabilir.

Aşağıdaki çalışmaları inceleyiniz.

a) $5 \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot \sqrt{2} = (5-2) \cdot \sqrt{2} = 3 \cdot \sqrt{2}$

b) $-6 \cdot \sqrt[3]{5} + 4 \cdot \sqrt[3]{5} = (-6+4) \cdot \sqrt[3]{5} = -2 \cdot \sqrt[3]{5}$

c) $4 \cdot \sqrt[5]{2\sqrt{3}} + 6 \cdot \sqrt[5]{2\sqrt{3}} = (4+6) \cdot \sqrt[5]{2\sqrt{3}} = 10 \cdot \sqrt[5]{2\sqrt{3}}$

ç) $\dfrac{-10 \cdot \sqrt[7]{2} + 2 \cdot \sqrt[7]{2}}{6 \cdot \sqrt[7]{2} - 4 \cdot \sqrt[7]{2}} = \dfrac{(-10+2) \cdot \sqrt[7]{2}}{(6-4) \cdot \sqrt[7]{2}} = \dfrac{-8 \cdot \sqrt[7]{2}}{2 \cdot \sqrt[7]{2}} = -4$

Köklü İfadelerde Çarpma ve Bölme İşlemleri

Kök dereceleri aynı olan köklü ifadeler birbiriyle çarpılabilir veya bölünebilir.

$a, b \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{Z}^+$ ve $n \geq 2$ olmak üzere

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

$b \neq 0$ olmak koşuluyla $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ olur.

Bu ifadenin doğruluğu aşağıdaki gibi ispatlanır.

- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (a.b)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a.b}$ olur.
- $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \dfrac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ olur $(b \neq 0)$.

Aşağıdaki çalışmaları inceleyiniz.

a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{15}$

b) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{7^2} = 7$

c) $\sqrt[3]{-5} \cdot \sqrt[3]{-2} = \sqrt[3]{10}$

ç) $\sqrt[5]{\sqrt{7}} \cdot \sqrt[5]{\sqrt{2}} = \sqrt[5]{\sqrt{7} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt[5]{\sqrt{14}}$

d) $\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{20}{2}} = \sqrt{10}$

e) $\dfrac{\sqrt[11]{-40}}{\sqrt[11]{-5}} = \sqrt[11]{\dfrac{-40}{-5}} = \sqrt[11]{8}$



Köklü sayılar arasında dört işlem yapabilmek için önce kök derecelerinin eşit olup olmadığına bakılır. Dereceler farklıysa eşit hâle getirdikten sonra işleme başlanır.

Kök Derecesini Genişletme veya Sadeleştirme

$x \in \mathbb{R}^+, m \in \mathbb{Z}; n, k \in \mathbb{Z}^+$ ve $n \geq 2$ olmak üzere $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n \cdot k]{x^{m \cdot k}} = \sqrt[\frac{n}{k}]{x^{\frac{m}{k}}}$ tir.

Bir köklü ifadenin hem kök derecesi hem de kök içindeki ifadenin üssü aynı pozitif tam sayı ile çarpılır ya da bölünürse değeri değişmez.

Aşağıdaki çalışmaları inceleyiniz.

$\sqrt[5]{7^4} = \sqrt[3 \cdot 5]{7^{3 \cdot 4}} = \sqrt[15]{7^{12}}$

$\sqrt[10]{3^{15}} = \sqrt[\frac{10}{5}]{3^{\frac{15}{5}}} = \sqrt{3^3} = \sqrt{27}$

ÖRNEK 27

$\sqrt[3]{5}$ sayısının kökünün derecesini 12 yapınız.

ÇÖZÜM

$\sqrt[3]{5}$ sayısının kökünün derecesini 12 yapmak için bu sayının hem kökünün derecesi hem de kök içindeki sayının kuvveti 4 ile çarpılır.

Buradan $\sqrt[4 \cdot 3]{5^{4 \cdot 1}} = \sqrt[12]{5^4} = \sqrt[12]{625}$ olur.



ÖRNEK 28

$\sqrt[7]{-3}$ kökünün derecesini 28 yapınız.

ÇÖZÜM

$\sqrt[7]{-3} = -\sqrt[7]{3} = -\sqrt[7\cdot 4]{3^{1\cdot 4}} = -\sqrt[28]{3^4} = -\sqrt[28]{81}$ olur.

ÖRNEK 29

$A = \sqrt{2}, B = \sqrt[3]{5}$ ve $C = \sqrt[4]{3}$ sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

ÇÖZÜM

Kök dereceleri aynı olan köklü sayıların kök içlerine bakılarak sıralama yapılacağından kök dereceleri 12 de eşitlenir.

$A = \sqrt[6\cdot 2]{2^6} = \sqrt[12]{64}$

$B = \sqrt[4\cdot 3]{5^4} = \sqrt[12]{625}$

$C = \sqrt[3\cdot 4]{3^3} = \sqrt[12]{27}$ bulunur.

Bu durumda sıralama C < A < B şeklinde olur.

ÖRNEK 30

$\dfrac{\sqrt[5]{2}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Köklü ifadelerde çarpma ve bölme işlemi yapılabilmesi için kök derecelerinin aynı olması gerektiğinden verilen köklü ifadelerin kök dereceleri 20 yapılır.

$$\frac{\sqrt[4\cdot 5]{2^4}\cdot\sqrt[10\cdot 2]{2^{10}}}{\sqrt[4\cdot 5]{2^5}} = \frac{\sqrt[20]{2^4}\cdot\sqrt[20]{2^{10}}}{\sqrt[20]{2^5}} = \frac{\sqrt[20]{2^{14}}}{\sqrt[20]{2^5}} = \sqrt[20]{\frac{2^{14}}{2^5}} = \sqrt[20]{2^{14-5}} = \sqrt[20]{2^9} \text{ olur.}$$

Köklü İfadelerle İlgili Bazı Özellikler

1. $x \in \mathbb{R}^+$, m, n $\in \mathbb{Z}$ ve n≥2 olmak üzere $(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$ olur.

Bu ifadenin doğruluğu aşağıdaki gibi ispatlanır.

$$(\sqrt[n]{x})^m = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} \text{ olur.}$$

Aşağıdaki çalışmaları inceleyiniz.

a) $(\sqrt{5})^2 = \sqrt{5^2} = 5$

b) $(\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{3}})^3 = \sqrt{2^3\cdot(\sqrt[3]{3})^3} = \sqrt{8\cdot 3} = \sqrt{24}$

c) $(\sqrt[3]{7})^9 = \sqrt[3]{7^9} = 7^{\frac{9}{3}} = 7^3$

ç) $(\sqrt[5]{-2})^3 = (-\sqrt[5]{2})^3 = -\sqrt[5]{2^3} = -\sqrt[5]{8}$



Köklü ifadelerde elde ettiğimiz her özelliğin aslında üslü ifadeler yardımıyla ispatlandığına dikkat ediniz.

2. $x, y \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{Z}^+$ ve $n \geq 2$ olmak üzere

- $\sqrt[n]{x^n\cdot y} = x\cdot\sqrt[n]{y}$ olur.
- $x\cdot\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x^n\cdot y}$ olur.

Aşağıdaki çalışmaları inceleyiniz.

a) $\sqrt{20} = \sqrt{4\cdot 5} = \sqrt{2^2\cdot 5} = 2\sqrt{5}$

b) $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8\cdot 2} = \sqrt[3]{2^3\cdot 2} = 2\cdot\sqrt[3]{2}$

c) $2\cdot\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^3\cdot 4} = \sqrt[3]{32}$

ç) $\dfrac{\sqrt{40}-\sqrt{90}}{\sqrt{0,1}} = \dfrac{\sqrt{4\cdot 10}-\sqrt{9\cdot 10}}{\sqrt{\frac{1}{10}}} = \dfrac{2\sqrt{10}-3\sqrt{10}}{\frac{1}{\sqrt{10}}} = \dfrac{-\sqrt{10}}{\frac{1}{\sqrt{10}}} = -\sqrt{10}\cdot\sqrt{10} = -10$



3. $x \in \mathbb{R}^+, m, n \in \mathbb{Z}^+, m \geq 2$ ve $n \geq 2$ olmak üzere $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$ olur.

Bu ifadenin doğruluğu aşağıdaki gibi ispatlanır.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m]{x^{\frac{1}{n}}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = x^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{x} \text{ olur.}$$

Aşağıdaki çalışmaları inceleyiniz.

a) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[3 \cdot 4]{2} = \sqrt[12]{2}$

b) $\sqrt[5]{\sqrt{\sqrt[3]{3}}} = \sqrt[5 \cdot 2 \cdot 3]{3} = \sqrt[30]{3}$

c) $\sqrt[3]{3 \cdot \sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{3^2 \cdot 2}} = \sqrt[3]{\sqrt{18}} = \sqrt[3 \cdot 2]{18} = \sqrt[6]{18}$

4. $x \in \mathbb{R}^+, m, n \in \mathbb{Z}^+$ ve $n \geq 2$ olmak üzere $\frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$ ifadesinin paydasını bir rasyonel sayı yapmak için hem pay hem de payda $\sqrt[n]{x^{n-m}}$ ile çarpılır.

Bu ifadenin doğruluğu aşağıdaki gibi ispatlanır.

$$\frac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = \frac{\sqrt[n]{x^{n-m}}}{\sqrt[n]{x^{m+n-m}}} = \frac{\sqrt[n]{x^{n-m}}}{\sqrt[n]{x^n}} = \frac{\sqrt[n]{x^{n-m}}}{x} \text{ olur.}$$
$(\sqrt[n]{x^{n-m}})$

ÖRNEK 31

$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ifadesinin paydasını rasyonel yapınız.

ÇÖZÜM

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2} \text{ olur.}$$
$(\sqrt[3]{2^2})$

5. $x, y \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = x - y$ olduğundan $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ ile $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ nin çarpımı bir rasyonel sayıdır. $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$ olduğundan $\sqrt{x}$ ile $\sqrt{x}$ in çarpımı bir rasyonel sayıdır.

Aşağıdaki çalışmaları inceleyiniz.

$2\sqrt{3} - \sqrt{5}$ sayısının $2\sqrt{3} + \sqrt{5}$ sayısı ile çarpımı,

$5\sqrt{7} + 3\sqrt{11}$ sayısının $5\sqrt{7} - 3\sqrt{11}$ sayısı ile çarpımı,

$\sqrt{7} - 3$ sayısının $\sqrt{7} + 3$ sayısı ile çarpımı,

$\sqrt{5}$ sayısının $\sqrt{5}$ sayısı ile çarpımı bir rasyonel sayıdır.

ÖRNEK 32

$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{2}{\sqrt{2}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{2-1} - \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} + \frac{2\sqrt{2}}{2}$$
$(\sqrt{2}+1)\ (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2})$

$$= 2 + \sqrt{2} - \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} = 3 + \sqrt{2} \text{ olur.}$$



ÖRNEK 33

$\left(\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\right)^2$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\left(\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\right)^2=\left(\frac{5-\sqrt{15}-\sqrt{15}+3}{5-3}-\frac{5+\sqrt{15}+\sqrt{15}+3}{5-3}\right)^2$$

$(\sqrt{5}-\sqrt{3})$ $(\sqrt{5}+\sqrt{3})$

$$=\left(\frac{8-2\sqrt{15}}{2}-\frac{8+2\sqrt{15}}{2}\right)^2$$

$$=\left(\frac{8-2\sqrt{15}-8-2\sqrt{15}}{2}\right)^2$$

$$=\left(\frac{-4\sqrt{15}}{2}\right)^2$$

$$=(-2\sqrt{15})^2$$

$= 60$ olur.

ÖRNEK 34

$\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ işleminin sonucunu bulunuz.



$\sqrt{a^2+2ab+b^2}=\sqrt{(a+b)^2}$
$=|a+b|$
olduğuna dikkat ediniz.

ÇÖZÜM

$5=3+2$

$5=(\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2$ olarak yazılır ve sonuç verilen ifadede yerine konulursa

$\underbrace{\sqrt{(\sqrt{3})^2+2\sqrt{6}+(\sqrt{2})^2}}_{\text{tam kare ifade}}=\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}=|\sqrt{3}+\sqrt{2}|=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ olur.

$\sqrt{a\pm2\sqrt{b}}$ durumundaki köklü ifadelerde $a=m+n$ ve $b=m\cdot n$ olmak üzere
$\sqrt{a+2\sqrt{b}}=\sqrt{m}+\sqrt{n}$ ve $\sqrt{a-2\sqrt{b}}=\sqrt{m}-\sqrt{n}$ $(m>n)$ şeklinde yazılır.

ÖRNEK 35

$\sqrt{8-2\sqrt{15}}+\sqrt{8+2\sqrt{15}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$\sqrt{8-2\sqrt{15}}+\sqrt{8+2\sqrt{15}}=\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{3}=2\sqrt{5}$ olur.

$5+3$ $5\cdot3$ $5+3$ $5\cdot3$

ÖRNEK 36

$\sqrt{\sqrt[3]{16^{x+1}}}=\sqrt[4]{8^{x+2}}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{\sqrt[3]{(2^4)^{x+1}}}&=\sqrt[4]{(2^3)^{x+2}}\\ \sqrt[6]{2^{4x+4}}&=\sqrt[4]{2^{3x+6}}\\ 2^{\frac{4x+4}{6}}&=2^{\frac{3x+6}{4}}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{aligned}\frac{4x+4}{6}&=\frac{3x+6}{4}\\ 16x+16&=18x+36\\ -2x&=20\\ x&=-10 \text{ olup } ÇK=\{-10\} \text{ olur.}\end{aligned}\right.$$



ALIŞTIRMALAR

1. $\dfrac{\sqrt{2,7}+\sqrt{0,3}}{\sqrt{1,2}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

2. $a=\sqrt{5}+3$ ise $\dfrac{(a-8)\cdot(a+2)}{4}$ işleminin sonucunu bulunuz.

3. $\dfrac{\sqrt{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

4. $\sqrt{6-|x-2|}$ sayısının bir gerçek sayı olabilmesi için x tam sayısının kaç farklı değer alabileceğini bulunuz.

5. $\dfrac{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt[4]{5}}=5^x$ ise x değerini bulunuz.

6. $\sqrt[3]{\dfrac{16^{x+1}}{8^{x-1}}}=4$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

7. $a<b<0$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\sqrt{(a-b)^2}-\sqrt[3]{(b-a)^3}-\sqrt[4]{a^4}$ işleminin sonucunu bulunuz.

8. $\sqrt{7+\sqrt{48}}-\sqrt{7-\sqrt{48}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

9. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}}=\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[4]{3}$ olduğuna göre x in değerini bulunuz.

10. $\left.\begin{aligned} a&=-\sqrt{3}\\ b&=-\sqrt[3]{6}\\ c&=-\sqrt[6]{20}\end{aligned}\right\}$ sayılarını küçükten büyüğe sıralayınız.



9.3.5. Denklemler ve Eşitsizliklerle İlgili Uygulamalar

Neler Öğreneceksiniz?

- Oran ve orantı kavramlarını kullanarak problemler çözmeyi,
- Denklemler ve eşitsizlikler ile ilgili problemler çözmeyi öğreneceksiniz.



Terimler ve Kavramlar
- Oran
- Orantı
- Doğru Orantı
- Ters Orantı
- Yüzde

9.3.5.1. Oran ve Orantı

Aynı türden iki çokluğun bölme yoluyla karşılaştırılmasına **oran** denir. En az biri sıfırdan farklı a ve b gerçek sayıları için a nın b ye oranı, $\frac{a}{b}$ veya a : b şeklinde gösterilir.

İki ya da daha fazla oranın birbirine eşitlenmesine **orantı** denir.

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ eşitliği bir orantı belirtir ve " a değerinin b değerine oranı, c değerinin d değerine oranına eşittir." şeklinde okunur.

Sabit bir k değeri için $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ eşitliğindeki k değerine **orantı sabiti** denir.

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ eşitliği a : b = c : d şeklinde de yazılabilir. Bu eşitlikte b ve c değerleri **içler**, a ve d değerleri **dışlar** olarak adlandırılır.



Sembol ve Gösterimler

%, $\frac{a}{b}$, a:b, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,

a:b = c:d

- Bir futbol takımındaki yerli ve yabancı futbolcu sayıları farklı şekillerde karşılaştırılabilir. Örneğin 20 yerli ve 8 yabancı futbolcusu bulunan bir kulüpteki yerli futbolcu sayısının yabancı futbolcu sayısına oranı $\frac{20}{8}$ şeklinde gösterilebilir.
- Boyları 160 cm ve 180 cm olan iki öğrencinin boylarının oranı $\frac{160}{180}$ şeklinde ifade edilebilir.
- 2 : 3 = 4 : 6 ve $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{6}{9}$ ifadeleri birer orantı belirtir.

Orantının Özellikleri

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ orantısında

1. İçler çarpımı ile dışlar çarpımı birbirine eşittir. Yani $a\cdot d=b\cdot c$ olur.

2. İçteki veya dıştaki terimler yer değiştirebilir.

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{b}=\frac{c}{a}$ $\qquad$ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

3. Oranların paylarının toplamı, paydalarının toplamına bölünürse orantı sabiti değişmez.

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k \Rightarrow \frac{a+c}{b+d}=k$

4. $m\neq 0$ ve $n\neq 0$ olmak üzere oranların biri m sabit sayısıyla diğeri n sabit sayısıyla genişletilip pay ve paydalar kendi aralarında toplanırsa orantı sabiti değişmez.

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k \Rightarrow \frac{m\cdot a}{m\cdot b}=\frac{n\cdot c}{n\cdot d}=k \Rightarrow \frac{m\cdot a+n\cdot c}{m\cdot b+n\cdot d}=k$

5. Oranlar çarpılırsa orantı sabitinin karesi elde edilir.

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k \Rightarrow \frac{a\cdot c}{b\cdot d}=k^2$



ÖRNEK 1

$a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ ve $a + b = 15$ ise a değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

İçler yer değiştirilirse $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = k$ elde edilir. Bu eşitlikten

$\frac{a+b}{2+3} = k \Rightarrow \frac{15}{5} = k$ $\Rightarrow k = 3$ olur. ve $\frac{a}{2} = k \Rightarrow \frac{a}{2} = 3$ $\Rightarrow a = 6$ olur.

ÖRNEK 2

a ve b sıfırdan farklı gerçek sayılar olmak üzere $2a = 5b$ ise $\frac{a+b}{a-b}$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

2a=5b olduğundan a= 5k ve b=2k denilir.
Bu değerler istenilen denklemde yerine yazılırsa $\frac{a+b}{a-b} = \frac{5k+2k}{5k-2k} = \frac{7k}{3k} = \frac{7}{3}$ elde edilir.

ÖRNEK 3

$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5}$ ve $2a - 3b + 4c = 30$ olmak üzere $a + b \cdot c$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5} = k$ orantısındaki her bir oran, orantı sabiti ile eşitlenirse $a = 2k$,
$b = 3k$, $c = 5k$ olarak bulunur. Bu değerler verilen eşitlikte yerine yazılırsa

$2a - 3b + 4c = 30$
$2 \cdot 2k - 3 \cdot 3k + 4 \cdot 5k = 30$
$4k - 9k + 20k = 30$
$15k = 30$ olup $k = 2$ olarak bulunur.

k değeri yerine yazılırsa $a = 4$, $b = 6$, $c = 10$ bulunur.
Bu durumda $a + b \cdot c = 4 + 6 \cdot 10 = 4 + 60 = 64$ olur.

ÖRNEK 4

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = 4$ olmak üzere, $\frac{a \cdot d \cdot e}{b \cdot c \cdot f}$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = 4$ orantısından $\frac{a}{b} = 4$, $\frac{d}{c} = \frac{1}{4}$ ve $\frac{e}{f} = 4$ elde edilir.
Buradan $\frac{a \cdot d \cdot e}{b \cdot c \cdot f} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \cdot \frac{e}{f} = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 4 = 4$ olur.

ÖRNEK 5

x, y, z ve t gerçek sayılar olmak üzere $\frac{x}{y} = \frac{z}{t} = \frac{3}{4}$ ise $\frac{x^2+z^2}{y^2+t^2}$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\frac{x^2}{y^2} = \frac{z^2}{t^2} = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$ olup $\frac{x^2+z^2}{y^2+t^2} = \frac{9}{16}$ olur.



ÖRNEK 6

a, b, c, d, e ve f gerçek sayılar olmak üzere

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{2}{3}$ orantısında $2a+3c-e=24$ ve $3d-f=12$ olduğuna göre b değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{2a}{2b}=\frac{3c}{3d}=\frac{-e}{-f}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{2a+3c-e}{2b+3d-f}=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{24}{2b+12}=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 4b+24=72$$

$$\Rightarrow b=12 \text{ olur.}$$

ÖRNEK 7

$ax=by=cz=12$ ve $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{4}$ ise $a+b+c$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\left.\begin{aligned} ax=12 \text{ ise } a&=\frac{12}{x}\\ by=12 \text{ ise } b&=\frac{12}{y}\\ cz=12 \text{ ise } c&=\frac{12}{z}\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\begin{aligned} a+b+c&=\frac{12}{x}+\frac{12}{y}+\frac{12}{z}\\ &=12\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\\ &=12\cdot\frac{1}{4}=3 \text{ olur.}\end{aligned}$$

Doğru Orantı

İki çokluktan biri artarken diğeri de aynı oranda artıyorsa ya da biri azalırken diğeride aynı oranda azalıyorsa bu çokluklara **doğru orantılıdır** denir.

a ve b doğru orantılı ise $\frac{a}{b}=k$ şeklinde gösterilir(k orantı sabitidir.).



Doğru orantılı iki çokluk birbiriyle bölüm durumundadır.

ÖRNEK 8

$3x-1$ ve $y+3$ doğru orantılı iki sayıdır. $x=5$ iken $y=4$ ise $x=9$ iken y değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$3x-1$ ve $y+3$ sayıları doğru orantılı olduğundan

$\frac{3x-1}{y+3}=k\Rightarrow\frac{3\cdot5-1}{4+3}=k$ ve $k=2$ olur.

Bu durumda $x=9$ için $\frac{3\cdot9-1}{y+3}=2\Rightarrow y=10$ olur.

ÖRNEK 9

a, b, c sayıları sırasıyla 3, 5, 7 sayıları ile doğru orantılıdır. $a+b+c=60$ ise $c-b$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

a, b, c sayıları sırasıyla 3, 5, 7 sayıları ile doğru orantılı olduğundan

$\frac{a}{3}=k, \frac{b}{5}=k, \frac{c}{7}=k$ olup buradan $a=3k$, $b=5k$, $c=7k$ bulunur. Bu değerler toplamda yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} a+b+c&=60\\ 3k+5k+7k&=60\\ 15k&=60\\ k&=4 \text{ olur.}\end{aligned}$$

Bu durumda $b=5k=5\cdot4=20$ ve $c=7k=7\cdot4=28$ olmak üzere
$c-b=28-20=8$ bulunur.





Ters orantılı iki çokluk birbiriyle çarpım durumundadır.

Ters Orantı

İki çokluktan biri artarken diğeri aynı oranda azalıyor ya da biri azalırken diğeri aynı oranda artıyor ise bu çokluklara **ters orantılıdır** denir.

a ve b ters orantılı ise $a \cdot b = k$ (k orantı sabiti) şeklinde gösterilir.

ÖRNEK 10

a, b ve c sayıları sırasıyla 2, 3 ve 6 ile ters orantılıdır. $a + b + c = 8$ ise a, b, c sayılarını bulunuz.

ÇÖZÜM

a, b, c sayıları sırasıyla 2, 3, 6 ile ters orantılı olduğundan $a \cdot 2 = k$, $b \cdot 3 = k$, $c \cdot 6 = k$ olur. Bu eşitlikler yardımıyla bulunan $a = \frac{k}{2}, b = \frac{k}{3}, c = \frac{k}{6}$ değerleri toplamda yerine yazılırsa

$a + b + c = 8 \Rightarrow \frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \frac{k}{6} = 8 \Rightarrow k = 8$ olur.

k değeri yerine yazılırsa

$a \cdot 2 = 8 \Rightarrow a = 4, b \cdot 3 = 8 \Rightarrow b = \frac{8}{3}$ ve $c \cdot 6 = 8 \Rightarrow c = \frac{4}{3}$ olur.

ÖRNEK 11

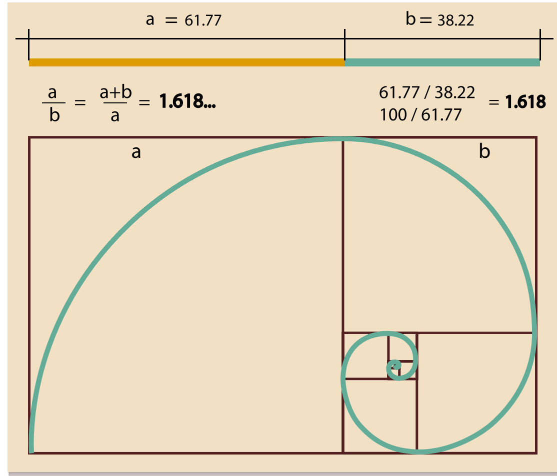
a sayısı b sayısı ile doğru, c sayısı ile ters orantılıdır. $a = 4$ ve $b = 2$ iken $c = 6$ ise $a = 5$ ve $b = 10$ iken c sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

a sayısı b sayısı ile doğru, c sayısı ile ters orantılı olduğundan $\frac{a \cdot c}{b} = k$ olup $a = 4$ ve $b = 2$ iken $c = 6 \Rightarrow \frac{4 \cdot 6}{2} = k$ ve $k = 12$ olur.

Bu durumda $a = 5$ ve $b = 10$ iken $\frac{5 \cdot c}{10} = 12$ ve $c = 24$ olur.

Altın Oran Nedir?



Uzunluğu ℓ kadar olan bir AB doğru parçası alalım ve bunu bir C noktası yardımıyla uzunlukları a ve b kadar olanAC ve BC gibi iki doğru parçasına ayıralım. $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$ eşitliğini sağlayan $\frac{a}{b}$ oranının pozitif değerine **altın oran** adı verilir. Bu oran $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ irrasyonel sayısına eşit olup yaklaşık değeri 1,618 dir.





Altın oranı bu kadar ilginç yapan şey doğada canlı cansız bir çok varlıkta rastlanmasıdır.



İdeal ölçülere sahip bir insan vücudunda sayısız altın oran örneği bulunmaktadır.
Omuzdan parmak ucuna olan mesafe ile dirsekten parmak ucuna olan mesafe arasındaki oran, 1,618 dir.
Çam kozalaklarında, sağ el ve sol el yönlerinde gelişen spiraller üzerindeki taneciklerin birbirlerine oranı, 1,618 dir.



Ağız boyunun burun genişliğine oranı, 1,618dir.
Orta parmağın serçe parmağına oranı, 1,618 dir.
Arı kovanındaki dişi arı ile erkek arı sayıları arasındaki oran, 1,618 dir.
Ayçiçeğinde sol el yönünde yer alan 55 çekirdek ile sağ el yönünde yeralan 89 çekirdek vardır. Bunların birbirine oranı 1,618 olur. Bu sayı altın orana oldukça yakındır.

Oran Orantı Problemleri

a, b, c ve x gerçek sayılar olmak üzere

$\left.\begin{matrix} a & \nearrow\!\!\!\!\swarrow & b \\ c & \nwarrow\!\!\!\!\searrow & x \end{matrix}\right\}$ ifadesinde a ile b ve c ile x arasında doğru orantı varsa $a \cdot x = b \cdot c$ olur.

$\left.\begin{matrix} a & \longleftrightarrow & b \\ c & \longleftrightarrow & x \end{matrix}\right\}$ ifadesinde a ile b ve c ile x arasında ters orantı varsa $a \cdot b = c \cdot x$ olur.

ÖRNEK 12

Bir izci kampında 30 izciye 50 gün yetecek kadar yiyecek vardır. 10 gün sonra kamptan kaç izci ayrılırsa kalan yiyeceğin kalan izcilere 75 gün yeteceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

10 gün sonra 30 kişiye 40 gün yetecek kadar yiyecek kalmıştır. Ayrıca kamptan x kişi ayrılırsa 30 − x kişi kalır.

Kişi sayısı ile yiyeceğin yeteceği gün sayısı ters orantılı olduğundan

30 kişi ⟷ 40 gün

(30−x) kişi ⟷ 75 gün

$$30 \cdot 40 = (30 - x) \cdot 75 \Rightarrow 16 = 30 - x \Rightarrow x = 14 \text{ izci ayrılmalıdır.}$$

ÖRNEK 13



Furkan, Fatih ve Feyza isimli üç arkadaş 144 adet cevizi sırasıyla 3, 4 ve 6 sayıları ile ters orantılı olarak paylaşacaklardır. **En az** ceviz alan kişiyi ve bu kişinin kaç ceviz alacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

Furkan x, Fatih y ve Feyza z tane ceviz alsın. x, y ve z sayıları sırasıyla 3, 4 ve 6 ile ters orantılı olduğundan en az ceviz alan kişi,

$$\left.\begin{matrix} x \cdot 3 = k \text{ ise } x = \frac{k}{3} \\ y \cdot 4 = k \text{ ise } y = \frac{k}{4} \\ z \cdot 6 = k \text{ ise } z = \frac{k}{6} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x + y + z = 144 \Rightarrow \frac{k}{3} + \frac{k}{4} + \frac{k}{6} = 144 \text{ olur.} \\ \Rightarrow \frac{9k}{12} = 144 \\ \Rightarrow k = 192 \text{ olur.} \end{matrix}\right.$$

Bu durumda $\frac{k}{3}, \frac{k}{4}$ ve $\frac{k}{6}$ ifadelerinden en küçük olan $\frac{k}{6}$ dır ve en az ceviz alan kişi Feyza'dır.

O hâlde Feyza $z = \frac{k}{6} = \frac{192}{6} = 32$ ceviz alır.





Hız ve zaman ters orantılı çokluklardır.

ÖRNEK 14

Ceren, bir yolu saatte 80 km hız yapan A otobüsü ile 6 saatte gidiyor. Aynı yolu B otobüsü ile 8 saatte döndüğüne göre B otobüsünün dönüşteki hızının saatte kaç km olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Hız ve zaman ters orantılı olduğundan,

bir yol 80 km/sa. hızla ⟷ 6 saatte gidilmişse

aynı yol V km/sa. hızla ⟷ 8 saatte dönülmüştür.

$V \cdot 8 = 80 \cdot 6$ ise $V = 60$ km/sa. olur.

ÖRNEK 15

Marangoz Ahmet Usta, bir kalası 4 parçaya 12 dakikada bölebiliyorsa aynı kalası Ahmet Usta'nın 8 parçaya kaç dakikada bölebileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

- Ahmet Usta'nın kalası 4 parçaya bölebilmesi için 3 kesim yapması gerekmektedir.
- Ahmet Usta'nın aynı kalası 8 parçaya bölebilmesi için 7 kesim yapması gerekmektedir.

3 kesim için ⤡ 12 dakika zaman gerekli ise

7 kesim için ⤢ x dakika zaman gerekir.

$3x = 84 \Rightarrow x = 28$ dakika

ÖRNEK 16



Boyacı Serdar Usta, üç farklı renkteki boyadan A, B ve C litre alıp $\frac{A}{B} = \frac{1}{3}$ ve $\frac{B}{C} = \frac{2}{5}$ oranlarında karıştırarak yeni bir boya rengi elde etmiştir.

Serdar Usta, toplam 46 litre boya kullandığına göre C değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Birinci orantı 2 ve ikinci orantı 3 ile genişletilirse $\frac{A}{B} = \frac{2}{6}$ ve $\frac{B}{C} = \frac{6}{15}$ bulunur.

Buradan $A = 2k$, $B = 6k$, $C = 15k$ olur.

$A + B + C = 46 \Rightarrow 2k + 6k + 15k = 46 \Rightarrow 23k = 46 \Rightarrow k = 2$ olur.

Bu durumda $C = 15k = 15 \cdot 2 = 30$ litredir.

ÖRNEK 17



Zeynep okuduğu kitapları 5 ile doğru, 3 ile ters orantılı olacak şekilde iki farklı gruba ayırıyor. Sayfa sayısı 300 ün üzerinde olan kitaplarını üst rafa, sayfa sayısı 300 ve 300 ün altında olan kitaplarını alt rafa diziyor. Üst rafa dizdiği kitap sayısı alt rafa dizdiği kitap sayısından 42 fazla olduğuna göre Zeynep' in okuduğu kitap sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

Sayfa sayısı 5 ile doğru orantılı olan kitap sayısına a, sayfa sayısı 3 ile ters orantılı olan kitap sayısına b denilirse

$\frac{a}{5} = 3b = k \Rightarrow a = 5k$ ve $b = \frac{k}{3}$ olur. Buradan $a > b$ olduğu görülür.

a sayısı b sayısından 42 fazla olduğundan

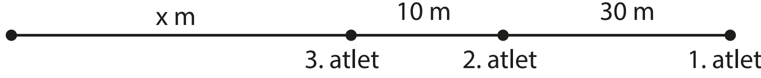
$a = b + 42$ ise $5k = \frac{k}{3} + 42$ ve $5k - \frac{k}{3} = 42$ olur.

Böylece $k = 9$ olup toplam kitap sayısı $a + b = 5k + \frac{k}{3} = 45 + 3 = 48$ olur.

ÖRNEK 18

Bir koşuda birinci gelen atlet; koşuyu ikinciden 30 metre, üçüncüden 40 metre önde tamamlamıştır. İkinci atlet koşuyu tamamladığında üçüncü atletin koşuyu bitirmesine 11 metre kaldığına göre koşulan pistin uzunluğunun kaç metre olduğunu bulunuz (Atletlerin sabit hızlarla koştukları varsayılacaktır.).

ÇÖZÜM



2. atlet 30 metre yol alıp yarışmayı tamamladığında 3. atlet $40 - 11 = 29$ metre yol almıştır. Buradan "2. atlet 30 metre yol aldığında 3. atlet 29 metre yol alırsa 2. atlet x+40 metre yol aldığında 3. atlet x+29 metre yol alır." şeklindeki doğru orantı çözülürse

30 m		29 m
x + 40 m	⤫	x + 29 m

$29x + 1160 = 30x + 870$

$x = 290$ metredir.

Bu durumda pistin tamamı $x + 40 = 290 + 40 = 330$ metredir.

ALIŞTIRMALAR

1. $\frac{x}{y} = \frac{3}{8}$ ve $y - x = 20$ ise x değerini bulunuz.
2. $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$ ve $\frac{b}{c} = 2$ ise $\frac{a}{c}$ değerini bulunuz.
3. $\frac{2m+n}{m-n} = 4$ ise $\frac{m^2}{n^2}$ değerini bulunuz.
4. Bir sınıftaki kız öğrencilerin sayısı 0,24 ile, erkek öğrencilerin sayısı 0,36 ile doğru orantılıdır. Sınıf mevcudu 30 dan fazla olduğuna göre sınıf mevcudunun **en az** kaç olabileceğini bulunuz.
5. Akif ve Mert bir arsayı $\frac{2}{5}$ oranında hisse ile almak istemektedir.Küçük hisseyi Akif ₺32 000 karşılığında aldığına göre arsanın tamamının kaç Türk lirası olduğunu bulunuz.
6. a sayısı b+1 ile doğru, c-2 ile ters orantılıdır. $a = 5$ ve $b = 2$ iken $c = 8$ ise $b = 3$ ve $c = 4$ iken a değerini bulunuz.
7. Özdeş olan 25 adet güneş panelinin 12 günde ürettiği elektriği, aynı şartlarda bu panellerle özdeş ve 3 kat daha fazla sayıdaki güneş paneli ile kaç günde üretebileceğini bulunuz.
8. Cennet Hanım, anaokuluna giden kızı ile hafta sonu kek yapmak istemektedir. Bunun için gerekli olan un, şeker ve tereyağı miktarları sırasıyla 8, 3 ve 2 sayıları ile doğru orantılıdır. Cennet Hanım ve kızının yaptığı 4 kişilik bir kek 1300 gr olduğuna göre yapacakları 8 kişilik bir kekte kaç gram tereyağı kullanacaklarını bulunuz.
9. Bir bilim insanı demir, alüminyum ve kurşun metallerini sırasıyla 3, 4 ve 12 sayıları ile ters orantılı olacak şekilde karıştırıp 240 gramlık bir alaşım elde ediyor. Bu alaşımdaki alüminyum miktarını bulunuz.
10. Bir uçak firması bilet fiyatlarını, 30 boş koltuk kalana kadar sabit bir fiyatla boş koltuk sayısı 30 un altına düştüğünde koltuk sayısı ile ters orantılı olacak şekilde belirlemektedir. 20 boş koltuğu olan bir uçakta bilet fiyatı ₺75 ise 15 boş koltuk kaldığında bilet fiyatının kaç Türk lirası olacağını bulunuz.

9.3.5.2. Denklemler ve Eşitsizlikler ile İlgili Problemler

DÜŞÜNÜYORUM

Aklınızdan bir sayı tutunuz.
Sonra tuttuğunuz sayıyı 4 ile çarpınız.
Çıkan sonuca 12 ekleyiniz.
Elde ettiğiniz sonucu 2 ye bölünüz.
En sonunda da çıkan sonuçtan tuttuğunuz sayının 2 katını çıkarınız.
Cevabınız "6" değil mi?
Başka bir sayı tuttuğunuzda cevabınız ne olurdu?
Sırasıyla yaptığınız bu işlemleri matematiksel olarak nasıl ifade edebilirsiniz?
Düşünüp yorumlayınız.

Günlük hayatta karşılaşılan bazı problemlerin çözümünde matematiksel ifadeleri kullanmak gerekebilir. Bu ifadeleri matematiksel olarak göstermek için cebirsel ifadeler kullanılır. Bununla ilgili bazı örnekler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Sözel İfade	Cebirsel İfade
Bir sayının 5 fazlası	$x + 5$
Ali'nin yaşının 2 katı	$2x$
Veysel'in cebindeki parasının 3 katının 10 eksiği	$3x - 10$
Bir sayının 3 fazlasının $\frac{2}{5}$ inin 4 fazlası	$\frac{2}{5} \cdot (x + 3) + 4$
Gökhan ile Cenk'in yaşları toplamı 20 dir.	$x + y = 20$
Kasadaki meyvelerin yarısının 6 fazlası	$\frac{x}{2} + 6$
2 katının 4 eksiği 5 ten küçük sayılar	$2x - 4 < 5$
Karesi ile kendisinin toplamı 20 olan sayılar	$x^2 + x = 20$
Bir sayının 2 katının 3 fazlasının üçte biri 7 den büyük veya eşit olan sayılar	$\frac{2x + 3}{3} \geq 7$

ÖRNEK 19

Bir sayının 3 katının 4 eksiği, aynı sayının 2 fazlasının 2 katına eşit olduğuna göre bu sayıyı bulunuz.

ÇÖZÜM

Bu sözel ifade cebirsel olarak $3x - 4 = 2 \cdot (x + 2)$ şeklinde ifade edilebilir. Buradan

$3x - 4 = 2x + 4$

$x = 4 + 4$ ve $x = 8$ olur.

ÖRNEK 20



Pelin her gün bir önceki günden 10 sayfa fazla okuyarak 350 sayfalık bir romanı 5 günde bitirmiştir. Pelin'in ilk gün okuduğu sayfa sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

Pelin'in ilk gün okuduğu sayfa sayısına x denilirse

$x + (x + 10) + (x + 20) + (x + 30) + (x + 40) = 350$

$5x + 100 = 350$

$5x = 250$ olur. Buradan $x = 50$ olur.



Aşağıdaki tabloda sözel ifadelerin grafiksel gösterimi ile ilgili örnekler verilmiştir. İnceleyiniz.

Sözel İfade	Grafiksel Gösterim
"Boyu 100 cm iken dikilen bir fidanın 3 yıl sonundaki boyu 190 cm dir." ifadesine uygun grafik gösterimi yandaki gibidir.	Boy (cm); 190; 100; 0; 3; Zaman (yıl)
Bir manavda 10 kg elma, 20 kg portakal ve 60 kg muz vardır. Her bir meyve türünün miktarının tüm meyve miktarına oranını gösteren dairesel grafik gösterimi yandaki gibidir.	Portakal 80°; Elma 40°; Muz 240°
Serkan'ın 5 gün boyunca okuduğu bir kitabın sayfa sayıları sırasıyla 10, 30, 40, 20 ve 50 dir. Bu ifadenin sütun grafiği ile gösterimi yandaki gibidir.	Sayfa sayfası; 50, 40, 30, 20, 10; 0, 1, 2, 3, 4, 5; Günler

ÖRNEK 21



Ayhan, bir merdiveni ikişer ikişer çıkıp üçer üçer inmiştir. İnerken ve çıkarken attığı toplam adım sayısı 45 olduğuna göre merdivenin kaç basamaklı olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Merdivenin basamak sayısına x denilirse Ayhan'ın çıkarken ve inerken attığı adım sayıları sırasıyla $\frac{x}{2}$ ve $\frac{x}{3}$ olacaktır. $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=45$ denklemi çözülürse

$$\frac{5x}{6}=45$$

$$5x=270$$

$$x=54 \text{ olur.}$$

ÖRNEK 22

Demet'in parası Yiğit'in parasının 3 katından ₺20 fazladır. Demet, Yiğit'e ₺50 verirse paraları eşit olmaktadır. Buna göre Yiğit'in başlangıçta kaç Türk lirası olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Yiğit'in parasına x denilirse Demet'in parası $3x+20$ olur.

Yiğit'in parası	Demet'in parası
x	$3x+20$
$+50$ ⟶ $x+50$	-50 ⟶ $3x-30$

Bu durumda $x+50=3x-30$ ise $2x=80$ ve $x=40$ Türk lirasıdır.



ÖRNEK 23

Torunlarıyla vakit geçirmeyi seven Hüseyin dede yaşları 6, 8 ve 12 olan üç torununa bahçesinden topladığı 45 tane cevizi yaşlarıyla ters orantılı olacak şekilde dağıtıyor. Torunların aldıkları ceviz sayıları dairesel bir grafikle gösterilirse ortanca torunun aldığı ceviz miktarını gösteren daire diliminin merkez açısının kaç derece olacağını bulup aldığı payı daire grafiği ile gösteriniz.

ÇÖZÜM

Torunların aldıkları ceviz sayıları sırasıyla a, b ve c olsun. Ters orantı özelliğinden

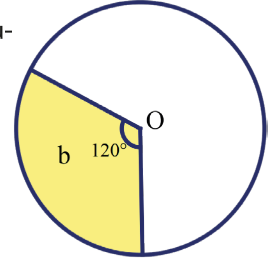
$a \cdot 6 = k$, $b \cdot 8 = k$ ve $c \cdot 12 = k$ olup buradan $a + b + c = \frac{k}{6} + \frac{k}{8} + \frac{k}{12} = 45$ denklemi elde edilir. Denklem çözülürse $k = 120$ olur.

k değeri yerine yazılırsa $a = 20$, $b = 15$ ve $c = 10$ olur. Bu durumda ortanca torun 15 ceviz almıştır.

15 cevizin 45 cevize oranı, x in 360^o ye oranına eşitlenirse

$\frac{15}{45} = \frac{x}{360}$ ise $x = 120^o$ olur.

Bu verilerin dairesel grafik ile gösterimi yandaki gibidir.



ÖRNEK 24

Bir otobüsteki erkek yolcuların sayısı kadın yolcuların sayısının 2 katıdır. Bu otobüse 3 erkek yolcu biner, bu otobüsten 3 kadın yolcu inerse otobüsteki erkek yolcuların sayısı kadın yolcuların sayısının 3 katı olmaktadır. Buna göre otobüste başlangıçta kaç yolcu olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Erkek yolcu sayısı	Kadın yolcu sayısı
2x	x
+3	−3
2x + 3	x − 3

Bu durumda $2x + 3 = 3 \cdot (x - 3)$

$2x + 3 = 3x - 9$ ve $x = 12$ olur.

Başlangıçtaki yolcu sayısı 3x olduğundan cevap $3x = 3 \cdot 2 = 36$ olur.

ÖRNEK 25

Bir oyuncak imalathanesinde bir gün içerisinde üretilen oyuncaklar kutulara yerleştirilerek Sosyal Hizmetler ve Çocuk Esirgeme Kurumuna bağışlanacaktır.



- Kutulara sekizer oyuncak yerleştirilirse 20 oyuncak artmaktadır.
- Onar oyuncak yerleştirilirse 7 kutu boş kalmaktadır.

Buna göre bu imalathanede bir gün içerisinde üretilen oyuncak sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

Kutu sayısına x denilsin. Oyuncak sayıları iki farklı şekilde hesaplanıp birbirine eşitlenirse

$8x + 20 = 10 \cdot (x - 7)$

$8x + 20 = 10x - 70$

$2x = 90$ ve $x = 45$ olur.

Bu imalathanede bir günde üretilen oyuncak sayısı, $8x + 20 = 8 \cdot 45 + 20 = 380$ olur. Aynı sonuca $10 \cdot (x - 7)$ ifadesini kullanarak da ulaşılabileceğine dikkat ediniz.

ÖRNEK 26

Bir araç 1 litre yakıt ile şehir içinde 15 km, şehir dışında ise 20 km yol gidebilmektedir. Bu araç, 30 litre yakıt ile şehir içinde ve şehir dışında toplam 550 km yol gittiğine göre bu aracın şehir içinde kaç km yol gittiğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Şehir içinde tükettiği yakıt miktarına x litre denilirse şehir dışında tükettiği yakıt miktarı (30 − x) litre olur.

Şehir içi	Şehir dışı
x	30 − x

$$15x + 20 \cdot (30 - x) = 550$$

$5x = 50$ olup $x = 10$ olur. Şehir içinde $15 \cdot 10 = 150$ km yol gitmiştir.

ÖRNEK 27

Bir telin bir ucundan $\frac{1}{8}$ i kesilirse orta noktası 10 cm yer değiştirmektedir. Buna göre telin kesilmeden önceki boyunun kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Bir telin orta noktası bir ucundan kesilen miktarın yarısı kadar yer değiştireceğinden telin boyuna x cm dersek

$$\frac{\frac{x}{8}}{2} = 10 \Rightarrow \frac{x}{8} = 20 \Rightarrow x = 160 \text{ cm olur.}$$

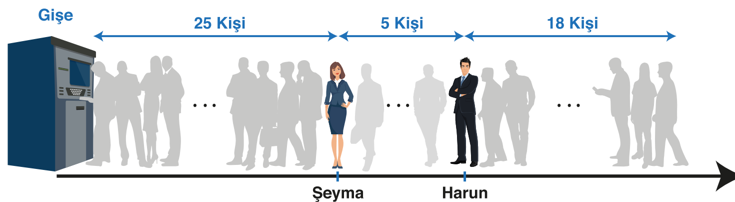
ÖRNEK 28

Bir konser bileti kuyruğunda Şeyma baştan 25. sırada, Harun ise sondan 18. sıradadır. Şeyma ile Harun arasında 5 kişi vardır.

a) Şeyma, gişeye Harun'dan daha yakın ise kuyruktaki kişi sayısını bulunuz.
b) Harun, gişeye Şeyma'dan daha yakın ise kuyruktaki kişi sayısını bulunuz.

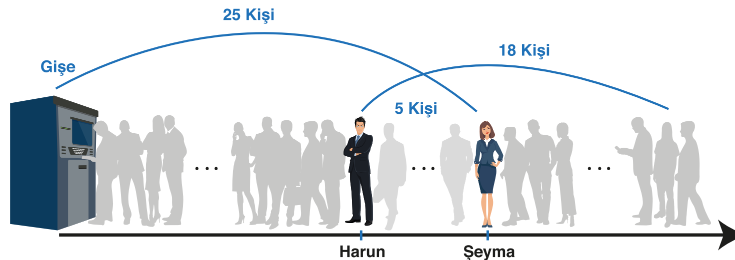
ÇÖZÜM

a)



Şekildeki gibi sıraya girdiklerinde kuyruktaki insan sayısı $25 + 5 + 18 = 48$ olur.

b)



$25 + 18 = 43$ kişi içerisinde hem aradaki 5 kişi hem de Harun ve Şeyma ikişer kez sayıldığından kuyruktaki kişi sayısı $43 - 5 - 2 = 36$ olur.

ÖRNEK 29

Kardeşlerini çok seven Betül, parasını kardeşleriyle eşit olarak paylaşırsa her birine ₺8 düşmektedir. Kardeşlerine altışar Türk lirası verirse Betül'e ₺14 kalmaktadır. Buna göre Betül'ün toplam kaç Türk lirası olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Betül'ün kardeşlerinin sayısına x denilerek verilen bilgiler yardımıyla toplam para miktarı iki farklı şekilde yazılıp birbirine eşitlenirse

$8 \cdot (x+1) = 6x + 14$

$8x + 8 = 6x + 14$

$2x = 6$

$x = 3$ olup Betül'ün toplam parası, $8 \cdot (x+1) = 8 \cdot 4 = 32$ Türk lirasıdır.

ÖRNEK 30

Aylin , Çağla ve Can 56 adet fındığı aşağıdaki gibi paylaşmıştır.



- Aylin'in fındıklarının sayısı, Çağla'nın fındıklarının sayısının 4 katıdır.
- Çağla ve Can'ın toplam fındık sayısı Aylin'in fındıklarının sayısının $\frac{3}{4}$ ü kadardır.

Bu bilgilere göre Aylin'in payına kaç tane fındık düştüğünü bulunuz.

ÇÖZÜM

Çağla'nın fındık sayısına x denilirse Aylin'in fındık sayısı 4x olur. Can'ın fındık sayısına y denilirse

$x + y = 4x \cdot \frac{3}{4}$

$x + y = 3x$

$y = 2x$ olur.

Toplam fındık sayısı 56 olduğundan $4x + x + 2x = 56$ ve $x = 8$ olur.

Bu durumda Aylin'in fındık sayısı, $4x = 4 \cdot 8 = 32$ olur.



İçinde kesir bulunduran problem türlerinde bilinmeyeni verilen kesrin paydasına bölünen bir değişken seçerek işlemlerimizi kolaylaştırabiliriz.

ÖRNEK 31



Yavuz, okuduğu bir kitabın $\frac{1}{3}$ ini günde 25 sayfa okuyarak, kalan kısmını ise günde 20 sayfa okuyarak toplam 14 günde bitirmiştir. Buna göre Yavuz'un okuduğu kitabın kaç sayfa olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Kitabın tamamına 3x sayfa denilirse

25 sayfa okuyarak bitirdiği kısım x sayfa, 20 sayfa okuyarak bitirdiği kısım 2x sayfa olur.

x sayfalık kısmı günde 25 sayfa okuyarak $\frac{x}{25}$ günde , 2x sayfalık kısmı günde 20 sayfa okuyarak $\frac{2x}{20}$ günde bitirecektir.

Bu bilgiler yardımıyla kurulan $\frac{x}{25} + \frac{2x}{20} = 14$ denklemi çözülerek $x = 100$ bulunur.

Kitap 3x sayfa olduğundan $3x = 3 \cdot 100 = 300$ sayfadır.



ÖRNEK 32

Aynı güçteki 6 işçinin 12 günde boyayabileceği bir duvarı bu işçilerle aynı güçte olan 8 işçinin kaç günde boyayabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

İşçi sayısı arttıkça işin yapılma süresi azalacağından ters orantı vardır. Bu durumda

6 işçi ⟶ 12 gün

8 işçi ⟶ x gün

$6 \cdot 12 = 8 \cdot x \Rightarrow x = 9$ olur.
Bu durumda 8 işçi bu duvarı 9 günde boyayabilir.

ÖRNEK 33

Ali bir işi 3 günde Sibel ise aynı işi 8 günde bitirebilmektedir. İkisi birlikte bu işe başladıktan 2 gün sonra Sibel işi bırakıyor. Kalan işi Ali'nin kaç günde bitirebileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

EKOK (3 , 8) = 24 olduğundan yapılan iş miktarı 24k olsun. Ali işi 3 günde bitirebiliyorsa 1 günde $\frac{24k}{3} = 8k$ kadar iş bitirir. Sibel işi 8 günde bitirebiliyorsa 1 günde $\frac{24k}{8} = 3k$ kadar iş bitirir.

İkisi birlikte 2 günde $2 \cdot (8k + 3k) = 22k$ kadar iş yaparlar.
Bu durumda $24k - 22k = 2k$ kadar iş kalır ve bu kalan işi Ali $\frac{2k}{8k} = \frac{1}{4}$ günde bitirir.

ÖRNEK 34



Boyları eşit olan iki mumdan biri 4 diğeri 6 saatte tamamen yanıp tükenmektedir. Aynı anda yakılan bu mumların yakıldıktan kaç saat sonra boyları oranının $\frac{1}{3}$ olacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

EKOK(4,6)=12 olduğundan mumların boyları 12k cm olsun. 4 saatte yanan mum bir saatte 3k cm, 6 saatte yanan mum ise bir saatte 2k cm yanmaktadır. t saat sonra mumların kalan boyları 12k – 3kt ve 12k – 2kt olacaktır. Hızlı yanan mumun kalan boyu, yavaş yanan mumun kalan boyuna oranlanırsa

$$\frac{12k - 3kt}{12k - 2kt} = \frac{1}{3}$$

$$36k - 9kt = 12k - 2kt$$

$$-7kt = -24k$$

$$t = \frac{24}{7} \text{ olur.}$$



a ve b saatte yanıp biten eşit boydaki iki mum için birer saatteki yanma uzunlukları önemlidir.

Bu uzunlukları bulmak için mum boyları, yanma sürelerine bölünür.

İşlemlerimizi kolaylaştırmak için mum boyları, a ve b ye tam bölünebilen bir uzunluk olarak seçilebilir.



ÖRNEK 35

Bir torbada 5 sarı, 9 beyaz ve 11 siyah bilye bulunmaktadır. Bu torbadan her renkten kesinlikle **en az** bir bilye alınmış olması için **en az** kaç bilyenin çekilmesi gerektiğini bulunuz.

ÇÖZÜM

En az sayıda bilye çekerek torbadaki her renkten kesinlikle 1 tane bilye alınması için önce sayıca fazla olan renkteki bilyelerin tamamının bitmesi gerekir. Daha sonra ise kalan renkten 1 bilye alınmalıdır.
Sarı bilyelerden hiç çekilmediğini varsayarak torbadan toplam 20 bilye çekildiği düşünülürse, torbada siyah ve beyaz bilyeler bitmiş olacaktır.
Çekilecek 21. bilye kesinlikle sarı olacağından en az 21 bilye alınırsa her renkten kesinlikle 1 bilye alınmış olur. Dolayısıyla cevap 21 dir.

ÖRNEK 36

1995 yılında doğan bir kişinin kaç yaşındayken bu yaşının doğum yılı rakamlarının toplamına eşit olacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

Doğum yılının rakamları toplamı $1 + 9 + 9 + 5 = 24$ olur. Cevap 1995 yılından 24 yıl sonrası olan 2019 yılı olacaktır.

ÖRNEK 37

Esra'nın yaşı oğlu Kaan'ın yaşının 5 katıdır. 8 yıl sonra Esra'nın yaşı oğlunun yaşının 3 katı olacağına göre Esra'nın bugünkü yaşının kaç olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Kaan'ın bugünkü yaşına x denilirse Esra'nın bugünkü yaşı 5x olur.

	Kaan'ın yaşı	Esra'nın yaşı	
	x	$5x$	
$+8$			$+8$
	$x + 8$	$5x + 8$	

$$5x + 8 = 3 \cdot (x + 8)$$
$$2x = 16$$
$$x = 8 \text{ olur.}$$

Bu durumda Esra'nın bugünkü yaşı $5 \cdot 8 = 40$ olur.

ÖRNEK 38

42 yaşındaki bir babanın yaşı, 3 çocuğunun yaşları toplamının 3 katıdır. Kaç yıl sonra çocukların yaşları toplamının babanın yaşına eşit olacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

Babanın yaşı 42 olduğundan üç çocuğun yaşları toplamı $\frac{42}{3} = 14$ olur. x yıl sonra babanın yaşı $42 + x$ ve üç çocuğun yaşları toplamı $14 + 3x$ olacağından

$$42 + x = 14 + 3x$$
$$2x = 28$$
$$x = 14 \text{ olur.}$$



ÖRNEK 39

Bir annenin yaşı iki çocuğunun yaşları farkının 6 katıdır. 10 yıl sonra annenin yaşı çocuklarının yaşları farkının 8 katı olacağına göre annenin şimdiki yaşını bulunuz.

ÇÖZÜM

Çocukların yaşları farkına x denilirse annenin yaşı 6x olacaktır.

Çocukların yaşları farkı	Annenin yaşı
x	6x
x	6x + 10 (10 yıl sonra)

Dolayısıyla $6x + 10 = 8x \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5$ olup annenin şimdiki yaşı $6x = 6 \cdot 5 = 30$ olur.



İki insan arasındaki yaş farkı daima sabittir.

ÖRNEK 40

İyi dost olan Ayten ile Emine'nin yaşları toplamı 40 tır. Ayten, Emine'nin yaşına geldiğinde Emine 32 yaşında olacağına göre Ayten'in şimdiki yaşını bulunuz.

ÇÖZÜM

Ayten'in yaşına x denilirse Emine'nin yaşı 40 – x olacaktır.

Ayten'in yaşı	Emine'nin yaşı
x	40 – x
40 – x	32

Yaşlar farkı değişmeyeceğinden her iki durumda da yaşlar farkı birbirine eşittir.

$$(40 - x) - x = 32 - (40 - x)$$
$$40 - 2x = -8 + x$$
$3x = 48$ olup Ayten'in yaşı $x = 16$ olur.

ÖRNEK 41



Bir sınıftaki öğrencilerin yaş ortalaması 15 tir. Bu sınıftan yaş ortalaması 16 olan 4 öğrenci ayrıldığında sınıfın yaş ortalaması 14,8 olmaktadır. Buna göre başlangıçta sınıf mevcudunun kaç olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Sınıf mevcuduna x denilirse sınıftaki öğrencilerin yaşları toplamı 15x olacaktır. Sınıftan ayrılan 4 öğrencinin yaşları toplamı $16 \cdot 4 = 64$ olur. Son durumda sınıftaki öğrencilerin yaşları toplamı $15x - 64$ ve öğrenci sayısı $x - 4$ olur. Buradan kalan öğrencilerin yaş ortalaması,

$$\frac{15x - 64}{x - 4} = 14{,}8$$
$$15x - 64 = (14{,}8)x - 59{,}2$$
$$0{,}2x = 4{,}8 \Rightarrow x = 24 \text{ olur.}$$

ÖRNEK 42

1 ton su tüketim bedelinin ₺4 olduğu bir dönemde su tüketimine ek olarak

- Bakım masrafı olarak ₺3,
- Çevre ve temizlik vergisi (ÇTV) olarak ₺2,
- Su tüketim bedelinin %8 i kadar katma değer vergisi (KDV) alınmaktadır.

8,5 ton su kullanan bir abonenin bu dönemdeki faturasının kaç Türk lirası olacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

Abonenin kullandığı 8,5 ton suyun tüketim bedeli $8{,}5 \cdot 4 = 34$ Türk lirasıdır. Ayrıca su tüketim bedelinin %8 i kadar katma değer vergisi (KDV) ise $34 \cdot \frac{8}{100} = 2{,}72$ Türk lirasıdır. Bu durumda fatura tutarı $34 + 3 + 2 + 2{,}72 = 41{,}72$ Türk lirasıdır.



ÖRNEK 43



8 tanesini ₺10 ndan aldığı kalemlerin 5 tanesini ₺8 ndan satan bir kırtasiye sahibinin ₺70 kâr edebilmesi için kaç tane kalem satması gerektiğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Kırtasiye sahibinin aldığı ve sattığı kalem sayıları eşitlenirse
40 kalemi ₺50 na alıp ₺64 na satar. Böylece 40 kalemin satışından ₺14 kâr eder.
Sattığı kalem sayısı ile kâr miktarı doğru orantılı olduğundan

40 kalemden ↖↗ ₺14 kâr
x kalemden ↙↘ ₺70 kâr

$14x = 2800 \Rightarrow x = 200$ tane kalem satması gerektir.

ÖRNEK 44

%40 kâr ile ₺56 na satılan bir ayakkabıdan kaç Türk lirası kâr elde edildiğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Ayakkabının maliyetine 100x denilirse etiket fiyatı
$100x + 100x \cdot \frac{40}{100} = 100x + 40x = 140x$ olarak bulunur.
Buradan, $140x = 56 \Rightarrow x = 0{,}4$ olur. Bu durumda kâr $40x = 40 \cdot 0{,}4 = 16$ Türk lirasıdır.



Kâr edilen bir satış işlemi için satış fiyatı, alış fiyatı ile kârın toplamına eşittir.

Zarar edilen bir satış işlemi için satış fiyatı, alış fiyatı ile zararın farkına eşittir.

ÖRNEK 45

Etiket fiyatı %50 kârla belirlenmiş bir ürüne etiket fiyatı üzerinden %20 indirim uygulanırsa bu ürünün son durumdaki kâr oranının yüzde kaç olacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

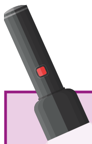
Ürünün maliyetine 100x denilirse etiket fiyatı ,

$100x + 100x \cdot \frac{50}{100} = 100x + 50x = 150x$ olarak bulunur.

Bu fiyat üzerinden %20 indirim uygulanırsa $150x - 150x \cdot \frac{20}{100} = 150x - 30x = 120x$ indirimli satış fiyatı olacaktır. Maliyet fiyatı 100x olduğundan son durumdaki kâr, $120x - 100x = 20x$ olup kâr oranı %20 olur.

ÖRNEK 46

Bir markette tüm ürünlere %20 indirim uygulandığında satışlarda %30 artış olmaktadır. Bir gün içerisinde mağazanın kasasına giren paranın hangi oranda değişeceğini bulunuz.



Dünya'nın atmosferinde yaklaşık %78 oranında azot, %21 oranında oksijen bulunduğunu biliyor muydunuz?

ÇÖZÜM

Bir ürün fiyatına 10x, bu ürünün bir günlük satış miktarına 10y denilirse kasaya giren para 100xy olacaktır.

Bir ürünün fiyatı	Bir günde satılan ürün miktarı	Kasaya giren para
10x	10y	100xy

Ürün fiyatlarında %20 indirim yapıldığında satış fiyatı,

$10x - 10x \cdot \frac{20}{100} = 10x - 2x = 8x$ olacaktır.

Satışlarda %30 artış olduğunda satış miktarı,

$10y + 10y \cdot \frac{30}{100} = 10y + 3y = 13y$ olur.

Bir ürün fiyatı	Bir günde satılan ürün miktarı	Kasaya giren para
8x	13y	104xy

$104xy - 100xy = 4xy$ olup son durumda kasaya giren para, bir ürün için ilk duruma göre %4 artmıştır.
Tüm ürünlerde bu durum geçerli olduğundan kasaya giren para %4 artmıştır.



ÖRNEK 47



Yunus, tanesi 40 kuruştan aldığı 25 adet yumurtanın bir kısmını eve gelirken kırıyor. Kalan yumurtaların tanesinin maliyetinin 50 kuruşa yükseldiğini hesaplayan Yunus'un kaç tane yumurta kırdığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Yunus'un yumurtalara ödediği toplam para, $40 \cdot 25 = 1000$ kuruştur. Kalan yumurtaların bir tanesinin maliyeti 50 kuruşa yükseldiğinden $1000 : 50 = 20$ yumurta sağlamdır.

Bu durumda Yunus $25 - 20 = 5$ yumurta kırmıştır.

ÖRNEK 48



Bir tür yaş üzüm kurutulduğunda ağırlığını %40 oranında kaybetmektedir. Kilogramını ₺6 ndan aldığı yaş üzümü kurutarak satan bir tüccar %20 kâr hedeflediğine göre tüccarın 1 kg kuru üzümün kilogramını kaç Türk lirasından satması gerektiğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Tüccarın 100 kg yaş üzüm aldığı düşünülürse ödeyeceği para $100 \cdot 6 = 600$ Türk lirası olur. Yaş üzüm kurutulduğunda $100 - 100 \cdot \frac{40}{100} = 100 - 40 = 60$ kg kuru üzüm elde edilir. Buradan 1 kg kuru üzümün maliyet fiyatı $600 : 60 = 10$ Türk lirası olarak bulunur.

Bu durumda tüccar 1 kg kuru üzümü %20 kârla $10 + 10 \cdot \frac{20}{100} = 10 + 2 = 12$ Türk lirasına satmalıdır.

ÖRNEK 49

Atakan Bey, evinin bir aylık su faturasını ₺96 olarak ödemiştir. Ödediği faturadaki tüm vergilerin toplam tutarı, su tüketim miktarına ödediği paranın %20 si kadardır. Buna göre Atakan Bey'in ödediği vergi tutarını bulunuz.

ÇÖZÜM

Su tüketim miktarına ödediği para 100x olsun. Vergiler için ödenen para 100x in %20 si yani 20x olur. Fatura tutarı $100x + 20x = 96$ Türk lirasıdır.

120x ——— ₺96 ise

20x ——— ₺A

$120x \cdot A = 96 \cdot 20x$ ise $A = 16$ Türk lirası vergi ödemiştir.

ÖRNEK 50

Bir elektrik şirketi abonelerinden zamanında ödenmeyen faturalar için aylık %8 gecikme zammı almaktadır. Ocak ayı elektrik faturası ₺150 olan Betül Hanım şubat ayında gelen ₺135 lık fatura ile birlikte bu iki faturayı şubat ayında ödeyecektir. Buna göre Betül Hanım'ın toplam kaç Türk lirası ödeyeceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Betül Hanım faturasını %8 fazla ödeyeceğinden ocak ayı faturası,

$150 + 150 \cdot \frac{8}{100} = 150 + 12 = 162$ Türk lirasıdır.

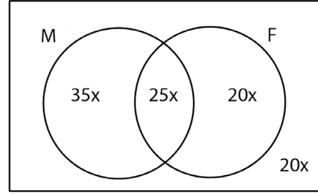
Şubat ayı faturası ile birlikte toplam $162 + 135 = 297$ Türk lirası öder.



ÖRNEK 51

Bir sınıftaki öğrencilerin %60 ı matematik, %45 i fizik, %25 i de her iki dersten geçmiştir. Bu iki dersten kalan 8 öğrenci olduğuna göre sadece matematikten geçen kaç öğrenci olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Sınıf mevcuduna 100x denilirse matematikten geçenlerin sayısı 60x, fizikten geçenlerin sayısı 45x ve her iki dersten geçenlerin sayısı 25x olur. Elde edilen bu bilgiler yandaki Venn şemasında gösterilirse bu iki dersten kalan öğrenci sayısının 20x olduğu görülür.

$20x = 8$ ise $x = 0,4$ olur.

Sadece matematikten geçen öğrenci sayısı ise $35x = 35 \cdot 0,4 = 14$ olur.

ÖRNEK 52

Fatih tanesini ₺40 ndan aldığı elektrikli ısıtıcılarının her biri için %10 tutarında kargo ücreti ödeyerek bu ısıtıcıları kendi internet sitesinde ₺55 na satmaktadır. Fatih'in bu üründen elde ettiği kâr oranının % kaç olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Isıtıcının Fatih'e maliyeti $40 + 40 \cdot \frac{10}{100} = 40 + 4 = 44$ Türk lirasıdır. Bu ürünün bir tanesinden kaç Türk lirası kâr ettiğini hesaplamak için ₺55 satış fiyatından toplam maliyet olan ₺44 atılarak $55 - 44 = 11$ Türk lirası bulunur.

₺44 ⟶ ₺11 kâr
₺100 nda ⟶ ₺x kâr

$44x = 100 \cdot 11$ ise $x = 25$ ve cevap %25 olarak bulunur.

ÖRNEK 53

Bir mağaza aynı üründen 2 veya daha fazlasını alan müşterilerine aşağıdaki kampanyayı uygulamaktadır

- İkinci ürünün etiket fiyatı üzerinden %50 indirim,
- Üçüncü ve sonraki her bir ürüne ise etiket fiyatı üzerinden %70 indirim yapılacaktır.

Bu mağazada aynı üründen 3 tane alan bir müşteriye yapılan toplam indirimin yüzde kaç olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Ürünün fiyatına 100x denilirse
1. ürün fiyatı 100x,

2. ürün fiyatı $100x - 100x \cdot \frac{50}{100} = 100x - 50x = 50x$,

3. ürünün fiyatı $100x - 100x \cdot \frac{70}{100} = 100x - 70x = 30x$ olur.

Bu ürünlerden 3 tane alan müşteri $3 \cdot 100x = 300x$ ödemesi gerekirken yapılan indirimlerle, $100x + 50x + 30x = 180x$ Türk lirası öder. Böylece yapılan toplam indirim 120x olur. İndirim oranına a denilirse

₺300x ⟶ 120x indirim
100 ⟶ a indirim

$300x \cdot a = 120x \cdot 100$ olup $a = 40$ olup %40 indirim yapılmış olur.



ÖRNEK 54

3 kg şeker, 5 kg un ve 7 kg sudan oluşan karışımın şeker oranının yüzde kaç olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Karışımın toplam ağırlığı $3+5+7=15$ kg olup karışımdaki şeker miktarı 3 kg dır. Doğru orantı yardımıyla

15 kg karışım — 3 kg şeker
100 kg karışım — x kg şeker

$15x = 100 \cdot 3$ olup $x = 20$ olur. Buradan karışımın şeker yüzdesi %20 olur.

ÖRNEK 55

% 30 u tuz olan 40 gram tuzlu su karışımına 10 gram saf tuz ilave edersek yeni karışımın tuz oranının yüzde kaç olacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

Tuzlu su karışımındaki tuz miktarı $40 \cdot \frac{30}{100} = 12$ gram olur.
Bu karışıma 10 gram tuz ilave edilirse karışımdaki tuz miktarı $10+12=22$ gram olur. Karışımın tamamı ise 50 gram olacaktır. Doğru orantı yardımıyla

50 gram karışım — 22 gram tuz
100 gram karışım — x gram tuz

$50x = 22 \cdot 100$ denkleminden $x = 44$ olarak bulunur.
Karışımın tuz oranı %44 olur.

ÖRNEK 56

% 25 i şeker olan 40 gram şekerli su ile % 60 ı şeker olan 60 gram şekerli su karıştırıldığında karışımdaki şeker oranının yüzde kaç olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

1. yol

Karışımda, $40 \cdot \frac{25}{100} + 60 \cdot \frac{60}{100} = 10 + 36 = 46$ gr şeker olur. Toplam karışım 100 gr olduğundan, karışımdaki şeker oranı %46 olur.

2. yol

Verilen bilgilere uygun olarak kaplar çizilip kapların alt kısmına şeker oranları üst kısmına ise karışım miktarları yazılarak işlemler daha kolay bir hâle getirilebilir.

Miktar	40	+	60	=	100
%	25		60		x

$40 \cdot 25 + 60 \cdot 60 = 100.x$
$1000 + 3600 = 100x$
$4600 = 100x$
$x = 46$ bulunur.
Cevap %46 olur.





Herhangi bir karışımın bir miktarının dökülmesi karışımı oluşturan maddelerin oranlarını değiştirmez.



Su ekleme veya buharlaştırma problemlerinde;

- İstenilen yüzde suya ait değil ise su yüzdesi %0,
- İstenilen yüzde suya ait ise su yüzdesi %100 alınır.

ÖRNEK 57

% 20 si tuz olan 150 litre tuzlu suyun $\frac{1}{5}$ i dökülüyor. Yerine dökülen miktar kadar saf tuz ekleniyor. Son durumda karışımın su oranının % kaç olacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

Miktar	150	-	30	+	30	=	150
%	20		20		100		x

$20 \cdot 150 - 20 \cdot 30 + 100 \cdot 30 = x \cdot 150$

$3000 - 600 + 3000 = 150x$

$5400 = 150x$

$x = 36$ olur. Son karışımın %36 sı tuz ise %64 ü sudur.

ÖRNEK 58

70 gram şekerli sudan 20 gram su buharlaştırıldığında kalan şekerli suyun şeker oranı % 56 olmaktadır. Buna göre başlangıçtaki karışımın şeker oranının yüzde kaç olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Miktar	70	-	20	=	50
%	x		0		56

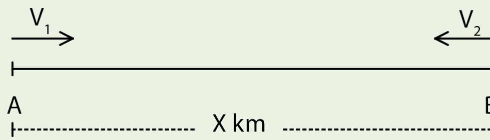
$x \cdot 70 - 0 \cdot 20 = 56 \,.\, 50$

$70 \cdot x = 2800$

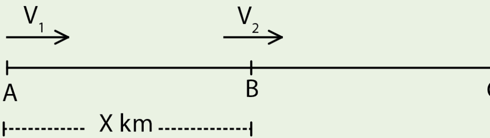
$x = 40$ olur. Başlangıçtaki karışımın şeker oranı %40 olur.

Hareket Problemleri

X yol, V hız, t zaman olmak üzere sabit V hızıyla t saatte hareket eden bir aracın alacağı yol **X = V · t** formülü ile bulunur.



Yukarıdaki şekilde A ve B noktalarından aynı anda birbirine doğru V_1 ve V_2 hızlarıyla hareket eden araçlar, t saat sonunda karşılaşırlarsa X yolu, $\mathbf{X = (V_1 + V_2) \cdot t}$ formülü ile bulunur.



Yukarıdaki şekilde A ve B noktalarından aynı anda aynı yöne V_1 ve V_2 ($V_1 > V_2$) hızlarıyla hareket eden araçlar, t saat sonunda C noktasında yan yana gelirse X yolu, $\mathbf{X = (V_1 - V_2) \cdot t}$ formülü ile bulunur.

Bir aracın belirli bir yol boyunca ortalama hızı V_{ort} olmak üzere

$V_{ort} = \dfrac{\text{Toplam Yol}}{\text{Toplam Zaman}}$ formülü ile hesaplanır.



ÖRNEK 59

72 km/sa. hızla hareket eden bir aracın hızını m/sn. cinsinden yazınız.

ÇÖZÜM

Örnekte istenilen, 1 saatte 72 km yol alan aracın 1 saniyede kaç metre yol alacağının bulunmasıdır. 72 km=72 000 m ve 1 saat = 3600 saniyedir. Doğru orantı yardımıyla

3600 sn. de ⤡ 72 000 m

1 sn. de ⤢ x m

$3600x = 72\,000$ ise $x = 20$ olur.

Bu durumda 72km/sa. = 20 m/sn. olur.

ÖRNEK 60

Saatteki hızı 75 km olan bir trenin 12 saniyede kaç metre yol alacağını bulunuz.

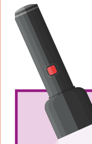
ÇÖZÜM

1 saat = 3600 saniye ve 75 km = 75 000 m olur. Bu durumda

3600 saniyede ⤡ 75 000 metre

12 saniyede ⤢ x metre

$x \cdot 3600 = 12 \cdot 75\,000$ denkleminden $x = 250$ metredir.



Işık hızının saniyede yaklaşık 300 000 kilometre olduğunu biliyor muydunuz?

ÖRNEK 61

Bir araç A şehrinden B şehrine 60 km/sa. hızla gidip 90 km/sa. hızla dönmüştür. Bu aracın A dan B ye gidiş ve dönüşü toplam 10 saat sürdüğüne göre bu iki şehir arasındaki yolun kaç kilometre olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

A ve B şehirleri arasındaki uzaklığa X denilirse aracın gidiş süresi $\frac{X}{60}$ saat, dönüş süresi ise $\frac{X}{90}$ saat olur.

$\frac{X}{60} + \frac{X}{90} = 10$ olduğundan $X = 360$ km olur.

ÖRNEK 62

Murat, evden okula 60 m/dk. hızla yürürse okula ulaşması gereken normal süreden 3 dakika geç, 80 m/dk. hızla yürürse normal süreden 2 dakika erken ulaşıyor. Buna göre Murat'ın evinin okula uzaklığının kaç metre olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Murat'ın okula varması gereken normal süreye t, ev ile okul arasındaki uzaklığa X denilirse

$X = 60 \cdot (t + 3) = 80 \cdot (t - 2)$ denkleminden $t = 17$ dakika olarak bulunur.

Bu durumda t değeri yerine yazılarak $X = 60 \cdot (17 + 3) = 60 \cdot 20 = 1200$ metre bulunur.



ÖRNEK 63

Saatteki hızı 90 km olan bir tır 180 metre uzunluğundaki bir köprüyü 8 saniyede geçmektedir. Buna göre tırın boyunun kaç metre olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Tırın köprüyü geçerken alacağı yol, köprünün boyu ile tırın boyunun toplamı kadar olacaktır. Birimler çevrilirse

90 km = 90 000 m , 8 saniye= $\frac{8}{3600}$ saat olur.

Tırın boyuna x denilirse $x + 180 = 90\,000 \cdot \frac{8}{3600}$

$x + 180 = 200$

$x = 20$ metredir.

ÖRNEK 64

Bir araç, yarısı asfalt diğer yarısı toprak olan 480 km lik bir yolun asfalt kısmını saatte 120 km hızla toprak kısmını ise saatte 80 km hızla geçmiştir. Bu aracın yol boyunca ortalama hızının saatte kaç kilometre olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Aracın aldığı yolun yarısı 240 km olur.

Asfalt yol için geçen zamana t_1 denilirse $240=120t_1 \Rightarrow t_1 = 2$ olur.

Toprak yol için geçen zamana t_2 denilirse $240=80t_2 \Rightarrow t_2 = 3$ olur.

Buna göre ortalama hız, $V_{ort} = \frac{\text{Toplam yol}}{\text{Toplam zaman}} = \frac{480}{2+3} = \frac{480}{5} = 96\ \text{km/sa.}$ olur.

ÖRNEK 65

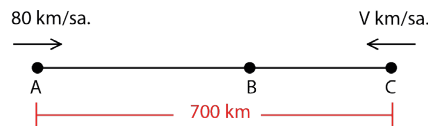
Bir otobüs firması aralarında 800 km mesafe bulunan A ve B şehirleri arasında sefer yapmaktadır. Bu firmaya ait bir otobüs A dan B ye doğru saat 21.00 de saatte 100 km hızla hareket etmiştir. Her 3 saatte bir yarım saat mola veren bu otobüsün B şehrine saat kaçta ulaşacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

Otobüs A ve B şehirleri arasını t saatte alırsa $800 = 100t \Rightarrow t = 8$ olur.

8 saat içinde iki tane 3 saatlik süre bulunduğundan otobüs iki defa mola vererek 1 saat bekleme yapacaktır. Buna göre geçen toplam süre, 8 + 1 = 9 saat olur. Harekete saat 21.00 de başladığına göre B şehrine 9 saat sonra yani saat 06.00 da ulaşır.

ÖRNEK 66



Şekildeki gibi doğrusal bir yol boyunca bulunan A, B ve C şehirlerinden A ile C şehri arası 700 km olur. A dan 80 km/sa. hızla B ye doğru, C den V km/sa. hızla B ye doğru iki araç aynı anda hareket ediyor. Bu iki araç 5 saat sonra B noktasında karşılaştıklarına göre B ile C şehirleri arasının kaç kilometre olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

İki araç birbirlerine doğru hareket ettiğinden (zıt yönlerde)

$700 = (80 + V) \cdot 5$

$140 = 80 + V$

$V = 60$ km/sa. olur. Buradan

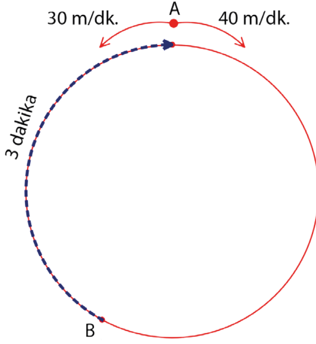
$|BC| = 60 \cdot 5 = 300$ km olur.



ÖRNEK 67

Dairesel bir pistte hızları 30 m/dk. ve 40 m/dk. olan iki bisikletli aynı anda, aynı noktadan, zıt yönde hareket ediyorlar. Bu iki bisikletli karşılaştıktan sonra hiç durmadan yollarına devam ederse 3 dakika sonra hızlı olan bisikletli başladığı noktaya tekrar geliyor. Buna göre dairesel pistin uzunluğunun kaç metre olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Problemde verilenler şekildeki gibi ifade edilirse

B noktasında karşılaşan bisikletlerden hızlı olan B den A ya 40 m/dk. hızla 3 dakikada gittiğinden B ile A arasındaki mesafe $40 \cdot 3 = 120$ m olur.

A dan 30 m/dk. hızla harekete başlayan bisikletli ise B ye $120 : 30 = 4$ dakikada varacaktır. Buna göre hızlı olan bisikletli diğeri ile karşılaşana kadar 4 dakika geçmiş ve karşılaştıktan 3 dakika sonra A noktasına ulaşmıştır. Buna göre toplam $4 + 3 = 7$ dakika boyunca hareket etmiştir.

Dolayısıyla pistin uzunluğu $7 \cdot 40 = 280$ metre olarak bulunur.

ÖRNEK 68

Yiğit evden okula yürüyerek 30 dakikada gitmektedir. 08.30 da dersi başlayan Yiğit ders zilinden 15 dakika önce okulda olacak şekilde evden çıkıyor. Yolun yarısına geldiğinde arkadaşı Yusuf'a götürmek için söz verdiği hediyeyi evde unuttuğunu fark ediyor. Verdiği sözü yerine getirmek için sabit hızla koşarak eve gidip hediyeyi alıyor ve yine aynı sabit hızla koşmaya devam ederek ders zili çalarken okulda oluyor. Yiğit ev ile okul arasında her zaman aynı yolu kullandığına göre hediyeyi evden saat kaçta aldığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Yiğit'in evi ile okulu arasındaki mesafe 2x metre olsun. Ayrıca Yiğit okula 15 dakika önce ulaşacak şekilde evden çıkacağından saat 07.45 te hareket edecektir.Yiğit 2x metre yolu 30 dakikada gittiğinden yolun yarısına (x metre) 15 dakikada gelir (Saat 08.00). Bu saatten sonra koşmaya başlayan Yiğit'in eve uğrayıp tekrar okula dönmesi için 3x metre yolu ve 30 dakika süresi vardır. Buradan 3x metre yolu 30 dakikada koşacağından eve (x metre) 10 dakikada ulaşması gerekir. Buna göre 08.10 da evden hediyeyi almalıdır.

ÖRNEK 69

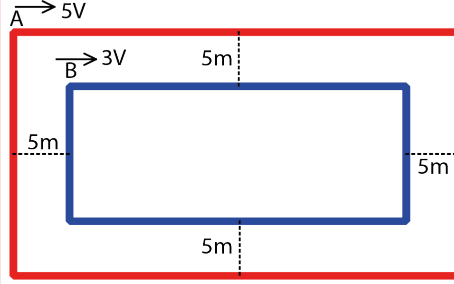
Akıntı hızının sabit ve 3 km/sa. olduğu bir nehirde durgun sudaki hızı 15 km/sa. olan A noktasındaki bir tekne, akıntı ile aynı yönde 6 saat hareket ederek B noktasına ulaşıyor. Bu teknenin B noktasından harekete başladığı noktaya kaç saatte döneceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Tekne akıntı yönünde hareket ettiğinde teknenin hızı $15 + 3 = 18$ km/sa. ve hareket süresi 6 saat olduğundan alacağı yol, $18 \cdot 6 = 108$ km bulunur. Teknenin dönüşteki hızı ise akıntıya ters hareket ettiğinden $15 - 3 = 12$ km/sa. olur. Bu hızla 108 kilometrelik yolu $108 : 12 = 9$ saatte alır.



ÖRNEK 70



Yandaki şekilde A noktasından 5V, B noktasından 3V hızlarıyla aynı anda oklar yönünde harekete başlayan iki araç, dikdörtgen şeklindeki pistler etrafındaki turlarını aynı anda tamamlamaktadırlar. Kırmızı ve mavi pistlerin kenarları arasındaki mesafe beşer metre olduğuna göre dıştaki kırmızı pistin uzunluğunun kaç metre olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

İçteki mavi pistin çevresine x metre denirse dıştaki kırmızı pistin çevresi x+40 metre olacaktır. Araçlar kendi turlarını aynı sürede tamamladıklarından

$\frac{x}{3V} = \frac{x+40}{5V}$ olur. Böylece $5x = 3x + 120$

$2x = 120$

$x = 60$ olur.

Bu durumda kırmızı pistin çevresi, $x + 40 = 60 + 40 = 100$ metredir.

ÖRNEK 71



Muzlu süt satan bir büfeci, elinde bulunan bir miktar muzlu sütün yarısını 0,5 litrelik, kalan yarısını ise 1,5 litrelik şişelere doldurarak satmıştır.

Büfeci bu şekilde 36 şişeyi tam doldurup sattığına göre büfecinin elinde başlangıçta kaç litre muzlu süt olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

0,5 litrelik şişe sayısına x denilirse 1,5 litrelik şişe sayısı 36–x olur.

Bu durumda $0,5 \cdot x = 1,5 \cdot (36 - x)$ ise $x = 27$ olur. Toplam muzlu süt miktarı ise $0,5 \cdot 27 + 1,5 \cdot (36 - 27) = 13,5 + 13,5 = 27$ litredir.

ÖRNEK 72



Bir kova boya ile sandalye boyamaya başlayan Ümit Usta, boyanın $\frac{3}{5}$ ü bittiğinde elindeki boyaya yarım kova daha boya ilave ederek boyama işlemine devam etmiştir.

Tüm boya bittiğinde toplam 60 sandalye boyayan Ümit Usta'nın boya ilavesi yaptığı ana kadar toplam kaç sandalye boyadığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Bu kovadaki boya miktarı 10x litre olsun. $10x \cdot \frac{3}{5} = 6x$ olup 6x litre kullanmış ve yarım kova yani 5x litre boya ilave etmiştir. Böylece Ümit Usta'nın kullandığı toplam boya miktarı 15x litre olur. Buradan

15x litre boya ile — 60 sandalye boyanırsa

x litre boya ile — k sandalye boyanır.

$k \cdot 15x = 60x$ ise $k = 4$ olur.

Yani x litre boya ile 4 sandalye boyamıştır. İlave yapana kadar kullandığı boya miktarı 6x litre olduğundan bu boya ile $6 \cdot 4 = 24$ adet sandalye boyamıştır.



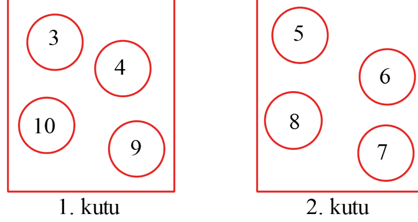
ÖRNEK 73

3 ten 10 a kadar numaralandırılmış toplar, iki farklı kutuya eşit sayıda dağıtılıyor.

- Kutulardaki topların numaraları toplamı birbirine eşittir.
- Kutularda numarası 4 e tam bölünen yalnız bir top ve 5 e tam bölünen yalnız bir top vardır.

Buna göre 3 numaralı topun bulunduğu kutudaki topların numaraları çarpımının kaç olacağını bulunuz.

ÇÖZÜM



Topların üzerindeki sayıların toplamı 52 olup her bir kutudaki topların sayıları toplamı 26 olacaktır. Ayrıca 4 ya da 5 e tam bölünen numaralar 4, 5, 8 ve 10 olup 4 ve 10 aynı kutuya, 5 ve 8 ise diğer kutuya yerleştirildiğinde geri kalan toplar da şekildeki gibi yerleştirilir.

Bu durumda 3 numaralı topun bulunduğu kutudaki numaraların çarpımı,

$3 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 10 = 1080$ olur.

ÖRNEK 74



Bir hava yolu şirketi yolcu bagajlarının 20 kg a kadar olan kısmını ücretsiz, 20 ile 40 kg arası bagajın her kilogramı için sabit bir ücretle 40 kg dan sonraki bagajın her kilogramını farklı bir sabit ücretle taşımaktadır.

Bu hava yolu şirketi ile seyahat edenlerden Ahmet 36 kg bagaj için ₺24, Zeynep 44 kg bagaj için ₺40 ödediğine göre, İsmail'in 52 kg bagaj için kaç Türk lirası ödeme yapacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

20 kg ile 40 kg arasındaki bagajın her kilogramının ücretine x, 40 kg dan sonraki bagajın her kilogramının ücretine y denilirse

Ahmet 36 kg bagaj için
$36 - 20 = 16$ ve $16x = 24$ Türk lirası öder. Buradan $x = 1,5$ Türk lirası bulunur.

Zeynep 44 kg bagaj için
- 20 kg ile 40 kg arası $20 \cdot 1,5 = 30$ Türk lirası,
- 40 kg dan sonraki bagaj $44 - 40 = 4$ kg için ₺4y
  yani toplam $30 + 4y = 40$ Türk lirası öder.
  Buradan $y = 2,5$ Türk lirasıdır.

İsmail 52 kg bagajı için
- 20 kg ile 40 kg arası $20 \cdot 1,5 = 30$ Türk lirası,
- 40 kg dan sonraki bagaj $52 - 40 = 12$ kg için $12y = 12 \cdot 2,5 = 30$ Türk lirası öder.

Bu durumda İsmail toplam $30 + 30 = 60$ Türk lirası öder.



ÖRNEK 75

Alper Bey TOKİ'den (Toplu Konut İdaresi Başkanlığı) ev almaya hak kazanıyor. Aynı fiyat üzerinden Alper Bey'e 2 çeşit ödeme şekli sunuluyor.

- Birinci ödeme şeklinde Alper Bey paranın %10 unu peşin öderse 96 ay taksitli ödeme yapması
- İkinci ödeme şeklinde paranın %25 ini peşin öderse 120 ay taksitli ödeme yapması gerekmektedir.

Birinci ödeme şeklini tercih eden Alper Bey aylık ₺1215 ödeme yaptığına göre ikinci ödeme şeklini tercih etseydi Alper Bey'in aylık ne kadar ödeyeceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Evin fiyatına 100x denilirse %10 peşinat için 10x ini peşin öder. Kalan 90x olur.

Birinci ödemede 96 ay taksit olduğundan taksitler toplamı $96 \cdot 1215 = 116\,640$ tır. Taksitler toplamı evin fiyatının %90 ı olduğundan $90 \cdot x = 116\,640$ ve $x = 1296$ olur. Bu durumda evin fiyatı $100 \cdot 1296 = 129\,600$ Türk lirası olur.

İkinci durumu tercih etmesi hâlinde %25 ini peşin öder ve geriye ödeyeceği taksit miktarı olan 75x kalır. Bu durumda toplam taksit miktarı

$75x = 75 \cdot 1296 = 97\,200$ Türk lirası olacaktır.

Bu parayı 120 taksitle ödeyeceğinden aylık taksit miktarı $97\,200 : 120 = 810$ Türk lirası olur.

ÖRNEK 76

Selden zarar gören bir köydeki ailelere valilik tarafından yardım paketi dağıtılacaktır. Ailedeki birey sayısı 4 ve 4 ten az ise 2 paket, 4 ten fazla ise 3 paket yardım yapılacaktır.

Ailelerdeki birey sayısı 7 yi geçmediğine ve toplam 79 adet paket dağıtıldığına göre köyün nüfusunun **en çok** kaç kişi olabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Birey sayısı 4 ve 4 ten az olan aile sayısına x , birey sayısı 4 ten fazla olan aile sayısına y denilirse toplam dağıtılacak paket sayısı $2x + 3y = 79$ olur. Köy nüfusunun en fazla sayıda olması için x in en küçük y nin en büyük değerini alması gerekir.

x değişkeni 0 ve 1 değerlerini aldığında y değişkeni bir tam sayı değeri alamayacağından x en az 2 alınırsa y en çok 25 bulunur.

Bu durumda köy nüfusu en fazla $2 \cdot 4 + 25 \cdot 7 = 8 + 175 = 183$ olur.



ÖRNEK 77

A, B, C kaplarında bulunan 30 bilyeyle ilgili olarak şunlar bilinmektedir.

- Başlangıçta kapların her birinde farklı sayıda bilye vardır.
- A kabındaki bilyelerin $\frac{1}{2}$ i C kabına konuyor.
- A da kalan bilyelerin $\frac{1}{5}$ i de B kabına konuyor.

Bu işlemler sonucunda A ve B kaplarındaki bilye sayıları birbirine eşit ve C kabındaki bilye sayısı 22 oluyor.

Buna göre başlangıçta B kabındaki bilye sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

Son durumdan yola çıkılırsa C kabında 22 bilye olduğundan A ve B kaplarında dörder bilye kalır. Başlangıçtaki A kabındaki bilye sayısına x denilir ve $\frac{1}{2}$ i C kabına konursa geriye $x-\frac{x}{2}=\frac{x}{2}$ bilye kalır.

Sonra A da kalan bilyelerin $\frac{1}{5}$ i B kabına konursa A kabında $\frac{x}{2}-\frac{x}{10}=\frac{4x}{10}$ tane bilye kalır.

Bu da 4 e eşitlenerek $\frac{4x}{10}=4 \Rightarrow x=10$ bulunur.

B kabında başlangıçtaki bilye sayısına y denilirse son durumunda A kabındaki bilyelerin $\frac{1}{5}$ i ile birlikte toplam $y+\frac{x}{10}$ bilye bulunur.

Bu denklem 4 e eşitlenir ve x değeri yerine yazılırsa

$y+\frac{x}{10}=4 \Rightarrow y+\frac{10}{10}=y+1=4 \Rightarrow y=3$ olur.

Buradan B kabında başlangıçtaki bilye sayısı 3 olur.

ÖRNEK 78



Üniversite öğrencisi Neslihan, iki GSM şirketinin mesaj kullanımı için belirlediği fiyatları incelemiştir. Birinci şirketin tarifesi mesaj başına 4,2 kr., ikinci şirketin tarifesi ise aylık 1000 mesajlık paket için ₺8 şeklindedir.

Neslihan ikinci şirketin tarifesini avantajlı bulup tercih ettiğine göre Neslihan'ın aylık **en az** kaç mesaj attığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Neslihan'ın ikinci tarifede ödeyeceği ₺8 = 800 kuruş birinci tarifede ödeyeceği 4,2 kuruşa bölünürse

$\frac{800}{4,2} \cong 190,47$ yaklaşık değeri bulunur.

Neslihan bu durumda aylık en az 191 mesaj atmaktadır.



ALIŞTIRMALAR

1. Toplamları 24 olan iki sayıdan birinin 3 katı diğerinin 5 katına eşittir. Buna göre küçük sayıyı bulunuz.

2. Selim'in parası Selin'in parasının 4 katıdır. Selim Selin'e ₺54 verirse paraları eşit olur. Buna göre Selin'in ilk durumdaki parasının kaç Türk lirası olduğunu bulunuz.

3. Bir çay bahçesinde 3 veya 4 kişilik toplam 20 masa vardır. Çay bahçesinin kapasitesi 74 kişi olduğuna göre 4 kişilik masa sayısını bulunuz.

4. Bir manav elindeki limonların birinci gün $\frac{1}{4}$ ini, ikinci gün ise kalan limonların $\frac{1}{5}$ ini satmıştır. Geriye 48 kg limonu kaldığına göre toplam kaç kg limon sattığını bulunuz.

5. Şenol Bey eve internet bağlatmak için 4 GB lık veri indirme ücreti ₺6 olan bir firma ile anlaşıyor. Şenol Bey, bir ayda 38 GB lık indirme yaparsa Şenol Bey'in ay sonundaki fatura tutarının kaç Türk lirası olacağını bulunuz.

6. Pazarda öğleden önce 3 kg patatesi ₺5 na satan bir pazarcı, öğleden sonra 4 kg patatesi ₺5 na satmaya başlıyor. Buna göre pazarcının ilk satış fiyatına göre yüzde kaç indirim yaptığını bulunuz.

7. Bir ürün alış fiyatı üzerinden %20 kârla satılırken satış fiyatı üzerinden %20 zamla ₺360 na satılıyor. Buna göre ürünün alış fiyatını bulunuz.

8. Bir tüccar X tanesini ₺Y na aldığı bir ürünün tanesini ₺Z ndan satmaktadır. Tüccar bu satıştan ne kâr ne de zarar ettiğine göre X, Y ve Z arasındaki bağıntıyı bulunuz.

9. Nazan ile Numan'ın yaşları toplamı 28 dir. Eğer Nazan 4 yıl önce, Numan ise 5 yıl sonra doğmuş olsaydı Numan'ın yaşı Nazan'ın yaşından 3 fazla olacaktı. Buna göre Nazan'ın şimdiki yaşını bulunuz.

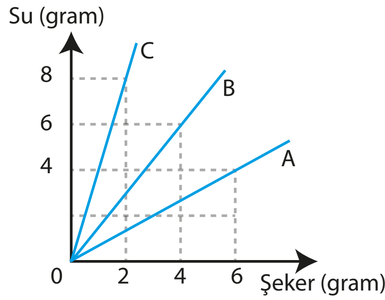
10. Bayan çantası satan bir mağaza alış fiyatı üzerine %30 kâr payı ekleyerek etiket fiyatını belirlemektedir. Sezon sonu ise etiket fiyatı üzerinden %30 indirim yaparak satış yapmaktadır. Sezon sonunda maliyetinden ₺18 daha düşük fiyata satılan bir çantanın alış fiyatının kaç Türk lirası olduğunu bulunuz.

11. %40 ı şeker olan 120 litre şekerli suyun yarısı ile %20 si şeker olan 100 litre şekerli suyun $\frac{2}{5}$ si karıştırılıyor. Son durumda karışımın şeker oranının yüzde kaç olacağını bulunuz.

12. Bir araç hızını saatte 30 km artırırsa bir yolu 4 saatte, hızını saatte 20 km azaltırsa aynı yolu 6 saatte almaktadır. Buna göre bu aracın hızını değiştirmeden bu yolu kaç saatte alacağını bulunuz.

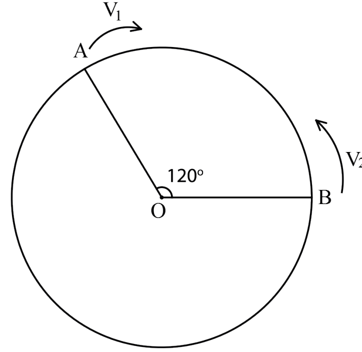


13.



Yandaki grafikte A, B ve C kaplarındaki şeker ve su miktarları verilmiştir. Bu kaplardan eşit miktarda karışımlar alınıp yeni bir kaba dökülürse oluşan karışımın şeker oranının yüzde kaç olacağını bulunuz.

14. Şekildeki dairesel pistte V_1=30 m/sn. ve V_2=20 m/sn. hızlarıyla iki araç aynı anda birbirlerine doğru hareket ettikten 4 sn. sonra ilk kez karşılaşıyorlar. Bu araçlar hiç durmadan yollarına devam ettiğinde bu araçların 11. kez karşılaşmalarının harekete başlamalarından kaç saniye sonra gerçekleşeceğini bulunuz.

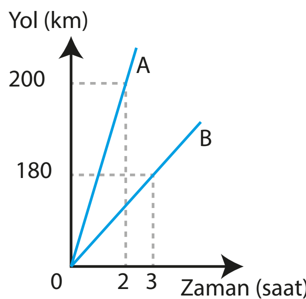


15. Hızları saatte 80 km ve 60 km olan iki araç aynı anda, aynı noktadan, aynı yolu kullanarak aynı yere gittiklerinde, hızlı araç yavaş olan araçtan 2 saat önce varmaktadır. Buna göre yavaş olan aracın bu yolu kaç saatte gittiğini bulunuz.

16. Bir karışımdaki şeker miktarının su miktarına oranı $\frac{8}{17}$ dir. Buna göre karışımdaki şeker oranının yüzde kaç olduğunu bulunuz.

17. Bataryaları boş olan A ve B marka cep telefonlarının şarj olma süreleri sırasıyla 4 ve 5 saattir. A marka telefonun %20 si, B marka telefonun %10 u dolu iken aynı anda şarja takılan bu telefonlardan A marka telefonun bataryası %100 dolduğunda B marka telefonun bataryasının yüzde kaç dolmuş olacağını bulunuz.

18.



Yandaki şekilde A ve B araçlarının yol-zaman grafiği verilmiştir. Bu araçların aynı anda aralarında 800 km olan iki noktadan birbirine doğru hareket ettikten kaç saat sonra karşılaşacaklarını bulunuz.

19. Bir ayda 200 kilovat elektrik tüketen bir haneye ay sonunda ₺100 fatura gelmiştir. Bu faturadaki vergi miktarı, tüketilen elektrik tutarının %25 i kadardır. Buna göre 1 kilovat elektriğin fiyatı kaç Türk lirasıdır?



9.3. ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

1. M ve N birer küme olmak üzere

$M = (-5,4]$ ve $N = [1,\infty)$ olarak veriliyor. Buna göre $M - N$ kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-5, 1]$ B) $(-5, 1)$ C) $(-5, \infty)$ D) $(-5, 2)$ E) $[-5, 2]$

2. $6 \cdot (2x - 4) + 8 = 3 \cdot (4x - 4) - 4$ denkleminin gerçek sayılardaki çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{0\}$ B) $\{\ \}$ C) $\mathbb{R}$ D) $\{4\}$ E) $\{-4\}$

3. $2 + \dfrac{20}{3 + \dfrac{12}{x-1}} = 6$ denklemini sağlayan x değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

4. $\dfrac{x+4}{x-2} + \dfrac{x-5}{x+3} = \dfrac{x+4}{x-2} + \dfrac{3}{4}$ denklemini sağlayan x değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 30 B) 28 C) 29 D) 27 E) 26

5. M ve N birer doğal sayıdır.

$$\begin{array}{l|l} M+2 & 6 \\ \cline{2-2} - & N-3 \\ \hline 4 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} N+5 & 5 \\ \cline{2-2} - & 2 \\ \hline 3 & \end{array}$$

Yukarıdaki bölme işlemlerine göre M sayısı kaçtır?

A) 32 B) 41 C) 56 D) 78 E) 99

6. AB iki basamaklı doğal sayısının A+B toplamına bölümünde bölüm 4, kalan 3 olduğuna göre kaç farklı AB yazılabilir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

7. Aşağıdaki sayılardan hangisi 2, 3 ve 4 ile tam bölünür?

A) 145 B) 242 C) 366 D) 456 E) 632

8. 23 basamaklı 4242...4 sayısının 9 ile bölümünden kalan kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 3 D) 4 E) 7

9. Beş basamaklı 4x56y sayısının hem 3 hem de 5 ile bölümünden kalan 2 olduğuna göre x + y toplamı aşağıdakilerden hangisi **olamaz**?

A) 2 B) 5 C) 8 D) 11 E) 15

10. x4yz ve x7yz dört basamaklı birer doğal sayıdır. x4yz sayısının 11 ile bölümünden kalan 4 olduğuna göre x7yz sayısının 11 ile bölümünden kalan kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 7 D) 9 E) 11

11. Bir A doğal sayısı 15 ile bölündüğünde bölüm x, kalan 9 dur. x doğal sayısının 4 ile bölümünden kalan 1 dir. Buna göre A doğal sayısının 12 ile bölümünden kalan kaçtır?

A) 0 B) 3 C) 7 D) 9 E) 10

12. 6 ya, 8 e ve 9 a bölündüğünde 4 kalanını veren **en küçük** iki basamaklı doğal sayı aşağıdakilerden hangisine tam olarak bölünür?

A) 7 B) 13 C) 16 D) 19 E) 23

13. Yaşar'ın 2 bilyesi daha olsaydı bilyeleri dörderli, beşerli ve altışarlı gruplara ayrılabilecekti. Buna göre Yaşar'ın bilyelerinin sayısı aşağıdakilerden hangisi **olabilir?**

A) 120 B) 182 C) 238 D) 302 E) 404

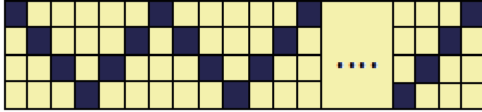


14. Bir marangoz boyutları 48 cm, 72 cm, x cm olan dikdörtgenler prizması şeklindeki tahta bloğu eş küplere ayırmıştır.

Toplam 168 tane eş küp elde ettiğine göre x **en az** kaçtır?

A) 80 B) 84 C) 88 D) 96 E) 168

15. Lacivert ve sarı eş kareler kullanılarak şekildeki gibi süsleme yapılmıştır.



Bu süslemede 55 lacivert kare olduğuna göre kaç tane sarı kare vardır?

A) 110 B) 125 C) 150 D) 165 E) 175

16. Ada ve Ata iki farklı şehirde yaşamakta olan iki kardeştir. Ada 15 günde bir, Ata ise 20 günde bir ailelerini ziyarete gelmektedirler. İki kardeş ilk kez cumartesi günü birlikte ailelerini ziyaret ettiklerine göre 5. kez ailelerini hangi gün birlikte ziyaret ederler?

A) Perşembe B) Cuma C) Cumartesi D) Pazar E) Pazartesi

17. 1234543212345432123 45... şeklinde her beş rakamda bir tekrar eden sayının soldan 500. basamağındaki rakam kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

18. Aynı hastanede görev yapan Dr. Sevilay Hanım 8 günde bir, Hemşire Gülay Hanım ise 5 günde bir nöbet tutmaktadır. İkisi birlikte ilk nöbetlerini salı günü tuttuklarına göre 11. nöbetlerini birlikte hangi gün tutarlar?

A) Pazartesi
B) Salı
C) Çarşamba
D) Perşembe
E) Cuma

19. $\frac{3-m}{2} \leq \frac{2m+4}{3}$ eşitsizliğini sağlayan m tam sayısının **en küçük** değeri kaçtır?

A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

20. $x-1 \leq 3-x < 7+3x$ eşitsizliğini sağlayan x gerçek sayılarının aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) (−1, 2] B) (1, 2) C) (−2, −1] D) [−1, 2) E) [−2, −1)

21. " Sayı doğrusu üzerinde 7 sayısına uzaklığı en az 10 birim olan gerçek sayılar" ifadesi aşağıdakilerden hangisinde doğru olarak belirtilmiştir?

A) $|x-7| > 10$
B) $|x-10| \geq 7$
C) $|x-7| < 10$
D) $|x-7| \leq 10$
E) $|x-7| \geq 10$

22. $x \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\frac{1}{32} \leq \frac{1}{4x+4} < \frac{1}{16}$ eşitsizliğinin gerçek sayılardaki çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) (4, 7] B) [4, 7) C) [3, 7] D) [3, 7) E) (3, 7]

23. a, b, c birer negatif tam sayıdır. $\frac{a}{b+c} < \frac{a}{a+c}$ olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur?

A) a > c B) a < c C) a > b D) b > a E) b > c

24. $2 < x < y < 4$ eşitsizliği veriliyor.
Buna göre $3x - 2y$ ifadesinin alabileceği **en küçük** tam sayı değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) −5 B) −4 C) −3 D) −2 E) −1



25. $\left|\frac{x-1}{30}\right| = 2017^{2017}$ denklemini sağlayan x değerleri toplamı kaçtır?

A) 3 B) 2 C) 1 D) 0 E) −1

26. $\left|\frac{1}{3-a}\right| = 2$ denklemini sağlayan a değerleri toplamı kaçtır?

A) −2 B) 0 C) 3 D) 4 E) 6

27. $4x + |3x| - 21 = 0$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) {3} B) {21} C) {3,21} D) Ø E) $\mathbb{R}$

28. a, b, A $\in \mathbb{R}$ olmak üzere
$A = |3a - 2b|$ olarak veriliyor. A nın en küçük değeri için $\frac{5a-2b}{b-a}$ işleminin sonucu kaçtır?

A) −4 B) −2 C) 0 D) 2 E) 4

29. x, y, z $\in \mathbb{R}^{+}$ olmak üzere
$\frac{1}{x} < \frac{1}{y} < \frac{1}{z}$ ise $|x-y| + |y-z| + |x-z|$ toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2x - 2z$ B) $2x - 2y$ C) $2y - 2x$ D) $2y - 2$ E) $2z - 2x$

30. a ve b birer gerçek sayıdır. Buna göre

I. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
II. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
III. $|a^b| = |a|^b$
IV. $|a - b| = |b - a|$

ifadelerinin hangileri daima doğrudur?

A) I, II B) I, III C) I, IV D) II, IV E) I, II, IV

31. m, n $\in \mathbb{R}$ olmak üzere
$|x - 3| < m$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $(-5, n)$ olduğuna göre m+n aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) 5 C) 9 D) 16 E) 19

32. $1 \le |x - 4| < 3$ eşitsizliğini sağlayan x tam sayılarının toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 16 B) 15 C) 14 D) 13 E) 12

33. x, y $\in \mathbb{R}$ olmak üzere
$|x - 6| < 2$ ve $|y + 1| < 2x$ tür. Buna göre $x + y$ nin **en büyük** tam sayı değeri kaçtır?

A) 18 B) 19 C) 20 D) 21 E) 22

34. $\left|\frac{x-4}{x+6}\right| + 6 \le 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(6, \infty)$ B) $(-6, \infty)$ C) $(-\infty, 6)$ D) $(-\infty, -6)$ E) Ø

35. $ax - by = 11$
$(a + 1) \cdot x + (b - 4) \cdot y = 8$ denklem sisteminin çözüm kümesi $(3, -1)$ sıralı ikilisi olduğuna göre $a + b$ toplamı kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

36. $|4x - y + 3| + |x + y + 12| = 0$ denklemini sağlayan x ve y değerlerinin çarpımı aşağıdakilerden hangisidir?

A) −9 B) −6 C) −3 D) 18 E) 27

37. $ax + 9y - 1 = 0$
$4x + ay - 5 = 0$ denklem sisteminin çözüm kümesi boş küme ise a gerçek sayısının negatif değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) −36 B) −6 C) −3 D) −2 E) −1

38. A B C

A şehrinden C şehrine doğru hareket eden bir araç 120 km sonra B ile C şehrinin orta noktasına, C şehrinden hareket eden bir araç ise 180 km sonra A ile B şehirlerinin orta noktasına ulaştığına göre A ile C şehirlerinin arasındaki uzaklık kaç km dir?

A) 100 B) 200 C) 300 D) 400 E) 500

39. $7x - 2y = -20$

$3x + 4y = 6$

$(m + 1) \cdot x + 2y = 0$

denklem sisteminin çözüm kümesi aynı (x,y) sıralı ikilisidir. Buna göre m kaçtır?

A) −3 B) −2 C) 0 D) 2 E) 3

40. $5x + 7y = -1$

$3x + 11y = -3$

denklem sistemi veriliyor. Buna göre $7x + 3y$ toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) −1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

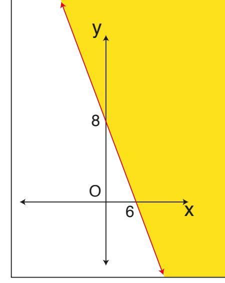
41. a, b, c sıfırdan farklı gerçek sayılardır.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6} \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{2} \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{3} \end{array}\right\} \text{ise } \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \text{ toplamı}$$

aşağıdakilerden hangisidir?

A) −1 B) 1 C) 2 D) 4 E) 6

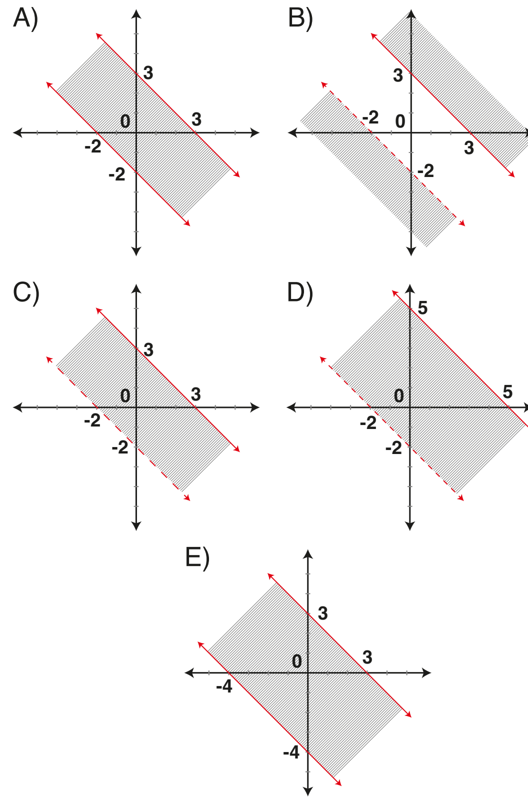
42.



Yukarıdaki boyalı bölge aşağıdaki eşitsizliklerden hangisinin çözüm kümesini belirtmektedir?

A) $4x + 3y > 24$
B) $4x + 3y \geq 24$
C) $4x - 3y > 24$
D) $4x + 3y < 24$
E) $4x + 3y \leq 24$

43. $A=\{(x,y) \mid -2 < x + y \leq 3,\ x, y \in \mathbb{R}\}$ kümesinin elemanları aşağıdaki grafiklerden hangisinde doğru boyanmıştır?



44. $n \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$\dfrac{3^{n-1} + 2 \cdot 3^{n-2}}{2 \cdot 3^{n-3} + 3^{n-2}}$ işleminin sonucu kaçtır?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

45. $3^a = 5$
$5^b = 2$
olduğuna göre 9^{ab+1} değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 16 B) 25 C) 27 D) 36 E) 75

46. $27^{2x-2} = 243^x$ denklemini sağlayan x değeri kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

47. $(2x-5)^{2x-6} - 1 = 0$ denklemini sağlayan farklı x değerlerinin toplamı kaçtır?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

48. $4^{3x} \cdot 8^{x-1} = 16^{2x-1} \cdot 2^{2-3x}$ denklemini sağlayan x değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$ D) 1 E) 4

49. $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere
$a^{0,6} = 64$ ise $a^{0,2}$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 8 B) 4 C) 2 D) 1 E) $\frac{1}{4}$

50. a ve b birer tam sayı olmak üzere
$35^{a-2} \cdot 7^{a+b} = 5^3$ ise b değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) 0 C) -3 D) -5 E) -8

51. $\dfrac{3^4 + 3^3}{9^a} = \dfrac{4}{3}$ denklemini sağlayan a değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 2 C) 0 D) -1 E) -2

52. $\dfrac{1}{3^{1-a}} = 2$ olduğuna göre 9^a değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{1}{4}$ C) 4 D) 9 E) 36

53. $\left[x^4 \cdot (-x^{-3})^4\right]^{\frac{1}{2}} : x^{-7}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) x^2 B) x^3 C) x^4 D) $-x^3$ E) $-x^4$

54. $x, y, k \in \mathbb{R}$ ve $k \neq -\frac{3}{2}$ olmak üzere
$x = 5^{\frac{3}{2k+3}}$ ve $y = 25^{\frac{k}{2k+3}}$ tir.
Buna göre y nin x cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{5}{x}$ B) $\frac{25}{x}$ C) $\frac{5}{x^2}$ D) 1 E) 5

55. $\dfrac{3^4 \cdot 2^5 + 2^4 \cdot 3^5}{45}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) 108 B) 120 C) 144 D) 180 E) 216

56. $\left.\begin{array}{l} 2^x = a \\ 3^x = b \\ 5^x = c \end{array}\right\}$ olarak veriliyor.
Buna göre $(0,72)^x$ sayısının a, b, c cinsinden yazılışı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $a \cdot b^2 \cdot c^2$
B) $a \cdot b^2 \cdot c^{-2}$
C) $a \cdot b \cdot c^2$
D) $a^2 \cdot b^2 \cdot c$
E) $a^2 \cdot b \cdot c^{-2}$

57. $\dfrac{4^{11} + 4^{11} + 4^{11} + 4^{11}}{2^{15} + 2^{15}} = 16^{x-5}$ denklemini sağlayan x değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9



58. $4^{x-6} - 2^{x-1} > 0$ eşitsizliğini sağlayan **en küçük** x tam sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 12 B) 11 C) 10 D) 9 E) 8

59. $\left(\frac{3}{5}\right)^{4x-12} < \left(\frac{27}{125}\right)^{-2x+6}$ eşitsizliğinin gerçek sayılardaki çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty,3)$ B) $(-\infty,3]$ C) $(3,\infty)$ D) $[3,\infty)$ E) $(4,\infty)$

60. A bir gerçek sayı olmak üzere

$A = \sqrt{2x-12} + \sqrt[3]{x+2} - \sqrt[4]{6-x}$ olarak verilmiştir. A sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) −2 B) 0 C) 2 D) 4 E) 6

61. $x = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ ve $y = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ olmak üzere $\frac{x \cdot y}{x+y}$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ B) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ C) $\sqrt{6}$ D) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$ E) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$

62. $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{x}}$ olduğuna göre x gerçek sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 3^{14} B) 3^{12} C) 3^{10} D) 3^{7} E) 3^{3}

63. $\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-2\sqrt{2}$ B) $-\sqrt{3}$ C) $\sqrt{6}$ D) $2\sqrt{6}$ E) $\sqrt{3}-1$

64. $\frac{6}{3+\sqrt{3}} + \frac{6}{3-\sqrt{3}}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) 3 B) 6 C) $\sqrt{3}$ D) $3\sqrt{3}$ E) $\sqrt{3}+3$

65. $\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} : \frac{1}{\sqrt{2}}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{2}-1$ C) $\sqrt{2}+1$ D) $2\sqrt{2}-1$ E) $2\sqrt{2}-2$

66. $\left(\sqrt{7+\sqrt{24}} + \sqrt{7-\sqrt{24}}\right)^2$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) 6 B) $4\sqrt{6}$ C) 12 D) 24 E) 36

67. $\sqrt[3]{3\sqrt{24}}$ sayısı $\sqrt{3}$ sayısının kaç katıdır?

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt[3]{4}$ D) $\sqrt[3]{9}$ E) $\sqrt[3]{12}$

68. $A = \frac{\sqrt{7}-3}{\sqrt{13}-5}$ ve $B = \frac{\sqrt{13}+5}{\sqrt{7}+3}$ sayıları veriliyor.

Buna göre B nin A cinsinden yazılışı aşağıdakilerden hangisinde doğru olarak verilmiştir?

A) B = A B) B = -A C) B = 3A D) B = 3A E) B = 6A

69. $\sqrt[3]{\frac{9^{x+2}}{27^{x-1}}} = 81$ eşitliğini sağlayan x gerçek sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) −5 B) 0 C) 5 D) 10 E) 15

70. $\sqrt[6]{25^x} = \sqrt[4]{125^y}$ olarak verildiğine göre $\frac{x}{y}$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{4}{9}$ B) $\frac{9}{4}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{9}$ E) 1

71. $\sqrt[3]{\frac{21 \cdot 2^{12} - 5 \cdot 2^{12}}{2^6 + 2^6}}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) 16



72. $\sqrt{(\sqrt{5}-1)\cdot(\sqrt{5}+1)}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) 4 D) $2\sqrt{5}$ E) 2

73. $\left.\begin{array}{l} 2\sqrt{x}+5\sqrt{y}=16 \\ 3\sqrt{x}-\sqrt{y}=7 \end{array}\right\}$ denklem sistemini sağlayan x ve y gerçek sayılarının toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 4 B) 5 C) 13 D) 17 E) 19

74. $a\cdot x-(a+2)\cdot y=\sqrt{500}$ denkleminin çözüm kümesi $ÇK=\{(\sqrt{5},2\sqrt{5})\}$ olduğuna göre a gerçek sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) −14 B) −12 C) 0 D) 12 E) 14

75. a ve b sıfırdan farklı gerçek sayılar olmak üzere $3a=4b$ ise $\frac{a+b}{2a-b}$ oranı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{5}{8}$ D) $\frac{7}{5}$ E) $\frac{9}{4}$

76. $\frac{x}{2}=\frac{y}{5}$ ve $3y-4x=21$ ise $x\cdot y$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 30 B) 45 C) 60 D) 75 E) 90

77. a,b ve c sıfırdan farklı gerçek sayılar olmak üzere,

$2a=3b=5c$ ise $\frac{a+b}{b+c}$ oranı kaçtır?

A) $\frac{12}{13}$ B) $\frac{16}{23}$ C) $\frac{25}{16}$ D) $\frac{5}{8}$ E) $\frac{8}{15}$

78. $\frac{x}{y}=\frac{z}{t}=\frac{k}{m}=\frac{2}{3}$,

$2x-z+3k=18$ ve $2y+3m=20$ ise t sayısı kaçtır?

A) −7 B) −3 C) 10 D) 17 E) 27

79. $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{1}{4}$ ise $\frac{d}{a}$ oranının değeri aşağıdaki lerden hangisidir?

A) $\frac{1}{4}$ B) 4 C) $\frac{1}{16}$ D) $\frac{1}{64}$ E) 64

80. Mehmet Bey, bahçesinden topladığı 40 kg cevizi, yaşları 4, 7 ve 9 olan üç çocuğuna yaşları ile doğru orantılı olacak şekilde paylaştırıyor. Buna göre **en büyük** çocuk kaç ceviz almıştır?

A) 10 B) 14 C) 18 D) 22 E) 24

81. Bir kurbandan $\frac{2}{5}$ oranında kemikli et, $\frac{1}{3}$ oranında ise kemiksiz et çıkmıştır. Bu kurbandan 20 kg kemiksiz et çıktığına göre kaç kg kemikli et çıkar?

A) 30 B) 24 C) 20 D) 18 E) 15



82. Hakan, bilgisayarına bir dosya yükleme işlemi yaparken bilgisayar ekranında 750 MB olan bir dosyanın sabit hızla 630 MB nın yüklendiğini ve kalan yükleme için 4 dakika süre kaldığını görmüştür. Buna göre Hakan dosya yüklemeye kaç dakika önce başlamıştır?

A) 21 B) 25 C) 30 D) 36 E) 40

83. Bir üçgenin iç açılarının ölçüleri 2 , 3 ve 6 ile ters orantılıdır.Buna göre bu üçgenin **en küçük** iç açısının ölçüsü kaç derecedir?

A) 15 B) 30 C) 45 D) 60 E) 75

84. 6, 4 ve 3 sayıları ile doğru orantılı olan sayılarla ters orantılı olan sayılar aşağıdakilerden hangisinde doğru sırayla verilmiştir?

A) 1, 2, 3 B) 2, 3, 6 C) 3, 2, 1 D) 1, 3, 6 E) 2, 3, 4

85. a, b, c, d ve k sıfırdan farklı gerçek sayılar ve k orantı sabiti olmak üzere

- a.b=k
- $\frac{b}{c} = k$
- $c = \frac{k}{d}$

ifadeleri için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) a ile b doğru orantılıdır.
B) a ile c doğru orantılıdır.
C) b ile c ters orantılıdır.
D) b ile d doğru orantılıdır.
E) a ile d doğru orantılıdır.

86. a, b, c ve k sıfırdan farklı gerçek sayılar ve k orantı sabiti olmak üzere

$\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{a+c}{b} = k$ eşitliğinde k orantı sabiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

87. a ve b pozitif sayıları sırasıyla 3 ile doğru, 4 ile ters orantılıdır.

$a \cdot b = 48$ olduğuna göre, a + b toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 14 B) 16 C) 19 D) 26 E) 49

88. Bir kümesteki tavuk sayısının kaz sayısına oranı $\frac{7}{2}$ ise kümesteki tavuk ve kaz sayıları toplamı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 66 B) 75 C) 120 D) 133 E) 144

89. Müslüm'ün 4 yıl önceki yaşının 6 yıl sonraki yaşına oranı $\frac{1}{3}$ olduğuna göre Müslüm'ün 2 yıl sonraki yaşı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 4 B) 6 C) 8 D) 11 E) 12

90. Bir sayıyı 12 den çıkardığınızda elde ettiğiniz sayının 2 katını 36 dan çıkarırsanız sonuç 18 olur. Buna göre bu sayı kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 8



91. Bir sepetteki elmaların $\frac{1}{3}$ i yendikten sonra 8 kg daha elma yeniyor. Geriye ilk durumdaki elmaların yarısı kaldığına göre başlangıçta sepette kaç kilogram elma vardır?

A) 8 B) 24 C) 36 D) 48 E) 60

92. Bir kuru yemişçideki fıstık ve fındıkların toplam ağırlığı 80 kg dır. Fıstığın kilogramı ₺12, fındığın kilogramı ₺48 olup bu kuru yemişlerin toplam değeri ₺1860 olduğuna göre kuru yemişçide kaç kilogram fındık vardır?

A) 15 B) 20 C) 25 D) 30 E) 40

93. Düzenli antreman yaparak azim ve sabırla spor müsabakalarına hazırlanan Ferdi, ilk gün bir miktar yol koştuktan sonra her gün bir önceki günden 3 km fazla koşmuştur. Bir haftada toplam 77 km koştuğuna göre ilk gün kaç kilometre yol koşmuştur?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

94. Bir çubuk 8 eşit parçaya ayrılıyor. Eğer bu çubuk 10 eşit parçaya ayrılsaydı parçalardan her biri 3 cm daha kısa olacaktı. Buna göre çubuğun parçalara ayrılmadan önceki boyu kaç santimetredir?

A) 80 B) 90 C) 100 D) 120 E) 160

95. Aysun ve Beril'in paraları ile ilgili aşağıdakiler bilinmektedir

- Aysun, Beril'e ₺40 verirse paraları eşit olmaktadır.
- Beril, Aysun'a ₺20 verirse Aysun'un parası Beril'in parasının 5 katı olmaktadır.

Buna göre Aysun'un başlangıçtaki parası kaç Türk lirasıdır?

A) 40 B) 50 C) 80 D) 100 E) 130

96. 3 litrelik ve 5 litrelik iki kovası bulunan Recep, 140 litrelik bir havuzu bu kovalarla dolduracaktır. Her kovayı tamamen doldurarak ve her kovayı en az bir kez kullanarak bu havuzu **en az** kaç kova suyla doldurabilir?

A) 30 B) 32 C) 38 D) 41 E) 46

97. Bir sınıftaki öğrenciler bahçede üçerli sıra oluyor. Bu öğrenciler ikişerli sıra olsalardı sıra sayısı 5 artacaktı. Buna göre bu sınıfta kaç öğrenci vardır?

A) 18 B) 20 C) 24 D) 30 E) 36

98. Gamze bir bilet kuyruğunda baştan $(n + 1)$. kişi, sondan ise $(2n - 3)$. kişidir. Kuyrukta toplam 66 kişi olduğuna göre Gamze'nin önünde kaç kişi vardır?

A) 18 B) 22 C) 23 D) 24 E) 35

99. Bir telin bir ucundan bir miktar kesiliyor. Kesilen kısmın yarısı telin diğer ucuna ekleniyor. Telin orta noktası ilk duruma göre 15 cm kaydığına göre telin ucundan kaç santimetre kesilmiştir?

A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

100. Ömer ile Fatih'in bugünkü yaşları toplamı 46 dır. Ömer'in 4 yıl önceki yaşı Fatih'in 2 yıl sonraki yaşına eşit olacağına göre Ömer'in bugünkü yaşı kaçtır?

A) 20 B) 26 C) 28 D) 30 E) 32

101. AB iki basamaklı bir doğal sayı olmak üzere AB yaşındaki Osman, $A + B$ yıl önce $2A + 2B$ yaşındaydı. Buna göre Osman'ın şimdiki yaşı kaçtır?

A) 18 B) 21 C) 27 D) 39 E) 48



102. Nazif'in bugünkü yaşı 39 dur. Nazif, Taner'in yaşındayken Nazif'in yaşı Taner'in o günkü yaşının 2 katıydı. Buna göre Taner'in bugünkü yaşı kaçtır?

A) 34 B) 30 C) 28 D) 26 E) 21

103. Bir manav bir kasa limonun kilogramını ₺2 ndan satarsa ₺28 zarar, ₺3 den satarsa ₺20 kâr etmektedir. Buna göre bir kasa limon kaç kilogramdır?

A) 28 B) 32 C) 38 D) 48 E) 58

104. Selim'in çalışma odasındaki kitapların % 40 ı romandır. Romanların da %60 ı bilim kurgu romanıdır. Kitaplığında bilim kurgu türünde olmayan 152 kitabı olduğuna göre Selim'in kaç tane bilim kurgu romanı vardır?

A) 40 B) 48 C) 60 D) 96 E) 100

105. Bir ürünün satış fiyatından %30 indirim yapıldığında maliyet fiyatına göre %5 kâr elde edilmektedir. Buna göre bu ürünün satış fiyatı yüzde kaç kârla belirlenmiştir?

A) 60 B) 50 C) 40 D) 35 E) 30

106. k>0 olmak üzere ₺ $\frac{2k}{3}$ na alınan bir mal, ₺ $\frac{5k}{6}$ na satılırsa yüzde kaç kâr elde edilir?

A) 50 B) 45 C) 40 D) 30 E) 25

107.

Malzeme	Miktar (gram)	Karışım Yüzdesi
Un	x	65
Şeker	240	15
Yağ	y	z

Yukarıdaki tabloda bir karışımdaki malzeme miktarları ve karışım yüzdeleri verilmiştir.

Buna göre x − y değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1360 B) 1260 C) 1040 D) 720 E) 640

108. Aralarında 640 km mesafe bulunan iki şehirden hızları 70 km/sa. ve 90 km/sa. olan iki araç birbirlerine doğru aynı anda harekete başlamıştır. Bu araçlar kaç saat sonra karşılaşır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

109. Bir firmaya ait otobüs iki farklı şehir arasındaki yolu 60 km/sa. hızla gidip 90km/sa. hızla dönerek seferini tamamlamaktadır. Bu otobüsün yol boyunca ortalama hızı saatte kaç kilometre olur?

A) 84 B) 80 C) 75 D) 72 E) 64

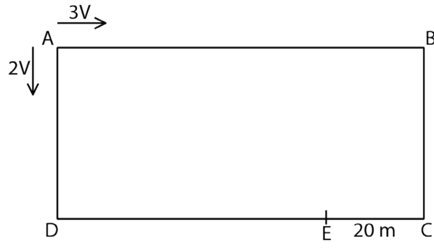
110. A —— 120 km —— C - - - 240 km - - - B

Yukarıdaki şekilde AC yolu asfalt, CB yolu topraktır. Asfaltta 60 km/sa., toprakta 40 km/sa. hızla hareket eden aynı türde iki kamyon aynı anda A ve B noktalarından birbirlerine doğru hareket ediyor. Bu kamyonlar kaç saat sonra karşılaşır?

A) 3 B) 3,6 C) 4 D) 4,5 E) 5



111.



Yukarıda verilen dikdörtgen şeklindeki pistin A noktasından hızları 3V ve 2V olan iki bisikletli aynı anda oklar yönünde hareket ederek E noktasında karşılaşıyorlar. $|EC| = 20\,m$ olduğuna göre pistin çevresi kaç metredir?

A) 120 B) 160 C) 180 D) 200 E) 240

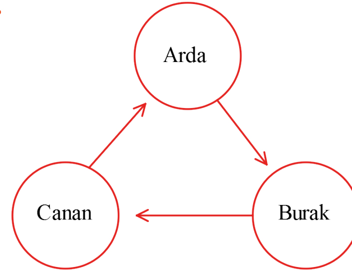
112.

Enerji Sınıfı	A+	A++
Tüketim Miktarı	0,15 kW/h	0,12 kW/h

Yukarıdaki tabloda A+ ve A++ enerji sınıfındaki iki tür buzdolabının saatlik enerji tüketim miktarları gösterilmiştir. Ahmet Bey A++ enerji sınıfında yeni bir buzdolabı satın almıştır. 1 kW elektirik tüketim bedelinin 30 kuruş olduğu bir fatura döneminde A+ enerji sınıfındaki eski buzdolabı yerine 30 gün boyunca yeni buzdolabını sürekli çalıştırmıştır. Bu durumda Ahmet Bey kaç Türk lirası tasarruf etmiştir?

A) 4,25 B) 5,08 C) 6,48
D) 8 E) 8,2

113.



Arda, Burak ve Canan şekildeki gibi sıralanarak "bom" oyunu oynayacaklardır. Oyunun kuralları aşağıdaki gibidir.

I) Oyuna Arda başlayacak ve şekildeki oklar yönünde ilerleyeceklerdir.

II) Arda 1 sayısını, Burak 2 sayısını, Canan 3 sayısını, Arda 4 sayısını söyledikten sonra Burak bom diyecek ve sonra Canan 6 sayısını söyleyecektir.

III) Bu şekilde devam ederek 5 in tam katlarında bom kelimesi söylenecektir. Şaşıran kişi oyunu kaybedecek ve oyun sonlanacaktır.

Bu bilgilere göre,

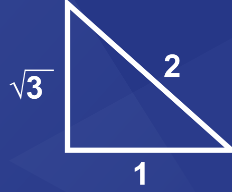
a) 100 sayısının yerine Arda'nın bom dediği ana kadar Burak'ın kaç kez bom dediğini bulunuz.

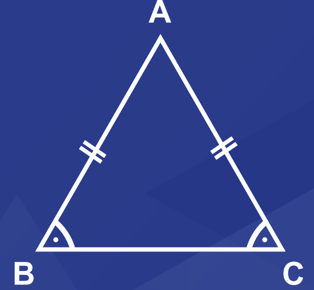
b) 99 sayısına gelinceye kadar Burak ile Canan'ın toplam kaç kez bom dediğini bulunuz.

c) 149 sayısına gelinceye kadar kaç kez bom denildiğini bulunuz.

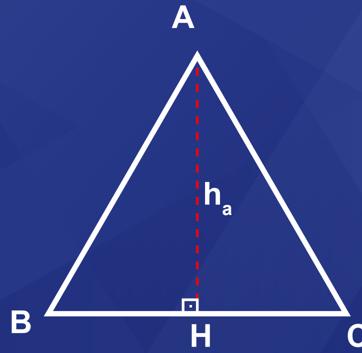












$$A(\widehat{ABC})=\frac{a.h_a}{2}=\frac{b.h_b}{2}=\frac{c.h_c}{2}$$

ÜÇGENLER



Terimler ve Kavramlar

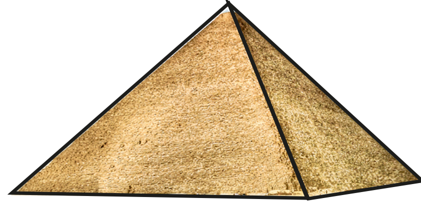
- Üçgen
- Açı
- Kenar
- İç Açı
- Dış Açı
- Üçgen Eşitsizliği
- Eşkenar Üçgen
- İkizkenar Üçgen
- Dik Üçgen



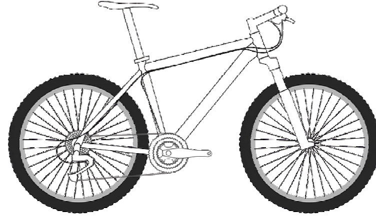
Sembol ve Gösterimler

$\widehat{ABC}$, $\widehat{ABC}$, $m(\widehat{ABC})$, $[AB]$, $|AB|$

9.4. ÜÇGENLER



Üçgenler, mimarlık ve mühendislik için en önemli geometrik şekillerden birisidir. Bunun nedeni üçgenlerin dikdörtgen ve karelere oranla daha dayanıklı olması ve şekilleri nedeniyle kolay deforme olmamasıdır. Mısır ve dünyanın birçok bölgesinde yapılan piramitlerin günümüze kadar dayanması bu sayededir. Üçgenler sadece mimarlık ve mühendislikte değil spor dallarında da sık karşılaşılan şekillerdir.



Bisikletlerde bir kadro geometrisi vardır ve ilk bakışta iki üçgenin birleşmesinden oluştuğu görülmektedir. Bunun sebebi bisiklet süren kişinin ağırlığı, ayakta pedal çevirip çevirmemesi, bir virajda yatıp yatmaması, zeminin düz olup olmaması durumlarında üzerine yüklenen tüm kuvvetlere en dayanıklı şeklin üçgen olmasıdır.



Bowling oyununda bir top atılarak labutlar devrilmeye çalışılır. Devrilmesi gereken labutların dizilimi üçgen biçimindedir.

Bu örnekler artırılabilir. Üçgen levhalar trafik kuralları ve yollar hakkında bilgi verir. Tehlikeli viraj, yol çalışması, sollama işaretleri buna dâhildir. Tehlikeli durumlar üçgen levhalarla gösterilmektedir.

9.4.1. Üçgenlerde Temel Kavramlar

Neler Öğreneceksiniz?

- Üçgende açı özellikleri ile ilgili işlemler yapabilmeyi,
- Üçgenin kenar uzunlukları ile bu kenarların karşılarındaki açıların ölçülerini ilişkilendirmeyi,
- Uzunlukları verilen üç doğru parçasının hangi durumlarda üçgen oluşturduğunu değerlendirmeyi öğreneceksiniz.

9.4.1.1. Üçgenlerde Açı Özellikleri ile İlgili İşlemler Yapma

Kültür ve medeniyetimizde geometrinin tarihsel gelişim sürecine katkı sağlamış pek çok bilim insanı vardır.

Harezmî tarafından 830 yılında yazılan "El' Kitab'ül Muhtasar fi Hisab 'il Cebri ve'l Mukabele" adlı eserde analitik geometriye ait bilgiler yer almaktadır. Sadece Harezmî değil Ömer Hayyam'ın da "Cebir" adlı eserinde analitik geometriye ait bilgilerin varlığı görülür. Avrupa'da ise yüzyıllar sonra 1637 yılında Fransız matematikçi Descartes (Dekart), "La Geometri" adlı kitabı ile analitik geometriye ait bilgileri vermiştir.



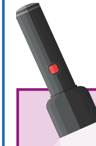
Trigonometrinin Avrupa'da duyulup yayılmasında etkili olan isimlerin başında Sabit bin Kurra vardır. "Konikler" kitabı ile Apolonyos'a şerh yazmış. Huneyn bin İshak tarafından Öklid'in "Elementler" adlı eserine yazılan şerhi, ilaveler yaparak düzeltmiştir. Menelaus, Apolonyos, Pisagor, Archimed (Arşimet), Öklid ve Theadosus'un (Teodos) eserlerini Arapçaya şerh etmekle geometriye zaman içinde orijinal olan yeni bilgiler kazandırmıştır.

Ebu'l Vefa ise trigonometri çalışmaları dışında, düzgün çok yüzlüler konusuyla da uğraşmıştır. 7 ve 9 kenarlı düzgün çokgenlerin yaklaşık çizimlerine dair yeni bir geometrik yöntem ortaya koymuştur. Çizim geometrisine ait çalışmalarına örnek olarak aşağıdakiler verilebilir:

- Pergelle dairenin içine pergelin açıklığını bozmadan kare çizmek.
- Verilen bir doğru parçasını, pergel yardımıyla eşit parçalara bölmek.
- Verilen bir kare içine eşkenar bir üçgen çizmek.

Geometri öğretiminde ve öğrenimindeki aksaklıkları ve bazı kelimelerden kaynaklı anlam zorluklarını gören Atatürk, 1936-1937 kış aylarında yol gösterici olarak 44 sayfalık bir geometri kitabı yazmıştır. Kitap 1937 yılında Milli Eğitim Bakanlığı tarafından yazar adı konmadan yayımlanmış, 1971 yılında da ikinci baskısı Türk Dil Kurumu tarafından çıkarılmıştır. Kitapta kullanılan ve günümüzde kullanılmaya devam edilen pek çok terim, Atatürk tarafından türetilmiştir. Aşağıdaki tabloda bazı eski terimlere karşılık olarak kullanılan yeni terimler verilmiştir.

Eski	**Yeni**
Zaviye	Açı
Dılı	Kenar
Zaviye-i Hadde	Dar Açı
Hattı Munassıf	Açıortay
Mustatil	Dikdörtgen
Musavi	Eşit
Hat	Çizgi
Re's	Köşe
Murabba	Kare



Platon'un Atina'da kurduğu akademi okulunun kapısında "Geometri bilmeyen giremez." yazdığını biliyor muydunuz?

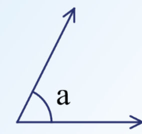


Açı: Başlangıç noktaları ortak olan iki ışının birleşim kümesine **açı** denir.



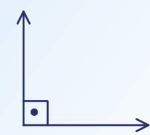
Dar Açı: Ölçüsü 0° ile 90° arasında olan açıya denir.

Şekilde $0^\circ < a < 90^\circ$ olur.





Dik Açı: Ölçüsü 90° olan açıya denir.



ÖRNEK 1

$2x - 20^\circ$ lik açı, dar açı ise x in alabileceği **en küçük** ve **en büyük** tam sayı değerleri toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

Dar açının ölçüsü 0° ile 90° arasında olduğundan

$0^\circ < 2x - 20^\circ < 90^\circ \Rightarrow 20^\circ < 2x < 110^\circ \Rightarrow 10^\circ < x < 55^\circ$ bulunur.

Bu durumda x in en küçük değeri 11°, en büyük değeri 54° olmak üzere istenen toplam $11^\circ + 54^\circ = 65^\circ$ olur.

ÖRNEK 2

$5x + 15^\circ$ açısı 2 tane 90° lik açıya eşit ise x değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$5x + 15^\circ = 2 \cdot 90^\circ \Rightarrow 5x + 15^\circ = 180^\circ \Rightarrow 5x = 165^\circ$

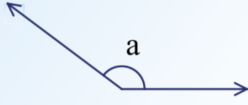
$\Rightarrow \quad x = 33^\circ$ olur.



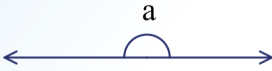


Geniş Açı: Ölçüsü 90° ile 180° arasında olan açıya geniş açı denir.

Şekilde $90^\circ < a < 180^\circ$ olur.



Doğru Açı: Ölçüsü 180° olan açıya doğru açı denir.



Tam Açı: Ölçüsü 360° olan açıya tam açı denir.





Komşu Açılar: Birer ışını ortak olan açılara denir.

Tümler Açılar: Ölçüleri toplamı 90° olan iki açıya denir.

Komşu Tümler Açı: Birer ışını ortak ve ölçüleri toplamı 90° olan açılara denir.

Bütünler Açılar: Ölçüleri toplamı 180° olan iki açıya denir.

Komşu Bütünler Açı: Birer ışını ortak ve ölçüleri toplamı 180° olan iki açıya denir.

ÖRNEK 3

Bir dar açı ile bir geniş açının ölçüleri toplamı aşağıdakilerden hangisi **olamaz?**

A) 91° B) 179° C) 181° D) 269° E) 271°

ÇÖZÜM

Dar açıya α, geniş açıya β denirse

$$\begin{array}{r} 0^\circ < \alpha < 90^\circ \\ +\ 90^\circ < \beta < 180^\circ \\ \hline 90^\circ < \alpha + \beta < 270^\circ \text{ olur.} \end{array}$$

Seçeneklerde bu aralıkta olmayan sayı 271° olduğundan cevap E seçeneğidir.

ÖRNEK 4

72° lik açıya a° lik açı eklenince doğru açı, b° lik açı eklenince tam açı olmaktadır.

$b^\circ - a^\circ$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

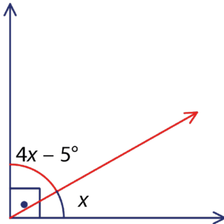
$72^\circ + a^\circ = 180^\circ$ ise $a^\circ = 108^\circ$ ve $72^\circ + b^\circ = 360^\circ$ ise $b^\circ = 288^\circ$ olur.

Bu durumda $b^\circ - a^\circ = 288^\circ - 108^\circ = 180^\circ$ olur.

ÖRNEK 5

Komşu tümler iki açıdan biri diğerinin 4 katından 5° küçüktür. Küçük olan açıyı bulunuz.

ÇÖZÜM



Açılar şekildeki gibi yerleştirilirse

$4x - 5^\circ + x = 90^\circ \Rightarrow 5x = 95^\circ$

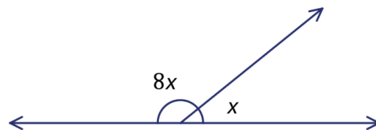
$\Rightarrow x = 19^\circ$ olur.

Bu durumda küçük açı, $x = 19^\circ$ olur.

ÖRNEK 6

Komşu bütünler iki açıdan birinin ölçüsü diğerinin $\frac{1}{8}$ dir. Bu iki açıdan küçük olan açının ölçüsünü bulunuz.

ÇÖZÜM



Açılar şekildeki gibi yerleştirilsin. Bütünler açıların ölçüleri toplamı 180° olduğundan (doğru açı oluşturduklarından)

$x + 8x = 180^\circ \Rightarrow 9x = 180^\circ \Rightarrow x = 20^\circ$ olur.

Bu durumda küçük açı, $x = 20^\circ$ olarak bulunmuş olur.



ÖRNEK 7

Herhangi bir açının bütünlerinin ölçüsü tümlerinin ölçüsünden kaç derece fazla olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Açıya x denirse bütünleri $180^\circ - x$ ve tümleri $90^\circ - x$ olur.

$$\text{Bütünler} - \text{Tümler} = 180^\circ - x - (90^\circ - x)$$

$$= 180^\circ - x - 90^\circ + x$$

$$= 90^\circ \text{ olur.}$$

ÖRNEK 8

Komşu bütünler iki açıdan küçük olan açının komşu tümleri, 20° olduğuna göre büyük açının ölçüsünün kaç derece olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Küçük açının ölçüsüne x denirse bu açının bütünler açısının ölçüsü $(180^\circ - x)$, komşu tümler açısının ölçüsü $(90^\circ - x)$ olur. Buradan $90^\circ - x = 20^\circ$ ve $x = 70^\circ$ olur. Dolayısıyla büyük açının ölçüsü $180^\circ - x = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$ olur.

ÖRNEK 9

$24^\circ < m(\widehat{A}) < 52^\circ$ ise A açısının bütünlerinin alabileceği **en büyük** tam sayı değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

A açısının bütünleri $180^\circ - m(\widehat{A})$ olur. Buradan

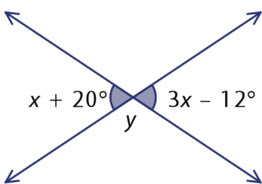
$$24^\circ < m(\widehat{A}) < 52^\circ \Rightarrow -24^\circ > -m(\widehat{A}) > -52^\circ$$

$$\Rightarrow 180^\circ - 24^\circ > 180^\circ - m(\widehat{A}) > 180^\circ - 52^\circ$$

$$\Rightarrow 156^\circ > 180^\circ - m(\widehat{A}) > 128^\circ \text{ olur.}$$

Bu durumda A açısının bütünlerinin alabileceği en büyük tam sayı değeri 155° tir.

ÖRNEK 10



Şekilde verilenlere göre y açısının ölçüsünün kaç derece olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$x + 20^\circ$ ile $3x - 12^\circ$ ters açılar olduğundan bu açıların ölçüleri eşittir. Bu durumda

$$x + 20^\circ = 3x - 12^\circ \Rightarrow 32^\circ = 2x \Rightarrow x = 16^\circ \text{ olur.}$$

y açısı hem $x + 20^\circ$ ile hem de $3x - 12^\circ$ ile doğru açı oluşturur. Doğru açının ölçüsü 180° olduğundan

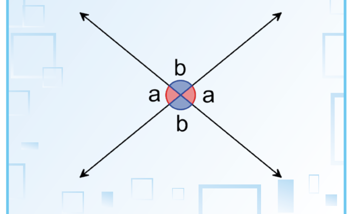
$$y + x + 20^\circ = 180^\circ \Rightarrow y + 16^\circ + 20^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow y + 36^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow y = 144^\circ \text{ olur.}$$



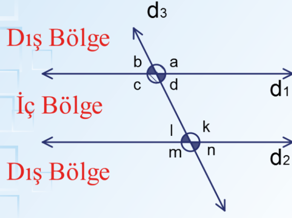
Ters Açılar: Birbirini kesen iki doğrunun oluşturduğu açılardan komşu olmayan açılara denir. Ters açıların ölçüleri birbirine eşittir.







Paralel İki Doğrunun Bir Kesen ile Yaptığı Açılar



Şekilde $d_1 \parallel d_2$ olmak üzere d_3 bu doğruları kesen bir doğrudur.

Ters Açılar

a = c, b=d, k = m, n = l

İç Ters Açılar

c = k, d = l

Dış Ters Açılar

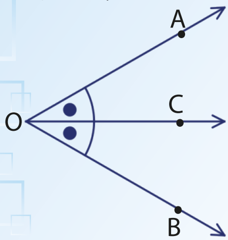
m = a, n = b

Yöndeş Açılar

a = k, b = l, c = m, d = n

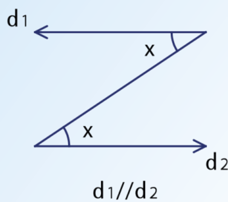


Açıortay

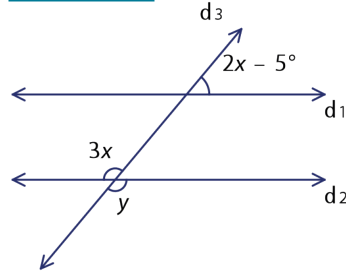


$m(\widehat{COA}) = m(\widehat{BOC})$ olduğundan $[OC$, $\widehat{BOA}$ nın açıortayıdır.



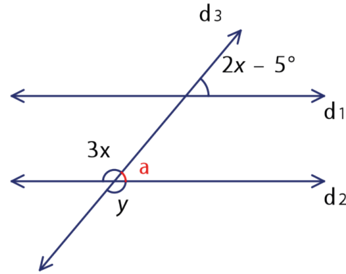


ÖRNEK 11



$d_1 \parallel d_2$ ise şekilde verilenlere göre y açısının ölçüsünü bulunuz.

ÇÖZÜM



y ile 3x ters açılar, y = 3x ve şekildeki gibi yerleştirilen a ile 2x — 5° yöndeş açılar olduğundan a = 2x — 5° olur.

Doğru açı tanımından

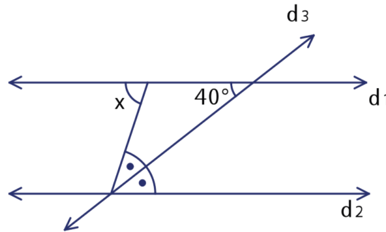
$a + y = 180^\circ \Rightarrow 2x - 5^\circ + 3x = 180^\circ$

$\Rightarrow 5x = 185^\circ$

$\Rightarrow x = 37^\circ$ olur.

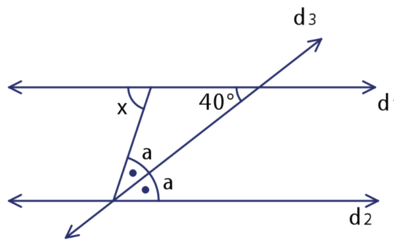
Bu durumda $y = 3x = 3 \cdot 37^\circ = 111^\circ$ olur.

ÖRNEK 12



Yandaki şekilde verilenlere göre $d_1 \parallel d_2$ ise x açısını bulunuz.

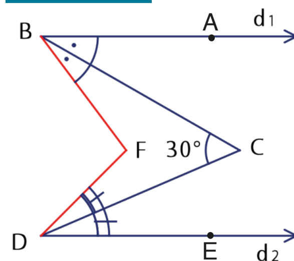
ÇÖZÜM



İç ters açılardan a = 40° ve x = 2a olur.

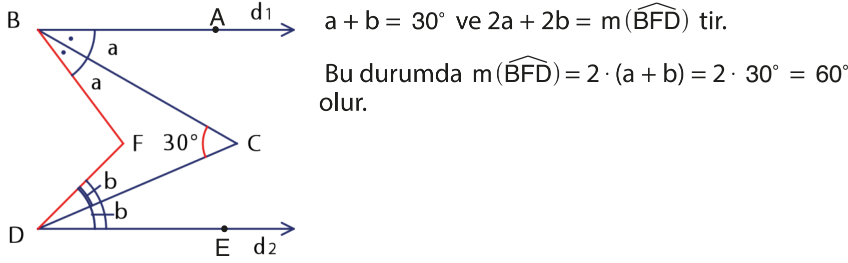
Bu durumda $x = 2 \cdot a = 2 \cdot 40^\circ = 80^\circ$ olur.

ÖRNEK 13



Yandaki şekilde $d_1 \parallel d_2$ dir. [BC], ABF açısının açıortayı ve [DC], FDE açısının açıortayıdır. $m(\widehat{BCD}) = 30^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{BFD})$ nü bulunuz.

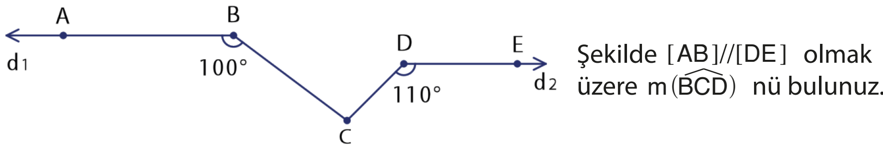
ÇÖZÜM



$a + b = 30^\circ$ ve $2a + 2b = m(\widehat{BFD})$ tir.

Bu durumda $m(\widehat{BFD}) = 2 \cdot (a + b) = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$ olur.

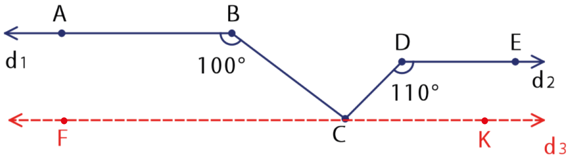
ÖRNEK 14



Şekilde [AB]//[DE] olmak üzere $m(\widehat{BCD})$ nü bulunuz.

ÇÖZÜM

d_1 ve d_2 doğrularına paralel olacak şekilde d_3 doğrusu çizilir.



$100^\circ + m(\widehat{FCB}) = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{FCB}) = 80^\circ$ olur.

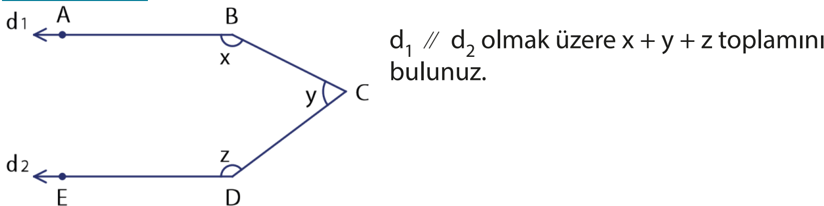
$110^\circ + m(\widehat{KCD}) = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{KCD}) = 70^\circ$ olur.

$m(\widehat{FCB}) + m(\widehat{BCD}) + m(\widehat{KCD}) = 180^\circ$

$80^\circ + m(\widehat{BCD}) + 70^\circ = 180^\circ$

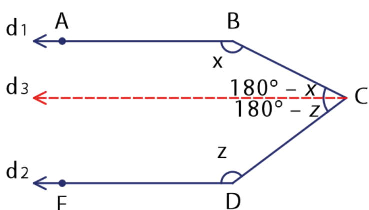
$m(\widehat{BCD}) = 30^\circ$ olur.

ÖRNEK 15



$d_1 \parallel d_2$ olmak üzere $x + y + z$ toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM



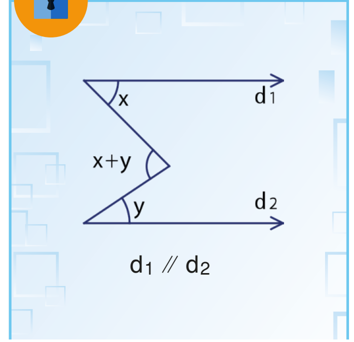
d_1 ve d_2 doğrularına paralel olacak şekilde d_3 doğrusu çizilip y açısı şekildeki gibi yazılır.

Bu durumda

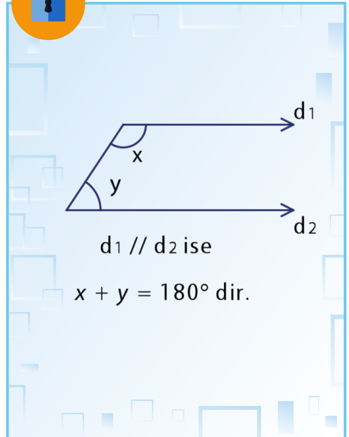
$y = 180^\circ - x + 180^\circ - z$ ise

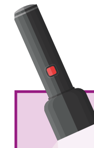
$x + y + z = 360^\circ$ olur.





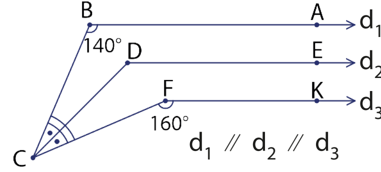






Paralel doğrulara paralel olacak şekilde çizilen yeni doğrular, soru çözümlerinde kolaylık sağlar.

ÖRNEK 16

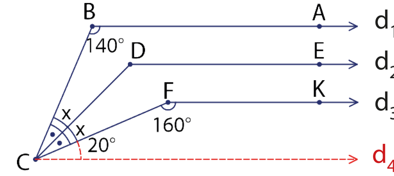


$[CD]$, $\widehat{BCF}$ nın açıortayıdır.

$m(\widehat{CBA}) = 140^\circ$ ve $m(\widehat{CFK}) = 160^\circ$ ise $m(\widehat{CDE})$ nü bulunuz.

ÇÖZÜM

d_1, d_2 ve d_3 doğrularına paralel olacak şekilde d_4 doğrusu çizilir.



$$140^\circ + x + x + 20^\circ = 180^\circ$$
$$160^\circ + 2x = 180^\circ$$
$$2x = 20^\circ$$
$$x = 10^\circ \text{ olur.}$$

Bu durumda $m(\widehat{CDE}) + x + 20^\circ = 180^\circ$

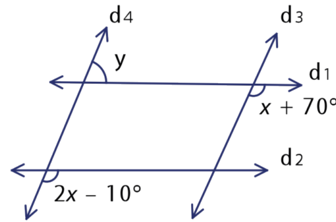
$m(\widehat{CDE}) + 10^\circ + 20^\circ = 180^\circ$

$m(\widehat{CDE}) = 150^\circ$ olur.

ALIŞTIRMALAR

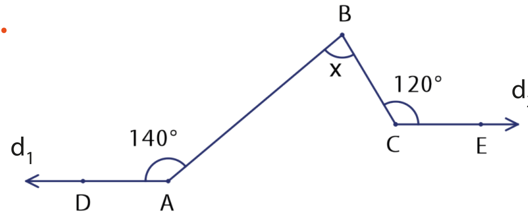
1. Komşu tümler iki açının oranı $\frac{1}{5}$ dir. Küçük açının komşu bütünlerinin ölçüsü ile büyük açının komşu bütünlerinin ölçüsü farkının kaç derece olduğunu bulunuz.

2.



Şekilde $d_1 \parallel d_2$ ve $d_3 \parallel d_4$ ise x ve y açılarının ölçülerini bulunuz.

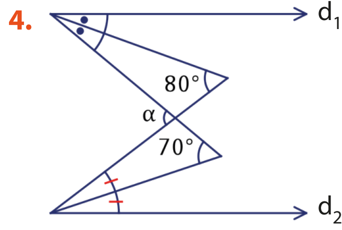
3.



Şekilde $d_1 \parallel d_2$ ise x açısının ölçüsünü bulunuz.

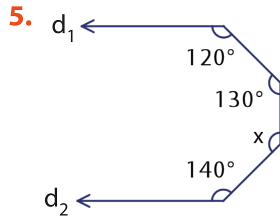


4.



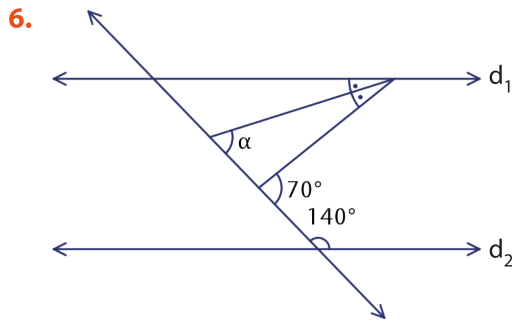
$d_1 \parallel d_2$ ise şekilde verilenlere göre α açısının ölçüsünü bulunuz.

5.



$d_1 \parallel d_2$ ise x açısının ölçüsünü bulunuz.

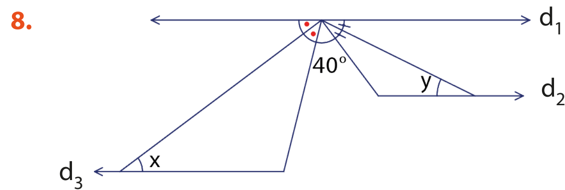
6.



$d_1 \parallel d_2$ ise şekilde verilenlere göre α açısının ölçüsünü bulunuz.

7. $15^\circ < m(\widehat{A}) < 65^\circ$ ise A açısının tümlerinin alabileceği değer aralığını bulunuz.

8.



$d_1 \parallel d_2 \parallel d_3$ ise şekilde verilenlere göre x + y toplamını bulunuz.

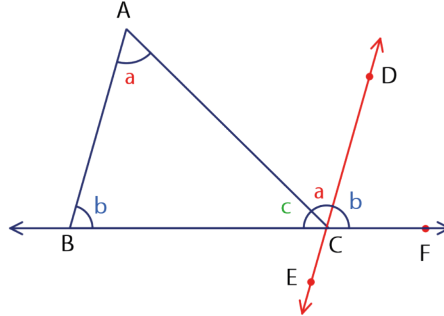


Üçgende Açı

Bir üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 180° dir.

Bu özelliğin doğruluğu aşağıdaki gibi yapılabilir.

Bir $\widehat{ABC}$ çizilerek [BC] uzatılır. Daha sonra C den [AB] na paralel olacak şekilde bir doğru çizilir ve oluşan açılar isimlendirilir.



$\widehat{DCF}$ ile $\widehat{ABC}$ yöndeş olduğundan eşittir.

$\widehat{DCA}$ ile $\widehat{CAB}$ iç ters açılar olduğundan eşittir.

$\widehat{BCF}$ doğru açı olduğundan

$a + b + c = 180^\circ$ tir.

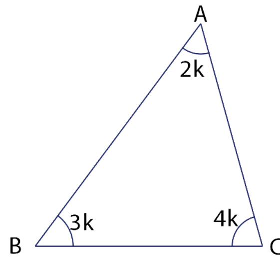
Bu durumda $\widehat{ABC}$ nin iç açılarının ölçüleri toplamı $a + b + c = 180^\circ$ olur.

ÖRNEK 17

Bir $\widehat{ABC}$ de $\frac{m(\widehat{ABC})}{3} = \frac{m(\widehat{BCA})}{4} = \frac{m(\widehat{CAB})}{2}$ ise $m(\widehat{B})$ nü bulunuz.

ÇÖZÜM

$\frac{m(\widehat{ABC})}{3} = \frac{m(\widehat{BCA})}{4} = \frac{m(\widehat{CAB})}{2} = k$ denirse $m(\widehat{ABC}) = 3k, m(\widehat{BCA}) = 4k$ ve $m(\widehat{CAB}) = 2k$ olur.



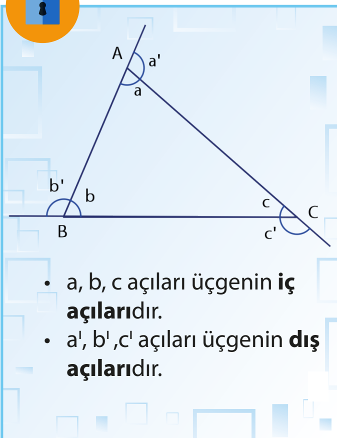
Bu durumda $3k + 4k + 2k = 180^\circ$

$9k = 180^\circ$

$k = 20^\circ$ olur.

O hâlde $m(\widehat{B}) = 3k = 3 \cdot 20^\circ = 60^\circ$ olur.

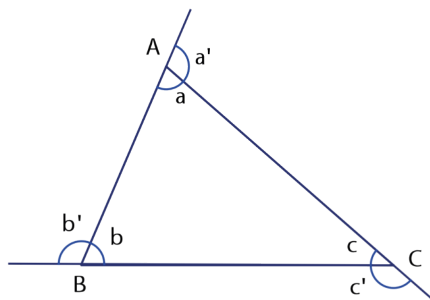




- a, b, c açıları üçgenin **iç açılarıdır**.
- a', b', c' açıları üçgenin **dış açılarıdır**.

Bir üçgenin dış açılarının ölçüleri toplamı 360° dir.

Bu özelliğin doğruluğu aşağıdaki gibi yapılabilir.



Üçgenlerin herhangi bir köşesindeki iç açı ile dış açının toplamı 180° dir. Ayrıca şekle göre $a + b + c = 180^\circ$ olur.

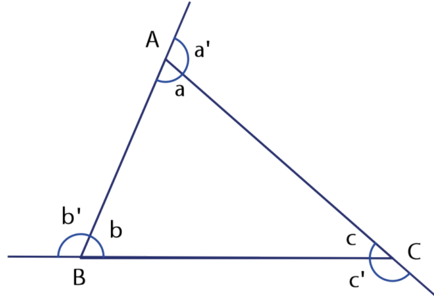
$$\begin{aligned} a + a' &= 180^\circ \\ b + b' &= 180^\circ \\ + \quad c + c' &= 180^\circ \\ \hline \underbrace{a + b + c}_{180^\circ} + a' + b' + c' &= 540^\circ \end{aligned}$$

$a' + b' + c' = 540^\circ - 180^\circ$

$a' + b' + c' = 360^\circ$ olur.



ÖRNEK 18



a' = b' ve c' = b' + 15° ise a' açısının ölçüsünü bulunuz.

ÇÖZÜM

a' + b' + c' = 360° denkleminde a' = b' ve c' = b' + 15° eşitlikleri yerine yazılır.

$b' + b' + b' + 15° = 360° \Rightarrow 3b' + 15° = 360°$

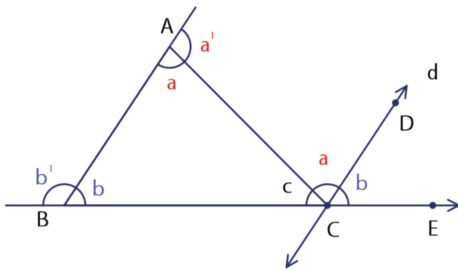
$3b' = 345°$

$b' = 115°$ olur.

a' = b' olduğundan bu durumda a' = 115° olur.

Üçgenlerde bir dış açının ölçüsü, kendisine komşu olmayan iki iç açının ölçüleri toplamına eşittir.

Bu özelliğin doğruluğu aşağıdaki gibi yapılabilir.



d // [AB] çizilir. İç ters açılardan

$m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{ACD}) = a$ olur.

Yöndeş açılardan

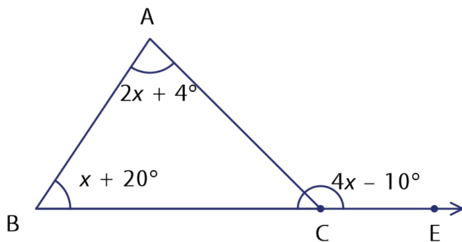
$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{DCE}) = b$ olur.

Bu durumda C köşesindeki

$m(\widehat{ACE}) = c' = a + b$ olur.

Siz de $a' = b + c$ ve $b' = a + c$ olduğunu gösteriniz.

ÖRNEK 19



Şekilde verilenlere göre x değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

ACE açısının ölçüsü c' olmak üzere

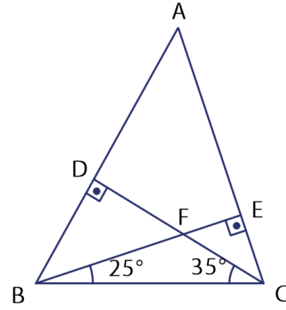
c' = a + b olduğundan $4x - 10° = 2x + 4° + x + 20°$

$4x - 10° = 3x + 24°$

$x = 34°$ olur.

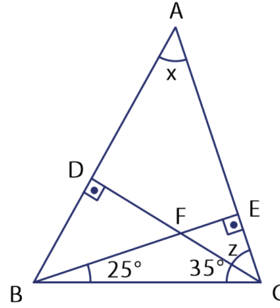


ÖRNEK 20



Yandaki şekilde $[AB] \perp [DC]$, $[AC] \perp [BE]$, $m(\widehat{EBC}) = 25^\circ$, $m(\widehat{DCB}) = 35^\circ$ ise $m(\widehat{BAC})$ nü bulunuz.

ÇÖZÜM



$\widehat{BEC}$ nde iç açıların ölçüleri toplamı 180° olduğundan

$90^\circ + 25^\circ + 35^\circ + z = 180^\circ$

$150^\circ + z = 180^\circ$

$z = 30^\circ$ olur.

$\widehat{ADC}$ nde iç açılar ölçüleri toplamı 180° olduğundan

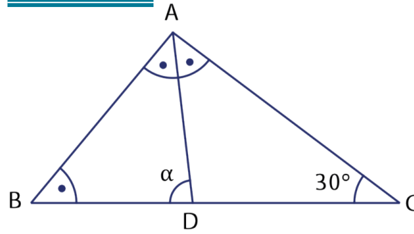
$x + 90^\circ + z = 180^\circ$

$x + 90^\circ + 30^\circ = 180^\circ$

$x = 60^\circ$ olur.

Bu durumda $m(\widehat{BAC}) = x = 60^\circ$ olur.

ÖRNEK 21



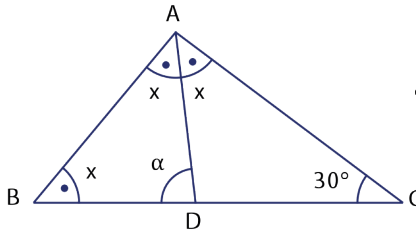
Yandaki şekilde

$m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{CAD})$

ve $m(\widehat{ACB}) = 30^\circ$ ise

$m(\widehat{ADB})$ nü bulunuz.

ÇÖZÜM



$m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{CAD}) = x$ denir ve $\widehat{ABC}$ nde iç açıların ölçüleri toplamı 180° ye eşitlenir.

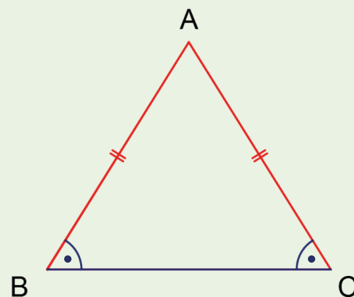
$2x + x + 30^\circ = 180^\circ$

$3x + 30^\circ = 180^\circ$

$3x = 150^\circ$

$x = 50^\circ$ olur.

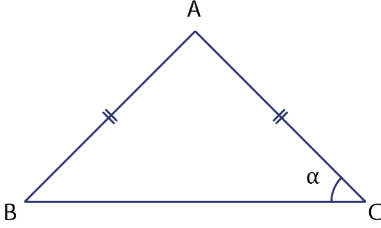
ADC üçgeninin D köşesindeki dış açısının ölçüsü, A ve C köşelerindeki iç açıların ölçüleri toplamına eşittir. Buradan $\alpha = x + 30^\circ$ ise $\alpha = 80^\circ$ olur.



$\widehat{ABC}$ ikizkenar üçgen ve $|AB| = |AC|$ olmak üzere

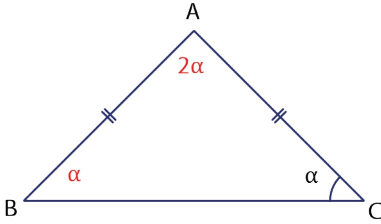
- $m(\widehat{B}) = m(\widehat{C})$ olur.
- $\widehat{A}$ tepe açısıdır.
- $\widehat{B}$ ve $\widehat{C}$ taban açılarıdır.

ÖRNEK 22



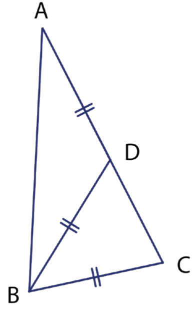
Yandaki şekilde
$|AB| = |AC|$ olmak üzere
$m(\widehat{A}) = 2 \cdot m(\widehat{B})$ ise
$m(\widehat{C}) = \alpha$ açısını bulunuz.

ÇÖZÜM



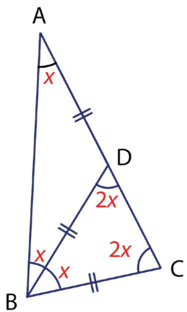
$m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = \alpha$ olduğundan
$m(\widehat{A}) = 2 \cdot m(\widehat{B}) = 2\alpha$ olur.
İç açıların ölçüleri toplamı 180° olduğundan
$2\alpha + \alpha + \alpha = 180° \Rightarrow 4\alpha = 180°$
$\Rightarrow \alpha = 45°$ olur.
Bu durumda $m(\widehat{C}) = 45°$ olur.

ÖRNEK 23



Yandaki şekilde
$|AD| = |BD| = |BC|$ ve $|AB| = |AC|$
ise $m(\widehat{DBC})$ nü bulunuz.

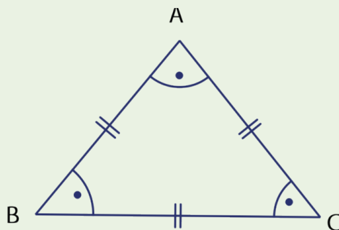
ÇÖZÜM



Verilen uzunluklar ve ikizkenar üçgenlerdeki açılar şekildeki gibi yerleştirilir. $\widehat{ABC}$ nde iç açıların ölçüleri toplamı ile

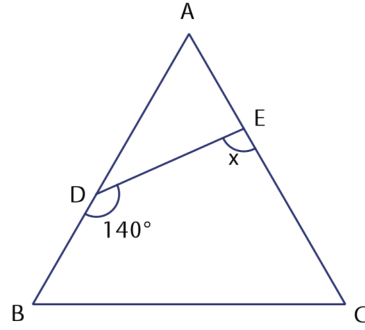
$m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180°$
$x + 2x + 2x = 180°$
$5x = 180°$
$x = 36°$ olur.

Bu durumda $m(\widehat{DBC}) = x = 36°$ olur.



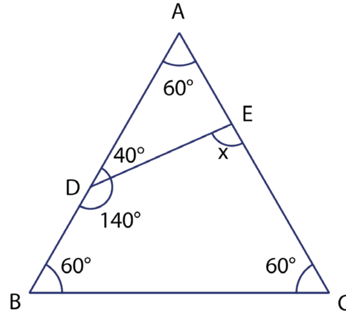
Kenarlarının uzunlukları birbirine eşit olan üçgene **eşkenar üçgen** denir. $\widehat{ABC}$ eşkenar ise $m(\widehat{A}) = m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = 60°$ olur.

ÖRNEK 24



Yandaki şekilde $\widehat{ABC}$ eşkenar üçgen ve $m(\widehat{EDB}) = 140^\circ$ ise $m(\widehat{DEC}) = x$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



$\widehat{ABC}$ eşkenar üçgen olduğundan $m(\widehat{A}) = 60^\circ$ olur.

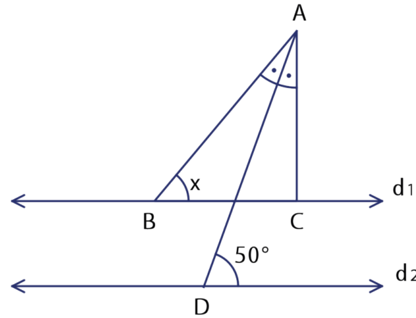
$m(\widehat{ADE}) = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$ olur.

Açılar şekildeki gibi yerleştirilirse

$m(\widehat{DEC}) = x = 60^\circ + 40^\circ = 100^\circ$ olur.

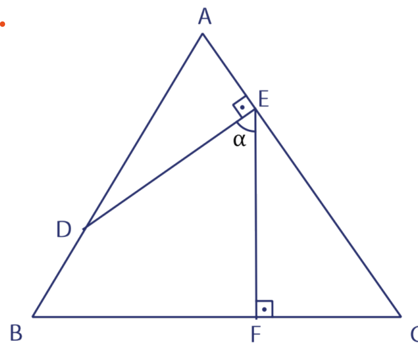
ALIŞTIRMALAR

1.



Şekilde $d_1 \parallel d_2$ ve $[AC] \perp [BC]$ ise şekilde verilenlere göre x açısının ölçüsünü bulunuz.

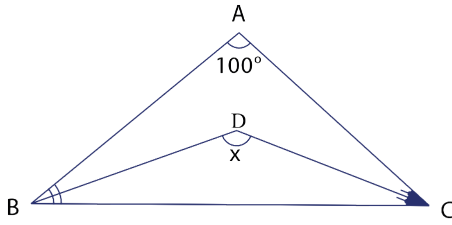
2.



Şekilde $\widehat{ABC}$ eşkenar üçgen olmak üzere $m(\widehat{AED}) = m(\widehat{EFC}) = 90^\circ$ ise $m(\widehat{DEF}) = \alpha$ değerini bulunuz.

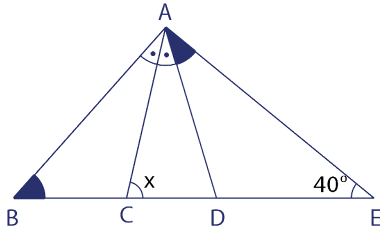


3.



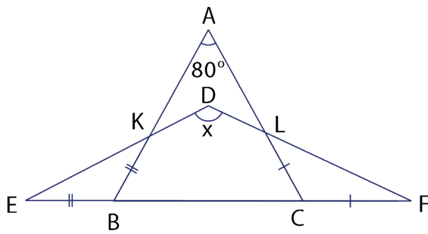
Şekilde verilenlere göre x açısının ölçüsünü bulunuz.

4.



Şekilde
$[AC]$, $\widehat{BAD}$ nın açıortayıdır.
$m(\widehat{EAD}) = m(\widehat{CBA})$ ve
$m(\widehat{AEB}) = 40^\circ$ ise
$m(\widehat{ACE}) = x$ değerini bulunuz.

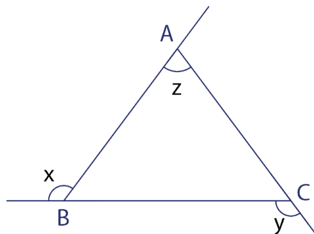
5.



Şekilde
$m(\widehat{BAC}) = 80^\circ$,
$|EB| = |KB|$ ve $|LC| = |CF|$ tir.

Verilenlere göre x açısının kaç derece olduğunu bulunuz.

6.

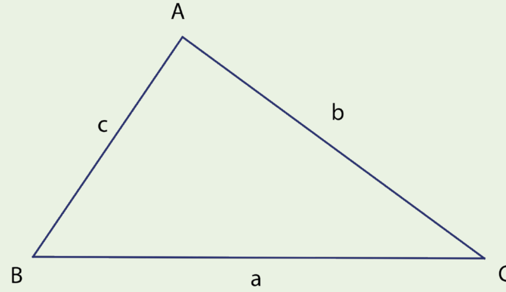


Yandaki şekilde $x + y + z = 300^\circ$ ise z açısının ölçüsünü bulunuz.



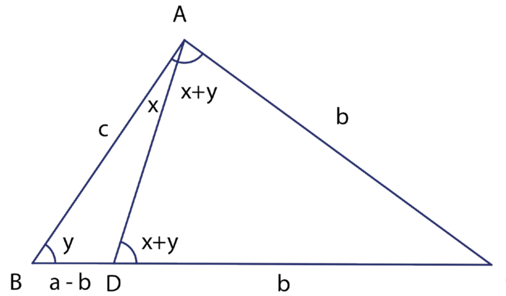
9.4.1.2. Üçgenin Kenar Uzunlukları ile Bu Kenarların Karşılarındaki Açıların Ölçüleri Arasındaki İlişki

Bir üçgende en uzun kenarın karşısındaki açının ölçüsü en büyüktür.



$a > b$ ise $m(\widehat{A}) > m(\widehat{B})$ tür.

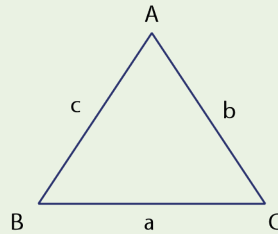
Bu özelliğin doğruluğu aşağıdaki gibi yapılabilir.



$a > b$ olduğundan a uzunluğunu şekildeki gibi parçalayıp oluşan üçgenlere açı özellikleri yazılırsa

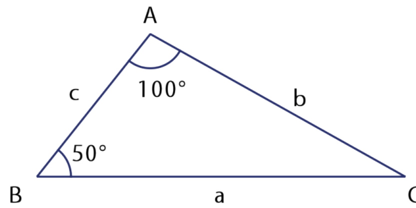
$m(\widehat{B}) = y$ ve $m(\widehat{A}) = 2x + y$ olur. Bu durumda $a > b \Rightarrow m(\widehat{A}) > m(\widehat{B})$ olur.

Bu özelliğin tersi olan "Büyük açı karşısında büyük kenar bulunur." ifadesi de doğrudur.



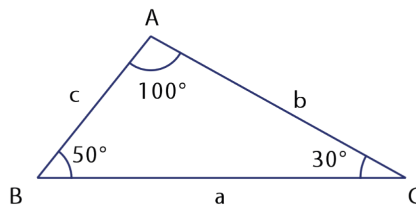
Şekilde $m(\widehat{A}) > m(\widehat{B}) \Rightarrow a > b$ dir.

ÖRNEK 25



Yandaki $\widehat{ABC}$ nin kenar uzunluklarını büyükten küçüğe doğru sıralayınız.

ÇÖZÜM



Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamından C köşesindeki iç açının ölçüsü 30° bulunur.

$m(\widehat{A}) > m(\widehat{B}) > m(\widehat{C})$ olduğundan

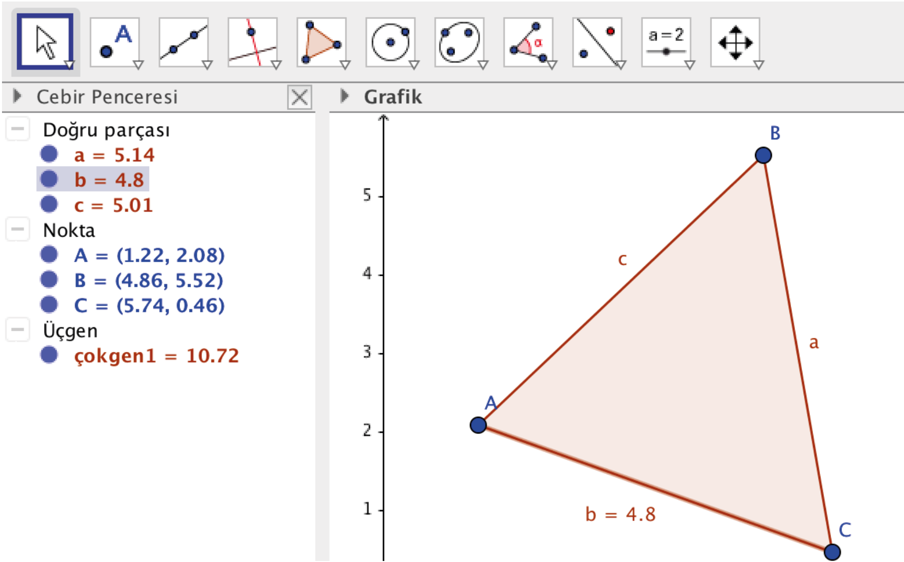
$a > b > c$ olur.



GeoGebra programı kullanılarak oluşturulan bir üçgenin kenarları ile iç açıları arasındaki ilişki aşağıdaki gibi gösterilebilir.

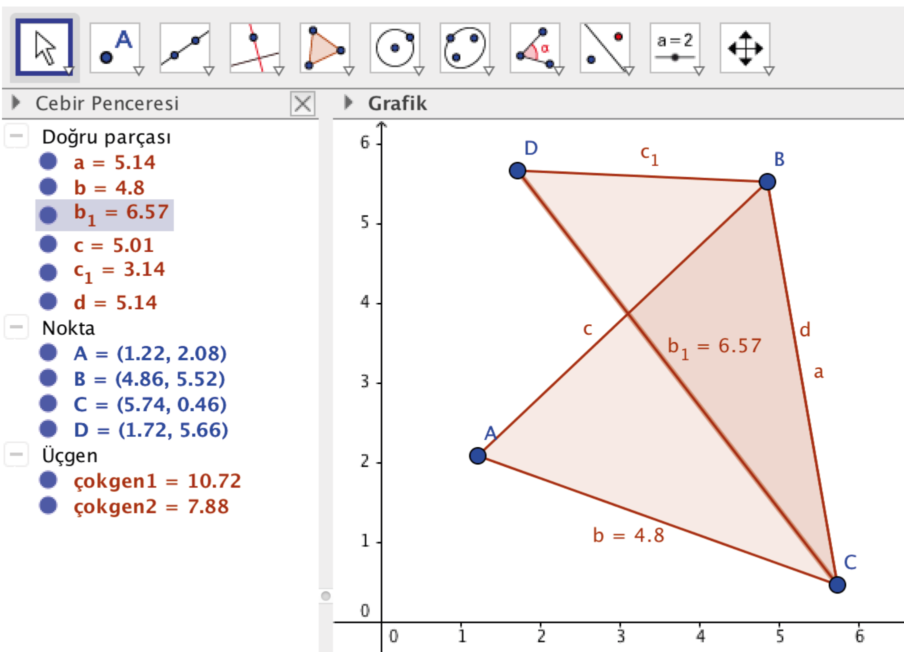
Araç çubuğu bölümündeki 5. kutuya ve ardından açılan "Çokgen" sekmesine tıklayınız. Daha sonra grafik penceresinde önce üç farklı noktaya ve ardından ilk noktaya tıklayarak ABC üçgeni çiziniz.

Araç çubuğundaki 8. kutuya ve ardından "Uzaklık veya Uzunluk" sekmesine tıklayınız. Ardından [AC] üzerine tıklayarak [AC] nın uzunluğunu ölçünüz. Ölçülen uzunluk cebir penceresinde yazacaktır. Aşağıdaki görselde ABC üçgeni ve |AC| = b = 4,8 görülmektedir.



Şimdi ise bu üçgenin B köşesindeki açıyı daha büyük çizerek BDC üçgenini oluşturunuz. Ardından [DC] nın uzunluğunu ölçünüz.

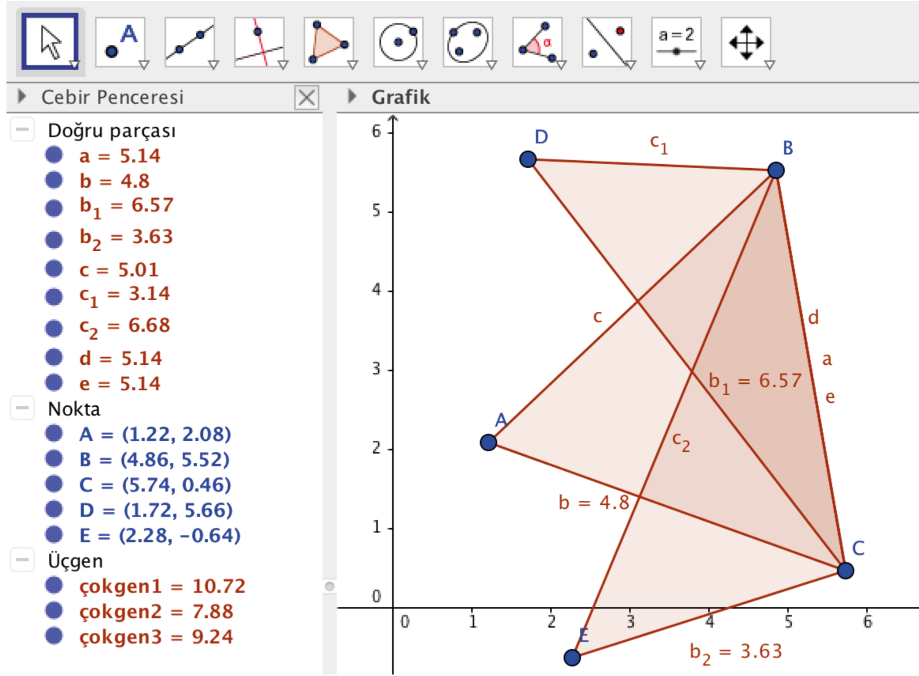
Aşağıdaki görselde |DC| = b_1 = 6,57 olarak görülmektedir.





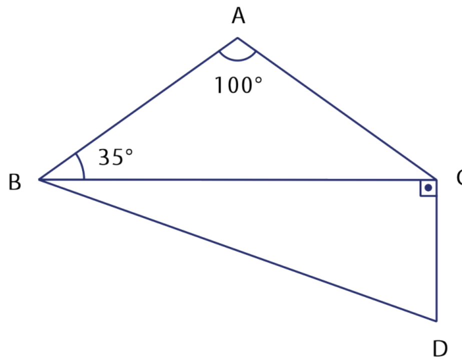
B köşesindeki açıyı ilk duruma göre daha küçük çizerek BEC üçgenini oluşturunuz. Ardından [EC] nın uzunluğunu ölçünüz.

Aşağıdaki görselde |EC| = b_2 = 3,63 olarak görülmektedir.



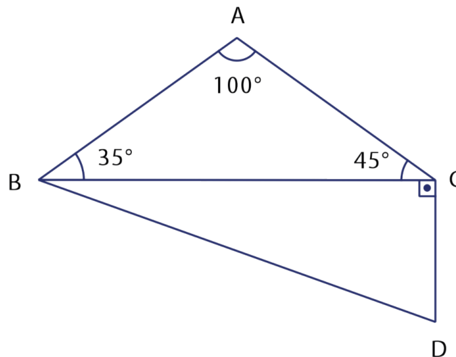
Sonuç olarak açının ölçüsü küçültüldükçe karşısındaki kenarın kısaldığı, büyütüldükçe karşısındaki kenarın uzadığı görülmektedir.

ÖRNEK 26



Yandaki şekilde verilenlere göre **en uzun** kenarı bulunuz.

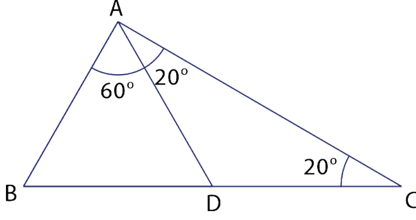
ÇÖZÜM



$\widehat{ABC}$ nde m($\widehat{A}$) > m($\widehat{C}$) > m($\widehat{B}$) olduğundan |BC| > |AB| > |AC| olur. Bu durumda $\widehat{ABC}$ nin en uzun kenarı [BC] dır.

$\widehat{DBC}$ dik açılı üçgendir. Dik açılı üçgenlerde en uzun kenar, dik açının karşısındaki kenar olduğundan |BD| > |BC| ve |BD| > |CD| eşitsizlikleriyle şeklin en uzun kenarı [BD] olur.

ÖRNEK 27



Yandaki $\widehat{ABC}$ nde $m(\widehat{BAD}) = 60^\circ$, $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{DCA}) = 20^\circ$ olduğuna göre

I. $|AC| > |AB|$

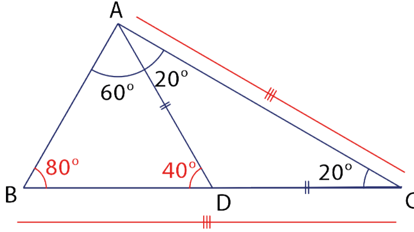
II. $|AC| = |BC|$

III. $|DC| < |BD|$

ifadelerinin doğru olup olmadığını bulunuz.

ÇÖZÜM

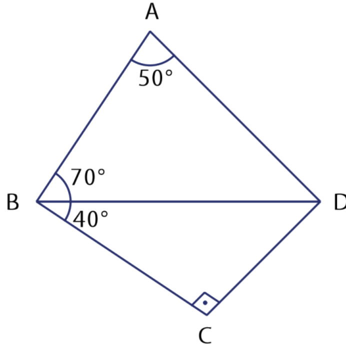
Açılar şekildeki gibi yerleştirilirse



$\widehat{ABC}$ ndeki açılardan
$|AB| < |AC|$ ve $|AC| = |BC|$ olur.
$|DC| = |AD|$ olduğundan $|BD| < |DC|$ olur.
Bu durumda yukarıda verilenlerden I ve II numaralı maddeler doğru III numaralı madde yanlıştır.

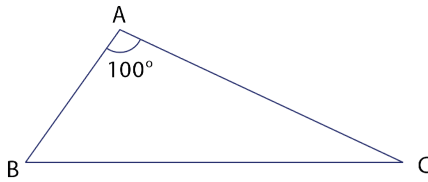
ALIŞTIRMALAR

1.



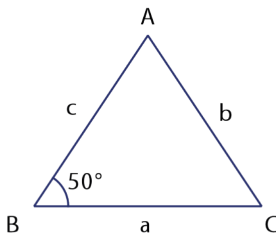
Yandaki şekilde verilenlere göre **en uzun** kenarı bulunuz.

2.



Yandaki $\widehat{ABC}$ nde $m(\widehat{BAC}) = 100^\circ$ ve $|AC| > |AB|$ ise $m(\widehat{B})$ nün **en küçük** tam sayı değerini bulunuz.

3.



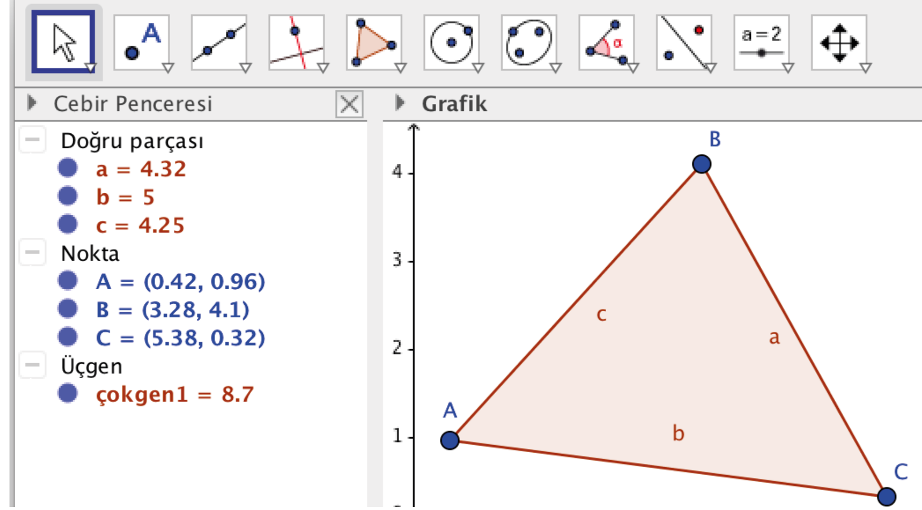
Yandaki $\widehat{ABC}$ nde $m(\widehat{ABC}) = 50^\circ$ ve $a < b < c$ ise $m(\widehat{C})$ nün **en küçük** tam sayı değerinin kaç olduğunu bulunuz.

9.4.1.3. Uzunlukları Verilen Üç Doğru Parçasının Hangi Durumlarda Üçgen Oluşturduğunun Değerlendirilmesi

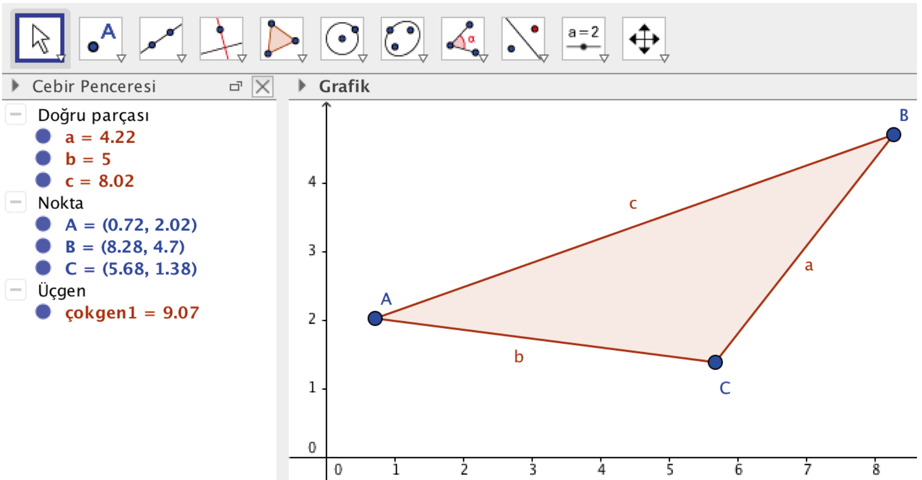
Üçgen dendiğinde doğrusal olmayan üç doğru parçasının uç uca birleştirilmesi ile oluşan kapalı şekil akla gelir. Fakat herhangi üç doğru parçası uç uca eklendiğinde her zaman üçgen oluşturulamayabilir.

Bu durum GeoGebra programı kullanılarak aşağıdaki şekilde anlatılmaya çalışılmıştır.

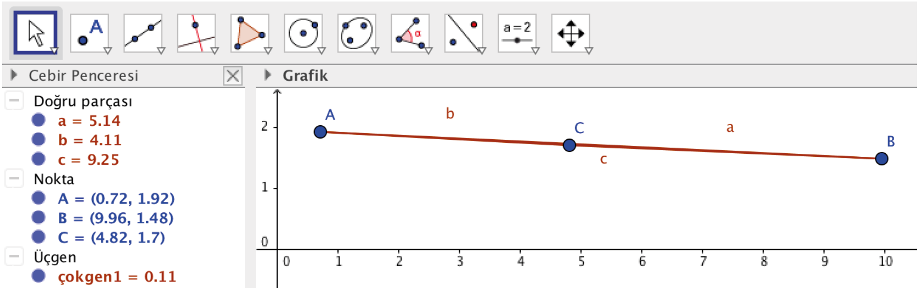
GeoGebra programında araç çubuğundaki 5. kutuya ve ardından açılan "Çokgen" sekmesine tıklayınız. Daha sonra grafik penceresinde üçgen olacak şekilde üç farklı noktaya ve ardından ilk noktaya tekrar tıklayarak ABC üçgeni oluşturunuz.



Araç çubuğundaki 2. kutuya ve ardından açılan "Noktayı Bağla/Ayır" sekmesine tıklayarak ABC üçgeninin B köşesini, farenin sol tuşuna basılı tutarak oynatınız.

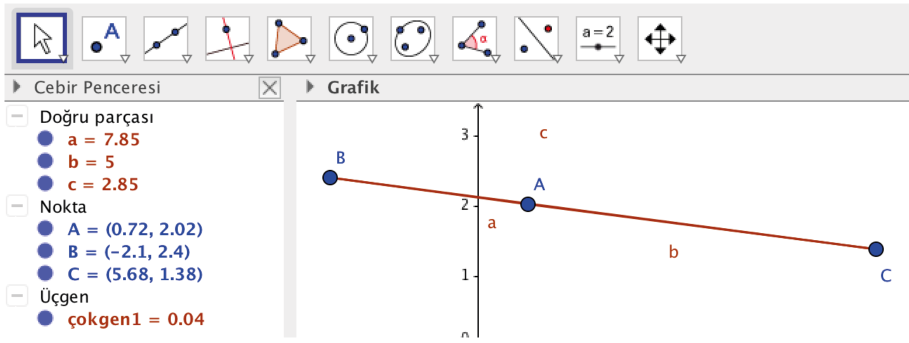


Aşağıdaki görsellere dikkatli bakılırsa B köşesi [AC] nın uzantısı üzerine geldiğinde (A, C, B noktaları doğrusal olduğunda) şeklin üçgen olmadığı görülür.



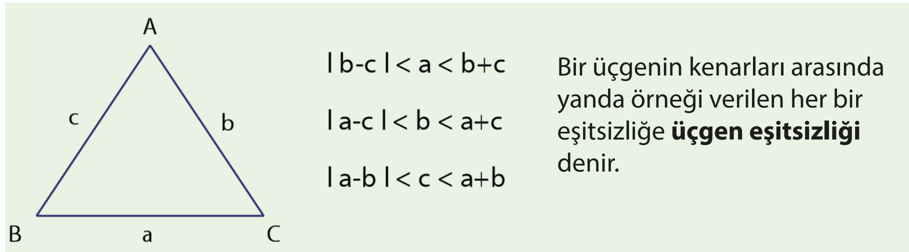
B köşesi C köşesinin sağında ve A, C, B noktaları doğrusal olduğunda $c = b + a$ olur. Bu durumda şeklin üçgen olmadığı görülür.





B köşesi, A köşesinin solunda ve B, A, C noktaları doğrusal olduğunda a = b + c (c = a − b) olur.
Bu durumda da şeklin üçgen olmadığı görülür.
Sonuç olarak bir üçgende herhangi bir kenar uzunluğu diğer iki kenar uzunluğunun toplamından küçük, farklarının mutlak değerinden büyüktür.

Üçgen Eşitsizliği



$|b-c| < a < b+c$

$|a-c| < b < a+c$

$|a-b| < c < a+b$

Bir üçgenin kenarları arasında yanda örneği verilen her bir eşitsizliğe **üçgen eşitsizliği** denir.

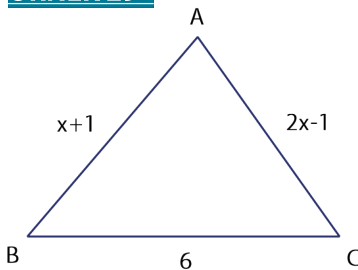
ÖRNEK 28

Bir ABC çeşitkenar üçgeninde $|BC| = 6$ birim ve $|AC| = 5$ birim ise $|AB|$ nun alabileceği tam sayı değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Üçgen eşitsizliğinden $6 - 5 < |AB| < 6 + 5 \Rightarrow 1 < |AB| < 11$ olur. Bu durumda $|AB|$ nun alabileceği tam sayı değerleri 2, 3, 4, 7, 8, 9,10 olur. ($\widehat{ABC}$ çeşitkenar üçgen olduğundan 5 ve 6 değerleri alınmamıştır.).

ÖRNEK 29



Yandaki $\widehat{ABC}$ nde verilenlere göre x in değer aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM

$|2x - 1 - (x + 1)| < 6 < 2x - 1 + x + 1 \Rightarrow |x - 2| < 6 < 3x$

$\Rightarrow |x - 2| < 6$ ve $6 < 3x$

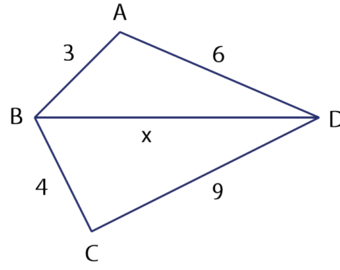
$\Rightarrow -6 < x - 2 < 6$ ve $2 < x$

$\Rightarrow -4 < x < 8$ ve $2 < x$

$\Rightarrow 2 < x < 8$ olur.



ÖRNEK 30



Yandaki şekilde DBA ve DCB üçgen belirtmek üzere şekilde verilenlere göre x in değer aralığını bulunuz.

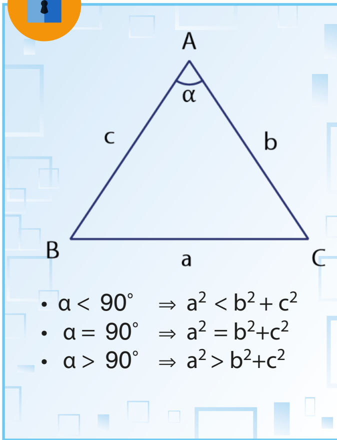
ÇÖZÜM

$\widehat{DBA}$ için $6 - 3 < x < 6 + 3 \Rightarrow 3 < x < 9$ olur.

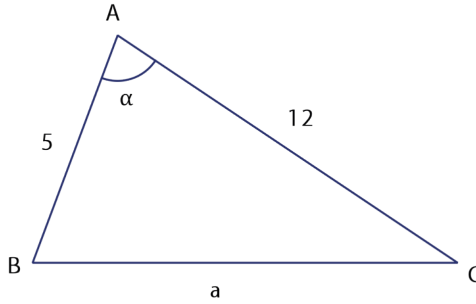
$\widehat{DCB}$ için $9 - 4 < x < 9 + 4 \Rightarrow 5 < x < 13$ olur.

Bu iki eşitsizlikten x in değer aralığı $5 < x < 9$ olur.





ÖRNEK 31



$\alpha > 90^\circ$ ise şekilde verilenlere göre a nın değer aralığını bulunuz.

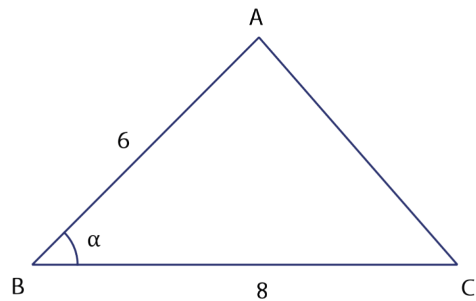
ÇÖZÜM

Üçgen eşitsizliği ile $12 - 5 < a < 12 + 5 \Rightarrow 7 < a < 17$ olur. ...I

$\alpha > 90^\circ$ olduğundan $a^2 > 5^2 + 12^2 \Rightarrow a^2 > 13^2 \Rightarrow a > 13$ olur. ...II

I ve II den $13 < a < 17$ olur.

ÖRNEK 32



$\alpha < 90^\circ$ ise şekilde verilenlere göre $|AC|$ nun **en büyük** tam sayı değerini bulunuz.

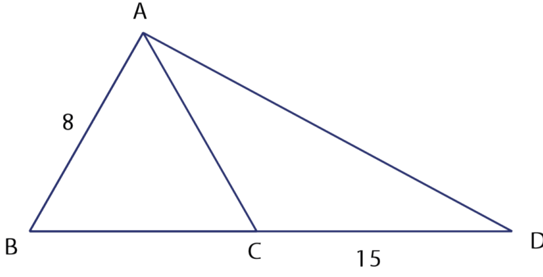
ÇÖZÜM

Üçgen eşitsizliği ile $8 - 6 < |AC| < 8 + 6 \Rightarrow 2 < |AC| < 14$ olur. ...I

$\alpha < 90^\circ$ olduğundan $|AC|^2 < 6^2 + 8^2 \Rightarrow |AC|^2 < 10^2 \Rightarrow |AC| < 10$ olur. ...II

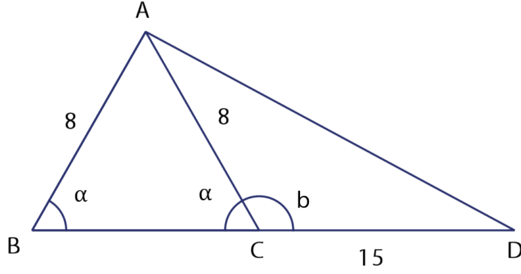
I ve II den $2 < |AC| < 10$ bulunur. Bu durumda $|AC|$ nun en büyük tam sayı değeri 9 olur.

ÖRNEK 33



Yandaki $\widehat{ABD}$ nde |AB| = |AC| ise şekilde verilenlere göre |AD| nun **en küçük** tam sayı değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



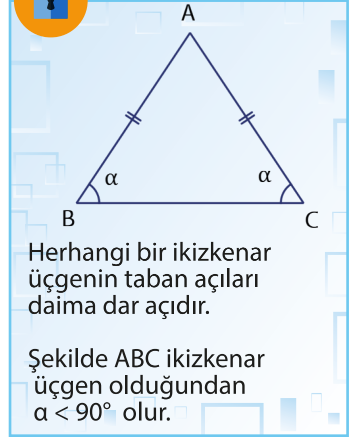
$\widehat{ABC}$ ikizkenar üçgen olduğundan $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACB}) = \alpha$ denirse $\alpha < 90^\circ$ olur.
$m(\widehat{ACD}) = b$ denirse $\alpha < 90^\circ$ olduğundan $b > 90^\circ$ olur.

Üçgen eşitsizliğinden $\widehat{ACD}$ nde $15 - 8 < |AD| < 15 + 8 \Rightarrow 7 < |AD| < 23$ olur. **...I**

$b > 90^\circ$ olduğundan $|AD|^2 > 8^2 + 15^2 \Rightarrow |AD|^2 > 17^2 \Rightarrow |AD| > 17$ olur. **...II**

I ve II den $17 < |AD| < 23$ elde edilir. Bu durumda |AD| nun en küçük tam sayı değeri 18 birimdir.

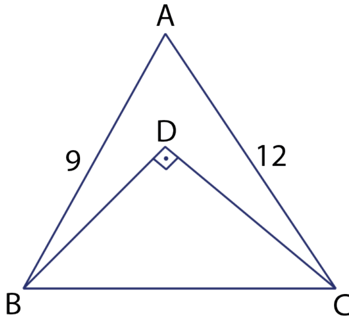




Herhangi bir ikizkenar üçgenin taban açıları daima dar açıdır.

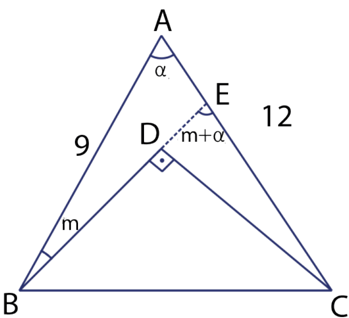
Şekilde ABC ikizkenar üçgen olduğundan $\alpha < 90^\circ$ olur.

ÖRNEK 34



Yandaki şekilde $[BD] \perp [DC]$, |AB| = 9 birim ve |AC| = 12 birim ise |BC| nun değer aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM



B, D, E doğrusal ve $E \in [AC]$ alalım. $m(\widehat{EBA}) = m$ ve $m(\widehat{BAE}) = \alpha$ alınırsa CDE dik üçgeninde, $m + \alpha < 90^\circ$ olur ve buradan $\alpha < 90^\circ$ olur.

Bu durumda $\alpha < 90^\circ \Rightarrow |BC|^2 < 9^2 + 12^2$

$\Rightarrow |BC|^2 < 15^2$

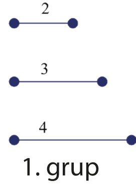
$\Rightarrow |BC| < 15$ olur. **...I**

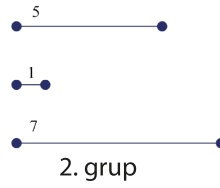
ABC üçgeninde üçgen eşitsizliği ile $12 - 9 < |BC| < 12 + 9 \Rightarrow 3 < |BC| < 21$ olur. **...II**

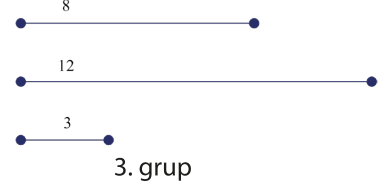
I ve II den $3 < |BC| < 15$ olur.

ALIŞTIRMALAR

1.





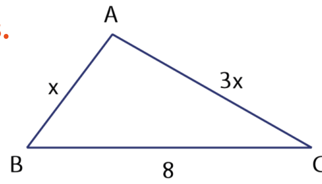


1. grup 2. grup 3. grup

Yukarıdaki her bir grup için üç doğru parçası verilmiştir. Üç doğru parçası uç uca eklendiğinde hangi grup ya da gruplarda üçgen elde edilebileceğini bulunuz.

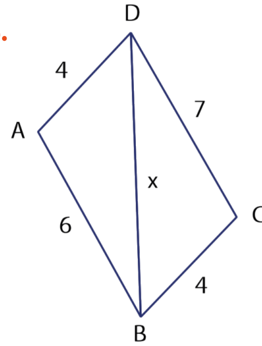
2. Kenar uzunlukları tam sayı olan bir çeşitkenar üçgenin çevresinin **en küçük** değerini bulunuz.

3.



Yandaki şekilde verilenlere göre $Ç(\widehat{ABC})$ nin **en büyük** tam sayı değerini bulunuz.

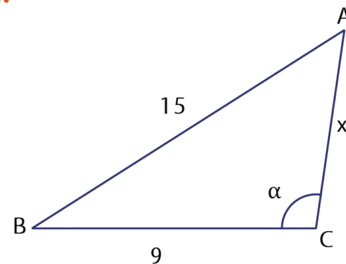
4.



Yandaki şekilde verilenlere göre x in **en küçük** tam sayı değeri ile **en büyük** tam sayı değerinin toplamını bulunuz.

5. Çevresi 20 cm olan bir üçgenin bir kenar uzunluğunun tam sayı olarak **en çok** kaç cm olabileceğini bulunuz.

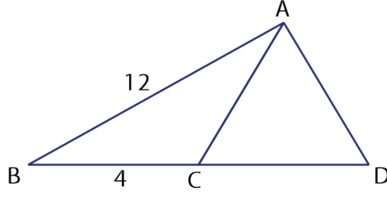
6.



Yandaki şekilde $\alpha > 90^\circ$ olmak üzere |AC| nun alacağı sayı değerlerinin aralığını bulunuz.

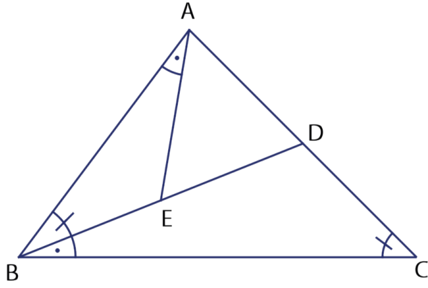


7.



Yandaki şekilde |AC| = |AD| olmak üzere verilenlere göre |AC| nun **en büyük** tam sayı değerini bulunuz.

8.



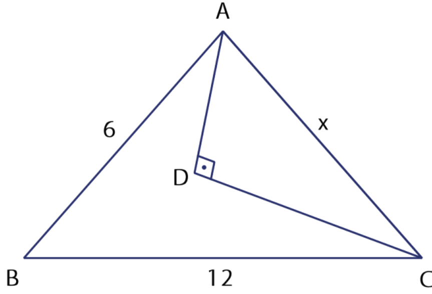
Yandaki şekilde

$m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{DBC})$,

$m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{BCD})$

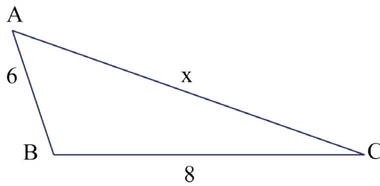
ve |AE| = 7 birim, |BE| = 8 birim ise |AB| nun **en küçük** tam sayı değerini bulunuz.

9.



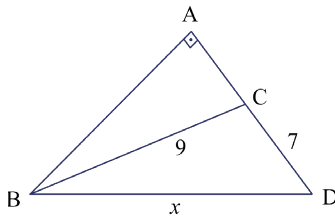
Yandaki şekilde D noktası ABC üçgeninin iç bölgesinde olmak üzere x in **en büyük** tam sayı değerini bulunuz.

10.



Yandaki $\widehat{ABC}$ nde $m(\widehat{ABC}) > 90°$ ise x in **en küçük** tam sayı değerini bulunuz.

11.



Yandaki $\widehat{BAD}$ nde $m(\widehat{BAD}) = 90°$ olmak üzere |BC| = 9 birim ve |CD| = 7 birim ise şekilde verilenlere göre x in **en küçük** tam sayı değerini bulunuz.





Terimler ve Kavramlar
- Eşlik
- Kenar-Açı-Kenar (K.A.K.)
- Kenar-Kenar-Kenar (K.K.K.)
- Açı-Kenar-Açı (A.K.A.)
- Benzerlik
- Benzerlik Oranı
- Kesen
- Açı-Açı (A.A.)



Sembol ve Gösterimler

$\cong$, $\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$, $\sim$, $\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$



Eşlik, $\cong$ sembolü ile gösterilir



ABC ile DEF üçgenlerinin karşılıklı açı ölçüleri ve karşılıklı kenar uzunlukları eşit ise bu üçgenlere **eş üçgenler** denir. $\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$ şeklinde gösterilir. $\widehat{ABC}$ ile $\widehat{DEF}$ üçgenlerinin açıları arasında

$m(\widehat{A}) = m(\widehat{D})$,
$m(\widehat{B}) = m(\widehat{E})$,
$m(\widehat{C}) = m(\widehat{F})$

ve kenarları arasında

$|AB| = |DE|$,
$|AC| = |DF|$,
$|BC| = |EF|$

eşitlikleri vardır.

9.4.2. Üçgenlerde Eşlik ve Benzerlik

Neler Öğreneceksiniz?

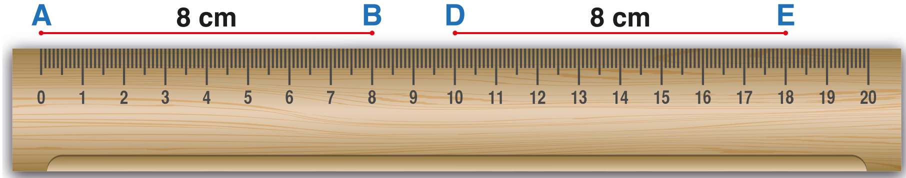
- İki üçgenin eş olması için gerekli olan asgari koşulları değerlendirmeyi,
- İki üçgenin benzer olması için gerekli olan asgari koşulları değerlendirmeyi,
- Üçgenin bir kenarına paralel ve diğer iki kenarını kesecek şekilde çizilen, doğrunun ayırdığı doğru parçaları arasında ilişki kurmayı,
- Üçgenlerin benzerliği ile ilgili problemler çözmeyi öğreneceksiniz.

9.4.2.1. İki Üçgenin Eş Olması için Gereken Asgari Koşullar

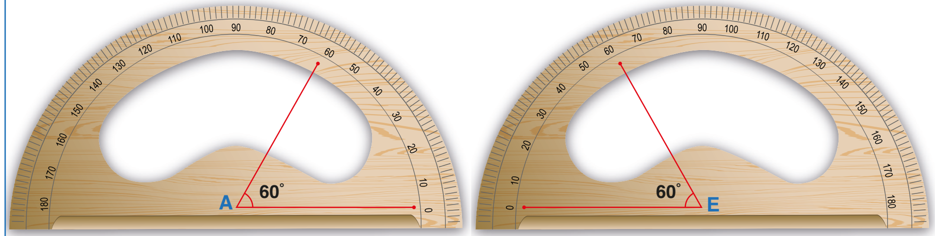
İki üçgenin karşılıklı kenar uzunlukları ve karşılıklı köşelerindeki açı ölçüleri eşit ise bu üçgenlere **eş üçgenler** denir.

Ölçümler Yaparak Kenar - Açı - Kenar (K.A.K.) Eşliği Oluşturma

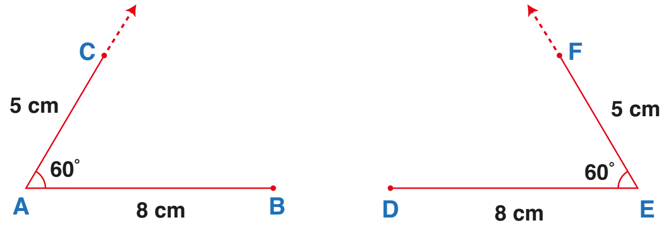
Cetvel yardımıyla 8 cm uzunluğunda iki doğru parçası çizilir. Bu doğru parçalarının uç noktaları aşağıdaki gibi isimlendirilir.



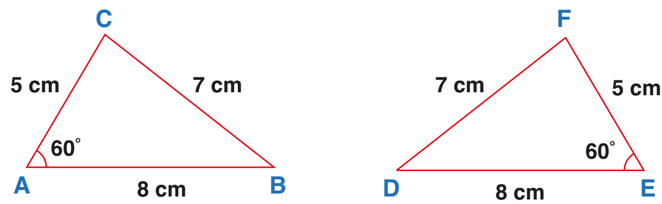
Açıölçer yardımıyla A ve E noktalarından aşağıdaki gibi 60° lik açılar çizilir.



Açıölçer yardımıyla oluşturulan açıların kollarından cetvel yardımıyla 5 cm uzunluğunda aşağıdaki gibi iki doğru parçası çizilir.



C ve B noktaları birleştirilerek ABC üçgeni, D ve F noktaları birleştirilerek DEF üçgeni oluşturulur.

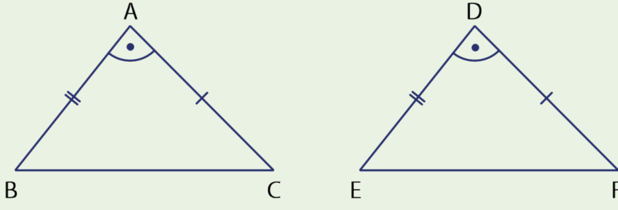


Oluşturulan ABC ve DEF üçgenlerinde [BC] ve [DF] cetvel yardımıyla ölçülürse |BC| = |DF| = 7 cm olduğu görülür. Oluşturulan ABC ve EDF üçgenleri eş üçgen olur. Dolayısıyla karşılıklı iki kenar uzunluğu ve bu kenarlar arasında kalan açıları eşit olan iki üçgen eş üçgendir.



Kenar - Açı - Kenar (K.A.K.) Eşlik Teoremi

Karşılıklı iki kenarı ve bu iki kenarın oluşturduğu açıları eşit olan üçgenler eştir. Bu durum **Kenar - Açı - Kenar (K.A.K.) eşliği** olarak isimlendirilir.



$|AB| = |DE|$

$m(\widehat{A}) = m(\widehat{D})$

$|AC| = |DF|$

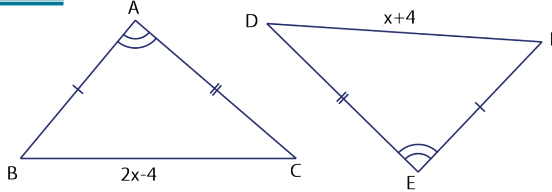
Yukarıda gösterildiği üzere ikişer kenar uzunluğu ve bu iki kenar arasındaki açıları karşılıklı bire bir eşlenebilen $\overset{\frown}{ABC}$ ile $\overset{\frown}{DEF}$ eştir ve $\overset{\frown}{ABC} \cong \overset{\frown}{DEF}$ olarak yazılır.

$\overset{\frown}{ABC} \cong \overset{\frown}{DEF}$ yazılışında harflerin sırası önemli olur. Örneğin bu iki üçgenin eşliği $\overset{\frown}{ABC} \cong \overset{\frown}{DFE}$ şeklinde yazılamaz. Çünkü F ile E nin yeri değişirse aynı sıralamada olan C ile B nin de yer değiştirmesi gerekir.

Bu durumda aynı eşlik $\overset{\frown}{ACB} \cong \overset{\frown}{DFE}$ şeklinde yazılabilir.

Siz de harflerin yerini değiştirerek bu eşliği farklı şekillerde yazınız.

ÖRNEK 1



Yukarıda verilenlere göre x in değerini bulunuz.

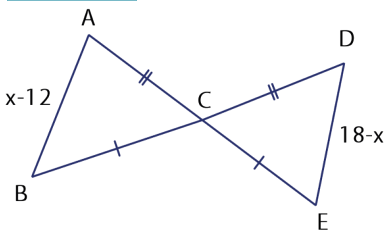
ÇÖZÜM

$$\left.\begin{array}{l} |AB| = |EF| \\ m(\widehat{A}) = m(\widehat{E}) \\ |AC| = |ED| \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\frown}{ABC} \cong \overset{\frown}{EFD} \text{ olur (K.A.K.)}.$$

Bu durumda $|BC| = |DF| \Rightarrow 2x - 4 = x + 4$

$\Rightarrow x = 8$ olur.

ÖRNEK 2



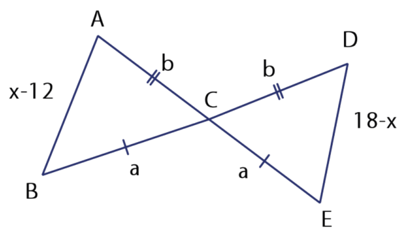
Şekilde B, C, D noktaları ve A, C, E noktaları doğrusaldır.

$|AC| = |CD|$, $|BC| = |CE|$, $|AB| = x - 12$ birim,

$|DE| = 18 - x$ birimdir.

Verilenlere göre |BD| nun tam sayı olarak **en az** kaç olabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM



$|AC| = |CD| = b$ ve $|BC| = |CE| = a$ denilsin.

Ters açılardan $m(\overset{\frown}{ACB}) = m(\overset{\frown}{DCE})$ olur.

K.A.K. eşliğine göre $\overset{\frown}{ACB} \cong \overset{\frown}{DCE}$ olduğundan

$|AB| = |DE|$

$x - 12 = 18 - x$

$2x = 30$

$x = 15$ olur.

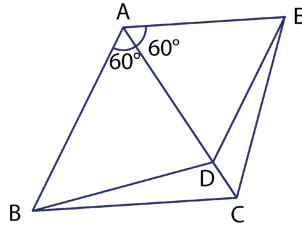
$\overset{\frown}{ABC}$ nde üçgen eşitsizliğine göre

$|AB| < |AC| + |CB| \Rightarrow x - 12 < b + a \Rightarrow 15 - 12 < b + a \Rightarrow 3 < b + a$ olur.

Bu durumda $|BD| = a + b > 3$ olduğundan |BD| nun en küçük tam sayı değeri 4 olur.

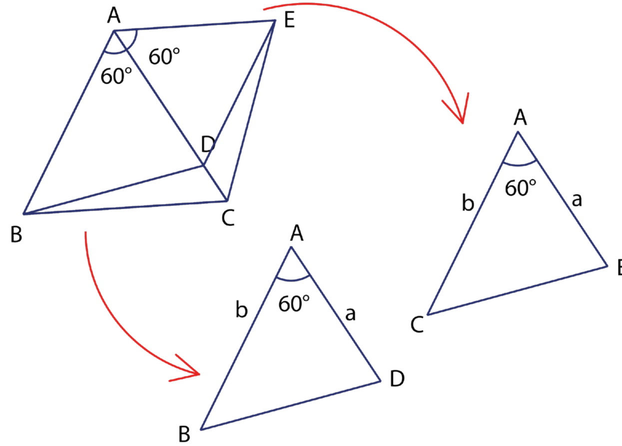


ÖRNEK 3



$\overset{\frown}{ABC}$ ve $\overset{\frown}{ADE}$ eşkenar üçgenlerdir.
$|BD| = (3x - 1)$ birim ve
$|EC| = (x + 5)$ birim ise
x in değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



Şekil üzerinde açılar ve uzunluklar yazılarak K.A.K. eşliği ile yukarıdaki gibi $\overset{\frown}{ACE} \cong \overset{\frown}{ABD}$ elde edilir.

$\overset{\frown}{ACE} \cong \overset{\frown}{ABD} \Rightarrow |CE| = |BD|$ olur. Buradan $x + 5 = 3x - 1$

$6 = 2x$

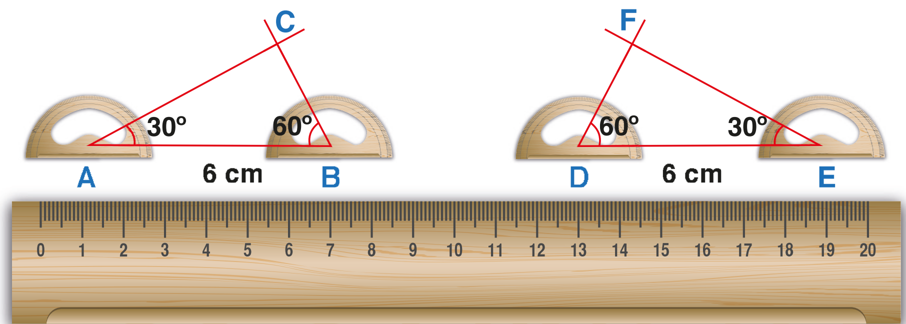
$x = 3$ birimdir.

Ölçümler Yaparak Açı - Kenar - Açı (A.K.A.) Eşliği Oluşturma

Cetvel yardımıyla uzunluğu 6 cm olan iki farklı doğru parçası çizilir.

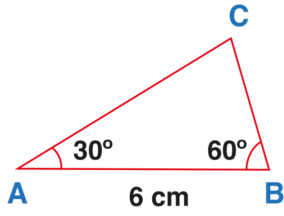


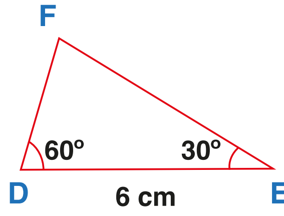
Açıölçer kullanılarak A ve E köşelerinden 30º lik, B ve D köşelerinden 60º lik açılar aşağıdaki gibi çizilir.





Çizilen açılar yardımıyla ABC üçgeni ve DEF üçgeni oluşturulur. Cetvel kullanılarak oluşturulan üçgenlerin kenar uzunlukları ölçülürse |AC| = |EF| ve |CB| = |FD| olduğu görülür. Oluşturulan ABC ve DEF üçgeni eş üçgenlerdir.

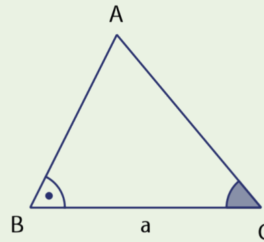


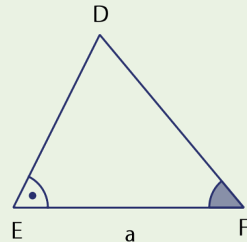


Sonuç olarak karşılıklı ikişer açısı eş ve bu açılar arasındaki kenar uzunlukları eşit olan iki üçgen eş üçgen olur.

Açı - Kenar - Açı (A.K.A.) Eşlik Teoremi

Karşılıklı olarak ikişer açısının ölçüsü eşit ve eşit açılar arasındaki kenar uzunlukları da aynı olan üçgenler eştir. Bu durum **Açı - Kenar-Açı (A.K.A.) eşliği** olarak isimlendirilir.

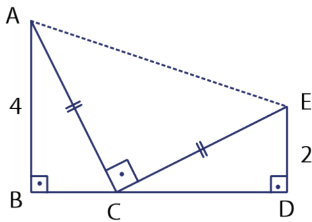




$m(\widehat{B}) = m(\widehat{E})$
$|BC| = |EF|$
$m(\widehat{C}) = m(\widehat{F})$

Yukarıda gösterildiği gibi ikişer açısı ve bu açılar arasındaki kenarları bire bir eşlenebilen ABC ve DEF üçgenleri eştir. Bu durum $\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$ olarak yazılır.

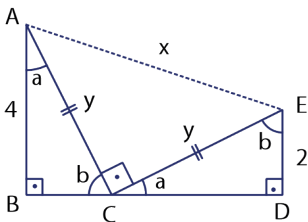
ÖRNEK 4



Şekilde verilenlere göre |AE| = x değerini bulunuz.

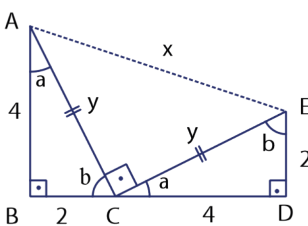
ÇÖZÜM

Açılar şekildeki gibi yerleştirilirse



$$\left.\begin{aligned} m(\widehat{BAC}) &= m(\widehat{DCE}) \\ |AC| &= |EC| \\ m(\widehat{BCA}) &= m(\widehat{DEC}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \widehat{BAC} \cong \widehat{DCE} \text{ olur (A.K.A.).}$$

Bu durumda |BA| = |DC| = 4 ve |BC| = |DE| = 2 yazılarak şekil aşağıdaki gibi çizilir.



$\widehat{ABC}$ nde Pisagor teoremi ile $y^2 = 4^2 + 2^2 \Rightarrow y^2 = 20$ olur. $\widehat{ACE}$ nde Pisagor teoremi ile

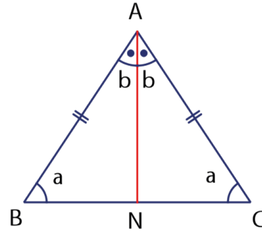
$$x^2 = y^2 + y^2$$
$$x^2 = 20 + 20$$
$$x^2 = 40$$
$$x = \sqrt{40}$$
$$x = 2\sqrt{10} \text{ birim olur.}$$



ÖRNEK 5

Bir ikizkenar üçgende tepe açısından tabana indirilen açıortayın aynı zamanda kenarortay ve yükseklik olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM



Yandaki gibi $|AB| = |AC|$ olacak şekilde ikizkenar $\widehat{ABC}$ çizilir ve açıları şekildeki gibi yazılır.

Tepe açısı olan $\widehat{A}$ ndan açıortay indirilir ve bu açıortayın tabanı kestiği noktaya N denir.

$\widehat{ABN}$ ile $\widehat{ACN}$ arasındaki açı-kenar durumları incelenirse

$$\left.\begin{array}{r} m(\widehat{ABN}) = m(\widehat{ACN}) \\ |AB| = |AC| \\ m(\widehat{BAN}) = m(\widehat{CAN}) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{A.K.A. eşliği ile } \widehat{ABN} \cong \widehat{ACN} \text{ olduğu görülür.}$$

$\widehat{ABN} \cong \widehat{ACN}$ eşliği ile $|BN| = |NC|$ olur. Bu ise A köşesinden indirilen açıortayın aynı zamanda kenarortay olduğunu gösterir.

Ayrıca B, N ve C noktaları doğrusal olduğundan

$m(\widehat{BNA}) + m(\widehat{CNA}) = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{BNA}) = m(\widehat{CNA}) = 90^\circ$ olur.

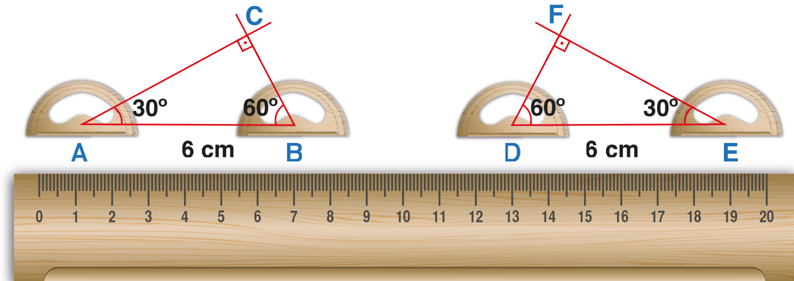
Bu ise A köşesinden indirilen açıortayın aynı zamanda yükseklik olduğunu gösterir (Eşlikten dolayı $m(\widehat{BNA}) = m(\widehat{CNA})$ olur.).

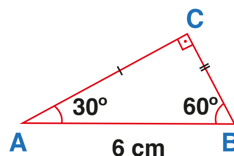
Ölçümler Yaparak Kenar - Kenar - Kenar (K.K.K.) Eşliği Oluşturma

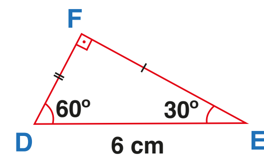
Cetvel yardımıyla uzunluğu 6 cm olan iki farklı doğru parçası çizilir.



Açıölçer kullanılarak A ve E köşelerinden 30º lik, B ve D köşelerinden 60º lik açılar aşağıdaki gibi çizilir. Bu durumda C ve F köşelerindeki açı ölçüleri 90º olur. Çizilen açılar yardımıyla ABC üçgeni ve DEF üçgeni oluşturulur. Cetvel kullanılarak oluşan üçgenlerin kenar uzunlukları ölçülürse $|AC| = |EF|$, $|CB| = |FD|$ ve $|AB| = |DE|$ olduğu görülür. Bu durumda oluşturulan üçgenler eş üçgenler olur. Sonuç olarak karşılıklı kenar uzunlukları eşit olan üçgenler eş üçgenlerdir.







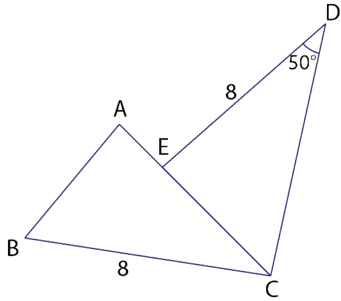


Kenar - Kenar - Kenar (K.K.K.) Eşlik Teoremi

Kenarları arasındaki bire bir eşleme ile karşılıklı kenarları eş olan üçgenlere eş üçgenler denir. Bu eşlik **Kenar - Kenar - Kenar (K.K.K.) eşliği** olarak isimlendirilir.

K.K.K. eşliğiyle uzunlukları eşit olan kenarların karşılarındaki açıların ölçüleri de eşittir.

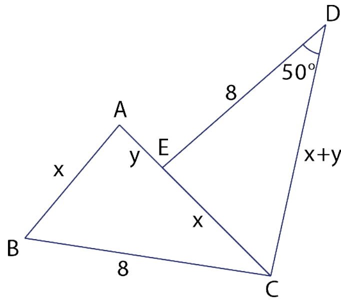
ÖRNEK 6



Şekilde $|AB| = |EC|$, $m(\widehat{CDE}) = 50^\circ$,

$|AC| = |DC|$ ve $|DE| = |BC| = 8$ birim ise $m(\widehat{ACB})$ nü bulunuz.

ÇÖZÜM



Verilenler şekildeki gibi yerleştirilirse

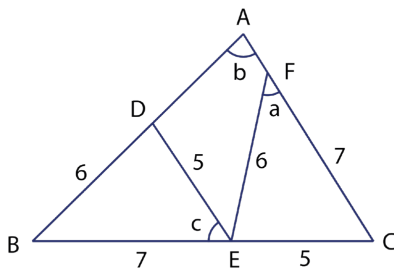
$|AB| = |CE|$, $|BC| = |ED|$ ve $|CA| = |DC|$ ise

K.K.K. eşliği ile $\widehat{ABC} \cong \widehat{CED}$ olur.

$\widehat{ABC} \cong \widehat{CED}$ olduğundan eşit kenarların karşısındaki açıların ölçüleri de eşittir.

Bu durumda $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{CDE}) = 50^\circ$ olur.

ÖRNEK 7



Şekilde

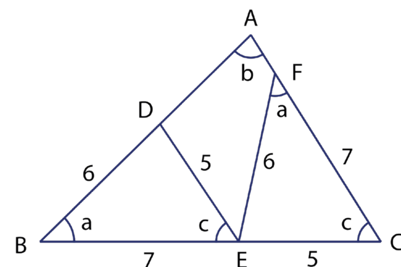
$|BD| = |EF| = 6$ birim,

$|DE| = |EC| = 5$ birim ve

$|BE| = |FC| = 7$ birim ise $a + b + c$ nin kaç derece olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\left.\begin{array}{l} |BD| = |EF| = 6 \text{ birim} \\ |DE| = |EC| = 5 \text{ birim} \\ |BE| = |FC| = 7 \text{ birim} \end{array}\right\}$$ olduğundan K. K. K. eşliği ile $\widehat{DBE} \cong \widehat{EFC}$ olur.



Bu durumda $m(\widehat{DEB}) = m(\widehat{FCE}) = c$ ve $m(\widehat{DBE}) = m(\widehat{EFC}) = a$ olur.

Açılar şekildeki gibi yerleştirilirse $\widehat{ABC}$ nin iç açıları toplamından $a + b + c = 180^\circ$ olur.

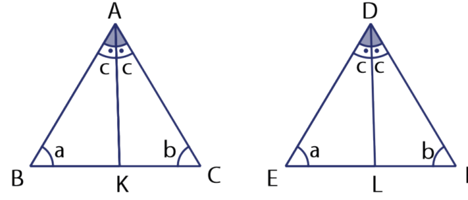


ÖRNEK 8

Eş iki üçgenin karşılıklı yardımcı elemanlarının da eş olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM

Eş Üçgenlerde Karşılıklı Açıortayların Eşliğinin İspatı

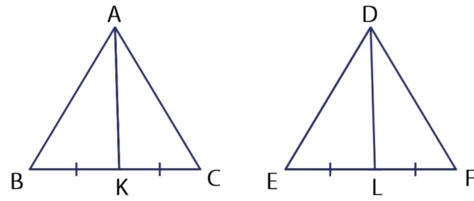


Şekildeki gibi $\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$ çizilir. Daha sonra karşılıklı köşeler olan A ile D den sırasıyla [AK] ve [DL] açıortayları çizilir ve $\widehat{ABK}$ ile $\widehat{DEL}$ i karşılaştırılırsa

$$\left.\begin{array}{r} m(\widehat{KAB}) = m(\widehat{LDE}) = c \\ |AB| = |DE| \\ m(\widehat{ABK}) = m(\widehat{DEL}) = a \end{array}\right\} \Rightarrow \text{A.K.A. eşliği ile } \widehat{ABK} \cong \widehat{DEL} \text{ olur.}$$

$\widehat{ABK} \cong \widehat{DEL}$ olduğundan |AK| = |DL| olur ki bu da eş üçgenlerin karşılıklı açıortaylarının da eş olduğunu gösterir.

Eş Üçgenlerde Karşılıklı Kenarortayların Eşliğinin İspatı

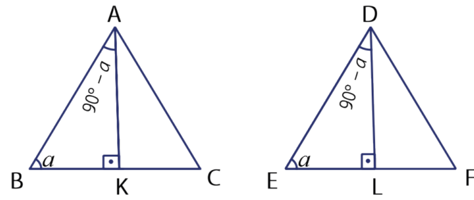


Şekildeki gibi $\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$ çizilir. Daha sonra karşılıklı köşeler olan A ile D den sırasıyla [AK] ve [DL] kenarortayları çizilir ve $\widehat{ABK}$ ile $\widehat{DEL}$ i karşılaştırılırsa

$$\left.\begin{array}{r} |AB| = |DE| \\ m(\widehat{ABK}) = m(\widehat{DEL}) \\ |BK| = |EL| \end{array}\right\} \Rightarrow \text{K.A.K. eşliği ile } \widehat{ABK} \cong \widehat{DEL} \text{ olur.}$$

$\widehat{ABK} \cong \widehat{DEL}$ olduğundan |AK| = |DL| olur ki bu da eş üçgenlerin karşılıklı kenarortaylarının da eş olduğunu gösterir.

Eş Üçgenlerde Karşılıklı Yüksekliklerin Eşliğinin İspatı



Şekildeki gibi $\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$ çizilir. Daha sonra karşılıklı köşeler olan A ile D den sırasıyla [AK] ve [DL] yükseklikleri çizilir ve $\widehat{ABK}$ ile $\widehat{DEL}$ i karşılaştırılırsa

$$\left.\begin{array}{r} m(\widehat{ABK}) = m(\widehat{DEL}) \\ |AB| = |DE| \\ m(\widehat{BAK}) = m(\widehat{EDL}) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{A.K.A. eşliği ile } \widehat{ABK} \cong \widehat{DEL} \text{ olur.}$$

$\widehat{ABK} \cong \widehat{DEL}$ olduğundan |AK| = |DL| olur ki bu da eş üçgenlerin karşılıklı yüksekliklerinin de eş olduğunu gösterir.

ÖRNEK 9

$\widehat{ABC}$ nde B köşesine ait yükseklik (x − 3) birim, $\widehat{DEF}$ nde E köşesine ait yükseklik (5 − x) birimdir. $\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$ ise x değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$ olduğundan karşılıklı köşeler olan B ve E ye ait yükseklikler de eştir. Bu durumda $x - 3 = 5 - x \Rightarrow 2x = 8$ ve $x = 4$ olur.



ALIŞTIRMALAR

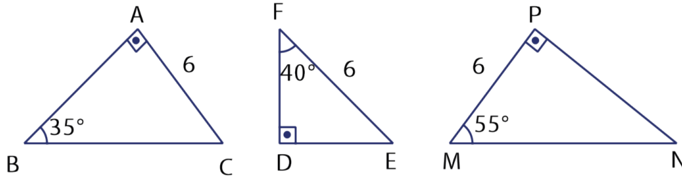
1. $\widehat{ABC} \cong \widehat{KLM}$ ise aşağıda verilenlerin doğru olup olmadığını belirtiniz.

I. $|AB| = |KL|$

II. $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{KLM})$

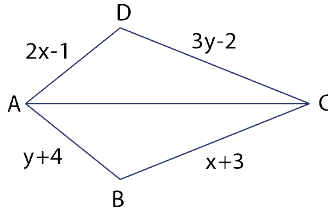
III. $|BC| = |LM|$

2.



Yukarıdaki üçgenlerden ikisi eştir. Eş olan üçgenleri bularak hangi eşlik teoremine göre eş olduklarını belirtiniz.

3.



Şekilde $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{BCA})$,

$m(\widehat{DCA}) = m(\widehat{CAB})$;

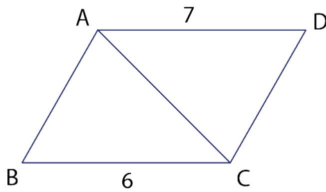
$|AD| = (2x - 1)$ birim,

$|DC| = (3y - 2)$ birim,

$|CB| = (x + 3)$ birim ve

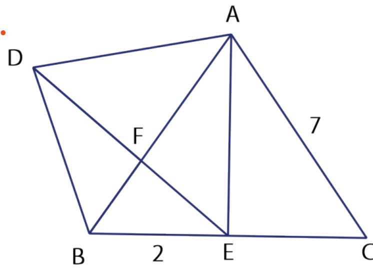
$|BA| = (y + 4)$ birim ise $x + y$ değerini bulunuz.

4.



$|AD| = 7$ birim ve $|BC| = 6$ birim olmak üzere $\widehat{ABC} \cong \widehat{ADC}$ olduğuna göre $|AB| + |DC|$ değerini bulunuz.

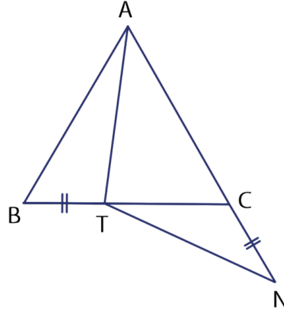
5.



$\widehat{ABC}$ ve $\widehat{ADE}$ eşkenar üçgenlerdir. $|AD| = 7$ birim ve $|BE| = 2$ birim ise $|DB|$ nu bulunuz.

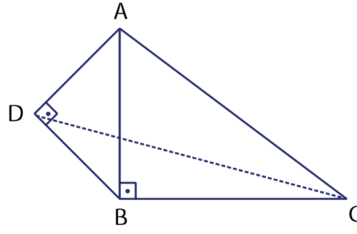


6.



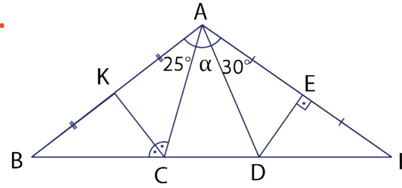
$\widehat{ABC}$ eşkenar üçgen, $|BT| = |CN|$, $|AT| = (5 - x)$ birim ve $|TN| = (x - 1)$ birim ise x değerini bulunuz.

7.



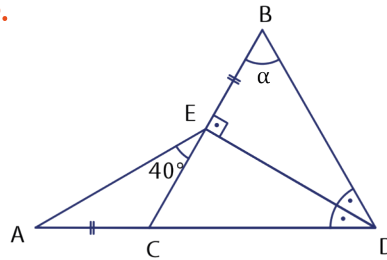
Şekilde $|AD| = 1$ birim, $|DB| = 3$ birim ve $|AB| = |BC|$ ise $|DC|$ nu bulunuz.

8.



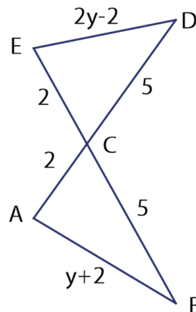
Şekilde $m(\widehat{BAC}) = 25°$, $m(\widehat{FAD}) = 30°$; $|AK| = |KB|$, $|AE| = |EF|$, $[DE] \perp [AF]$ ve $m(\widehat{ACK}) = m(\widehat{KCB})$ ise $m(\widehat{CAD})$ nü bulunuz.

9.



Şekilde $|AC| = |EB|$, $m(\widehat{BDE}) = m(\widehat{EDC})$, $m(\widehat{AEC}) = 40°$ ve $[DE] \perp [BC]$ ise $m(\widehat{CBD}) = \alpha$ değerini bulunuz.

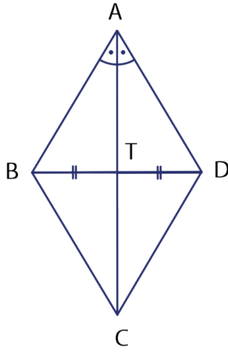
10.



A, C, D noktaları ve E, C, B noktaları doğrusaldır. Şekilde verilenlere göre y değerini bulunuz.



11.



I. $[AC] \perp [BD]$

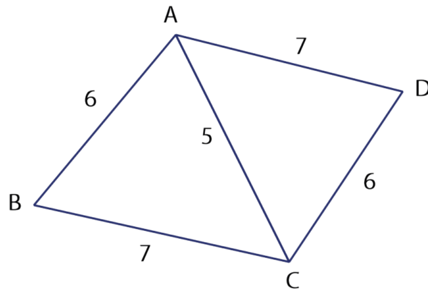
II. $|TC| > |DC|$

III. $|BC| = |DC|$

IV. $|CD| > |AD|$

Şekilde verilenlere göre yukarıdaki maddelerden hangilerinin daima doğru olduğunu bulunuz.

12.



Şekilde verilenlere göre $|AB| = |DC| = 6$ birim, $|AD| = |BC| = 7$ birim ve $|AC| = 5$ birim olur.

I. $[AC]$, $\widehat{BAD}$ nın açıortayıdır.

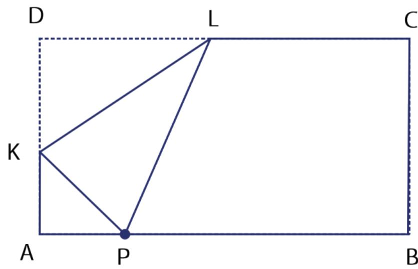
II. $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{CDA})$ tir.

III. K . K . K . eşliğine göre $\widehat{ABC} \cong \widehat{ADC}$ dir.

IV. $[AD] \parallel [BC]$ dir.

Yukarıdakilerden hangisi ya da hangilerinin **yanlış** olduğunu bulunuz.

13. Bir ABCD dikdörtgeninde D noktası [AB] üzerindeki bir P noktasıyla çakışacak biçimde katlanıyor ve aşağıdaki şekil elde ediliyor.



I. $[KL]$, $\widehat{DKP}$ nın açıortayıdır.

II. $|DK| = |KP|$ tir.

III. $|DL| = |LP|$ tir.

IV. $[DP] \perp [KL]$ tir.

Şekle göre yukarıdakilerden hangilerinin daima doğru olduğunu bulunuz.



9.4.2.2. İki Üçgenin Benzer Olması için Gerekli Olan Asgari Koşullar

Karşılıklı köşeleri arasında yapılan bire bir eşlemede karşılıklı kenar uzunlukları orantılı ve karşılıklı açıları eş olan üçgenlere **benzer üçgenler** denir.

Benzerlik sembolü " $\sim$ " şeklindedir.

$\overset{\frown}{ABC}$ ve $\overset{\frown}{DEF}$ nin benzerliği $\overset{\frown}{ABC} \sim \overset{\frown}{DEF}$ ile gösterilir. Ayrıca $k \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$\left.\begin{aligned} \widehat{A} &= \widehat{D} \\ \widehat{B} &= \widehat{E} \\ \widehat{C} &= \widehat{F} \end{aligned}\right\} \text{ ve } \frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|AC|}{|DF|} = k \text{ olur.}$$

Eşitlikteki k ifadesine $\overset{\frown}{ABC}$ nin $\overset{\frown}{DEF}$ ne **benzerlik oranı** denir.

ÖRNEK 10

$\overset{\frown}{ABC}$ nin $\overset{\frown}{PRS}$ ne benzerlik oranı $\frac{2}{3}$ ise aşağıda verilenlerden hangisinin doğru ya da yanlış olduğunu belirtiniz.

a) $\widehat{A} = \widehat{R}$

b) $|CB| - |SR| = 0$

c) $\frac{|BC|}{|RS|} = \frac{2}{3}$

ç) $\overset{\frown}{CAB} \sim \overset{\frown}{SPR}$

d) $3 \cdot |AB| = 2 \cdot |PR|$

ÇÖZÜM

$\overset{\frown}{ABC} \sim \overset{\frown}{PRS}$ olduğundan $\frac{|AB|}{|PR|} = \frac{|BC|}{|RS|} = \frac{|AC|}{|PS|} = \frac{2}{3}$ olur.

Ayrıca karşılıklı açıların eşliğinden $\widehat{A} = \widehat{P}$, $\widehat{B} = \widehat{R}$ ve $\widehat{C} = \widehat{S}$ olur.

a) $\overset{\frown}{ABC} \sim \overset{\frown}{PRS}$ olduğundan $\widehat{A}$ ve $\widehat{R}$ karşılıklı eşlenemez. Bu durumda $\widehat{A} \neq \widehat{R}$ olur.

b) $\frac{|BC|}{|RS|} = \frac{2}{3}$ olduğundan $|BC| = 2k$ ve $|RS| = 3k$ diyelim.
$|CB| - |SR| = 2k - 3k = -k$ olur.
Benzerlik oranı olan k değeri pozitif gerçek sayı olduğundan $-k \neq 0$ olur.
Bu durumda $|CB| - |SR| \neq 0$ bulunur.

c) [BC] ile [RS] karşılıklı orantılı olduğundan $\frac{|BC|}{|RS|} = \frac{2}{3}$ olur.

ç) $\overset{\frown}{ABC} \sim \overset{\frown}{PRS}$ ifadesinde herhangi bir üçgenin iki köşesi yer değiştirirse diğer üçgenin de karşılıklı köşeleri yer değiştirir. Aksi hâlde benzerlik bozulur. Bu durumda $\overset{\frown}{ABC}$ yazıldığında C köşesini en sola alırsak $\overset{\frown}{PRS}$ yazıldığında da karşılıklı köşe olan S köşesi en sola geçer ve benzerlik bozulmaz. Bu durumda $\overset{\frown}{ABC} \sim \overset{\frown}{PRS} \Rightarrow \overset{\frown}{CAB} \sim \overset{\frown}{SPR}$ yazılabilir.

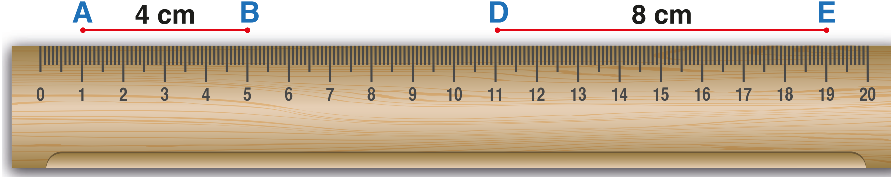
d) [AB] ile [PR] karşılıklı orantılı olduğundan
$\frac{|AB|}{|PR|} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3 \cdot |AB| = 2 \cdot |PR|$ olur.

Sonuç olarak a ve b maddeleri yanlış iken c, ç ve d maddeleri doğrudur.

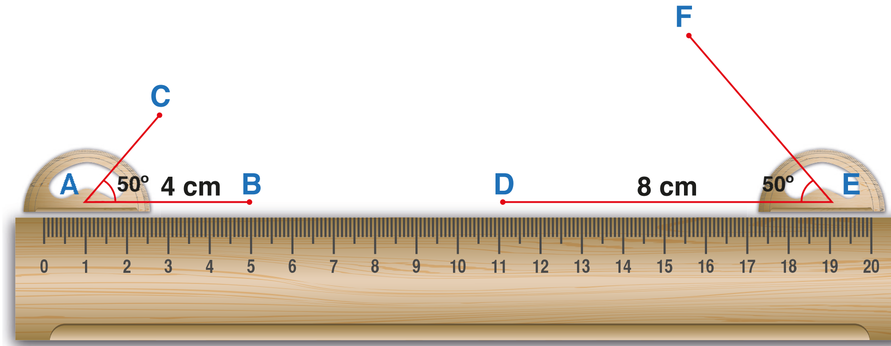


Ölçümler Yaparak Kenar - Açı - Kenar (K.A.K.) Benzerliği Oluşturma

Cetvel yardımıyla 4 cm uzunluğunda bir doğru parçası ve bu doğru parçasının 2 katı uzunluğunda 8 cm lik bir doğru parçası çizilir.

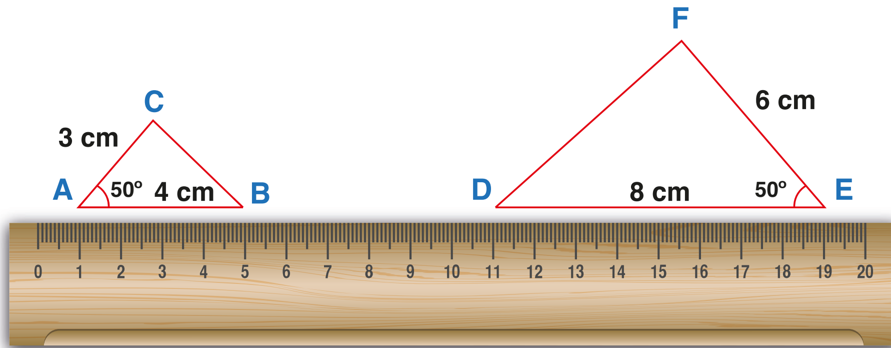


Açıölçerin merkezi A ve E noktalarına konur. A noktasındaki açıölçerin sağ tarafındaki 50° lik açıya bir doğru parçası, E noktasındaki açıölçerin sol tarafındaki 50° lik açıya bir doğru parçası çizilir. Çizilen bu doğru parçaları yardımıyla CAB ve FED açıları çizilmiş olur.



Açıların A ve E köşelerinden cetvel yardımıyla sırasıyla 3 cm ve 6 cm uzunluğunda iki doğru parçası çizilir.

Daha sonra aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi ABC ve DEF üçgenleri oluşturulur.

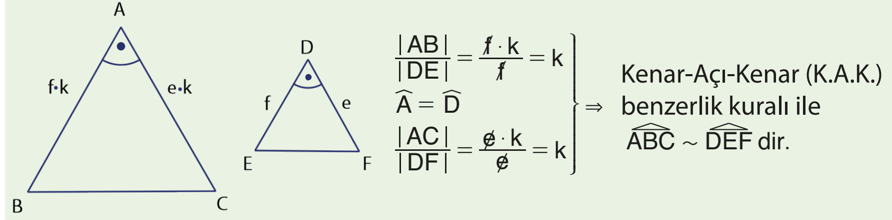


Cetvel kullanılarak |BC| ve |DF| ölçülürse $|DF| = 2 \cdot |BC|$ olduğu görülür. Buradan iki kenar uzunluğu birbiriyle orantılı ve bu kenarlar arasındaki açının eşit olduğu, ABC ve EDF üçgenlerinin benzer olduğu görülür.



Kenar - Açı - Kenar (K.A.K.) Benzerlik Kuralı

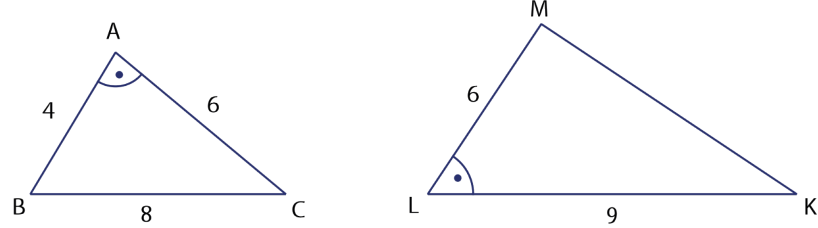
Karşılıklı iki kenar uzunluğu orantılı ve bu kenarların oluşturduğu açıları eş olan üçgenler benzer olur. Bu benzerliğe **Kenar — Açı — Kenar (K. A. K.) benzerlik kuralı** denir.



$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{|AB|}{|DE|}=\dfrac{\cancel{f}\cdot k}{\cancel{f}}=k\\ \widehat{A}=\widehat{D}\\ \dfrac{|AC|}{|DF|}=\dfrac{\cancel{e}\cdot k}{\cancel{e}}=k\end{array}\right\}\Rightarrow$$

Kenar-Açı-Kenar (K.A.K.) benzerlik kuralı ile $\widehat{ABC}\sim\widehat{DEF}$ dir.

ÖRNEK 11



|AC| = |ML| = 6 birim, 2 . |AB| = |BC| = 8 birim ve |LK| = 9 birim ise |MK| = x değerini bulunuz.

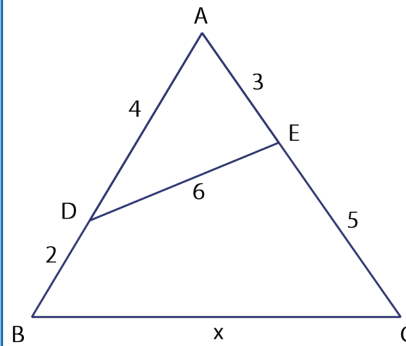
ÇÖZÜM

$\dfrac{|AB|}{|LM|}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3},\ \dfrac{|AC|}{|LK|}=\dfrac{6}{9}=\dfrac{2}{3}$ ve $m(\widehat{A})=m(\widehat{L})$ olduğundan K.A.K. benzerlik kuralına göre $\widehat{BAC}\sim\widehat{MLK}$ olur. Bu durumda

$$\frac{|AB|}{|LM|}=\frac{|BC|}{|MK|}\Rightarrow\frac{4}{6}=\frac{8}{x}\Rightarrow 4x=48$$

$$\Rightarrow x=12 \text{ olur.}$$

ÖRNEK 12



Şekilde |AD| = 4 birim, |DB| = 2 birim, 2 · |AE| = |DE|=6 birim ve |EC| = 5 birim ise |BC| = x değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Şekilde $\dfrac{|AE|}{|AB|}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$ ve $\dfrac{|AD|}{|AC|}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$ olduğundan $\dfrac{|AE|}{|AB|}=\dfrac{|AD|}{|AC|}=\dfrac{1}{2}$ olur.

$\widehat{A}$, $\widehat{ADE}$ ve $\widehat{ACB}$ nin ortak açısı olduğundan K. A. K. benzerlik kuralı gereği

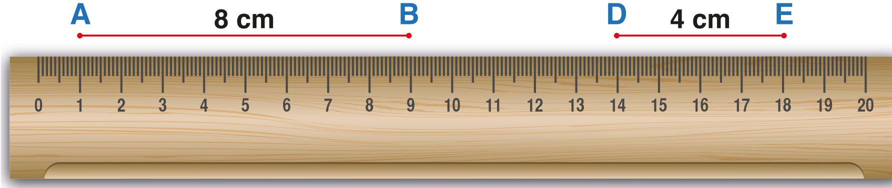
$\widehat{ADE}\sim\widehat{ACB}$ olur.

Bu durumda $\dfrac{|AE|}{|AB|}=\dfrac{|DE|}{|CB|}\Rightarrow\dfrac{3}{6}=\dfrac{6}{x}\Rightarrow 3x=36\Rightarrow x=12$ birim olur.

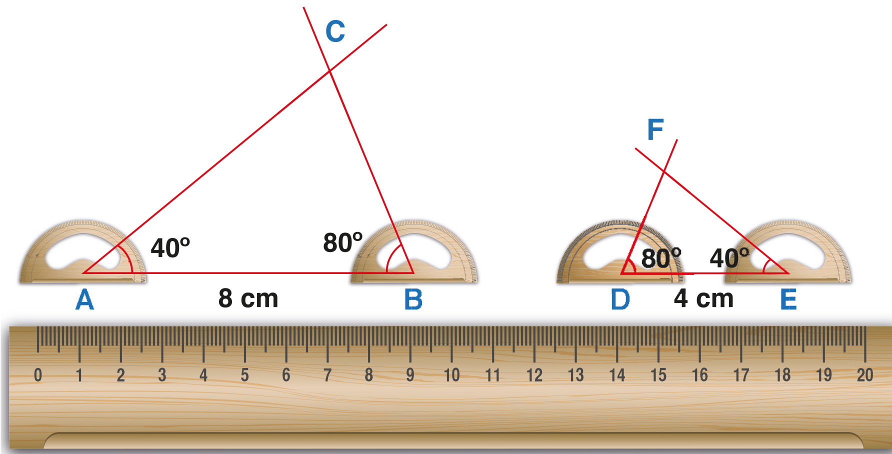


Ölçümler Yaparak Açı - Açı (A.A.) Benzerliği Oluşturma

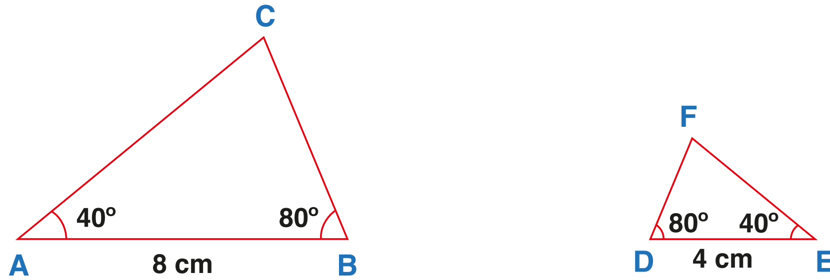
Cetvel yardımıyla uzunluğu 8 cm olan bir [AB] ile uzunluğu 4 cm olan bir [DE] çizilir. ($\frac{|AB|}{|DE|} = 2$ olduğuna dikkat ediniz.)



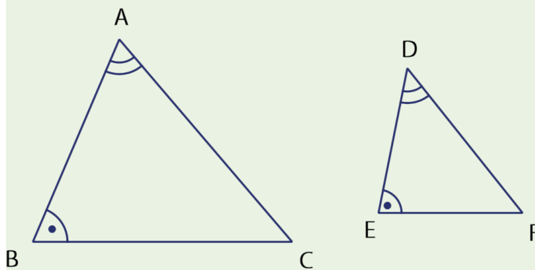
Açıölçer yardımıyla aşağıdaki gibi $m(\widehat{A}) = m(\widehat{E}) = 40^\circ$ ve $m(\widehat{B}) = m(\widehat{D}) = 80^\circ$ olacak şekilde açılar çizilerek ABC ve EDF üçgenleri oluşturulur.



Cetvel yardımıyla |AC|, |BC|, |DF| ve |EF| ölçülürse $\frac{|AC|}{|EF|} = \frac{|BC|}{|DF|} = 2$ olduğu görülür. Bu durumda ikişer açısı eşit olan ABC ve EDF üçgenleri benzer olur.



Açı - Açı (A.A) Benzerlik Kuralı



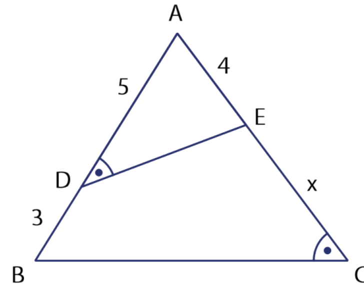
İki üçgen arasındaki bire bir eşlemede karşılıklı ikişer açının ölçüleri eşit ise bu üçgenlere **benzerdir** denir. Bu benzerliğe

Açı — Açı (A. A.) benzerlik kuralı denir.

$\left.\begin{array}{l}\widehat{A} = \widehat{D} \\ \widehat{B} = \widehat{E}\end{array}\right\} \Rightarrow$ Açı — Açı (A . A .) benzerlik kuralı ile $\overset{\frown}{ABC} \sim \overset{\frown}{DEF}$ olur.



ÖRNEK 13



Şekilde |AD| = 5 birim, |DB| = 3 birim, |AE| =4 birim ve $m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{ACB})$ ise |EC| = x değerini bulunuz.

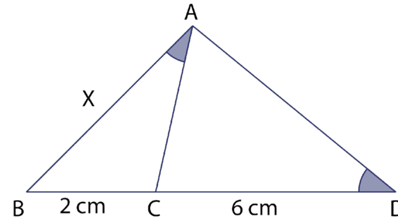
ÇÖZÜM

$\widehat{ADE}$ ile $\widehat{ACB}$ arasında bire bir eşleme yapılırsa

$$\left.\begin{array}{l} m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{ACB}) \\ m(\widehat{DAE}) = m(\widehat{CAB}) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Açı - Açı benzerlik kuralı gereği } \widehat{ADE} \sim \widehat{ACB} \text{ olur.}$$

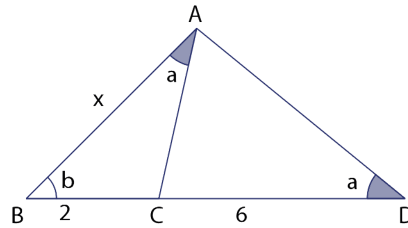
Bu durumda $\frac{|AE|}{|AB|} = \frac{|AD|}{|AC|} \Rightarrow \frac{4}{8} = \frac{5}{4+x} \Rightarrow 16 + 4x = 40 \Rightarrow 4x = 24 \Rightarrow x = 6$ birim olur.

ÖRNEK 14



Şekilde $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{ADB})$, $|BC| = 2$ cm ve |CD| = 6 cm ise |AB| = x değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

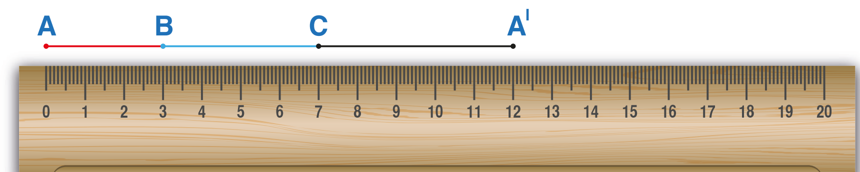


$m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{ADB}) = a$ ve $m(\widehat{ABC}) = b$ denirse $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{DBA})$ olduğundan Açı - Açı (A.A.) benzerlik kuralı ile $\widehat{ABC} \sim \widehat{DBA}$ olur.

Bu durumda $\frac{|AB|}{|DB|} = \frac{|BC|}{|BA|} \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{2}{x} \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$ cm olur.

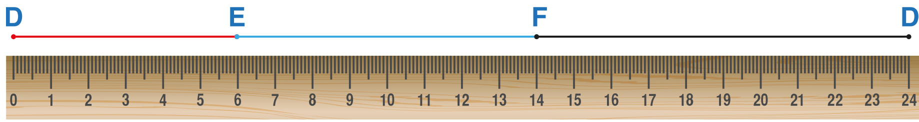
Ölçümler Yaparak Kenar - Kenar - Kenar (K.K.K.) Benzerliği Oluşturma

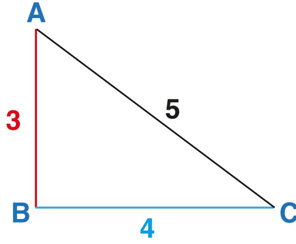
Cetvel yardımıyla uzunlukları 3 cm, 4 cm ve 5 cm olacak şekilde üç tane doğru parçası çizilir.

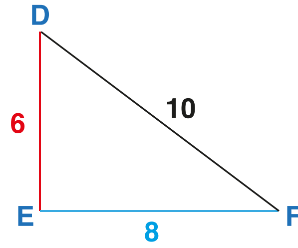


Cetvel yardımıyla uzunlukları 6 cm, 8 cm ve 10 cm olacak şekilde üç tane daha doğru parçası çizilir.





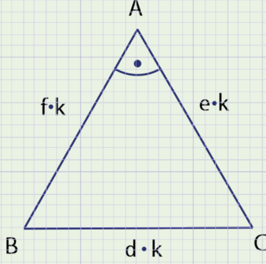


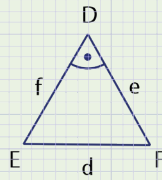


[AB], [BC] ve [CA′] uç uca eklenerek ABC üçgeni oluşturulur. Aynı şekilde [DE], [EF] ve [FD′] uç uca eklenerek DEF üçgeni oluşturulur. Üçgenlere bakıldığında $\frac{|AB|}{|DE|}=\frac{|BC|}{|EF|}=\frac{|CA|}{|FD|}=\frac{1}{2}$ olduğu görülür. Buradan karşılıklı kenarları orantılı olan ABC ve DEF üçgenleri benzer olur. Bu durumda karşılıklı üç kenar uzunluğu da birbirleriyle orantılı olan herhangi iki üçgen benzer olur.

Kenar - Kenar - Kenar (K.K.K.) Benzerlik Kuralı

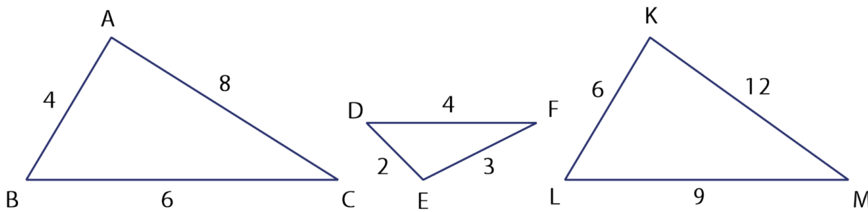
Köşeleri arasında yapılan bire bir eşlemede karşılıklı kenar uzunlukları orantılı olan üçgenler benzer olur. Bu benzerliğe **Kenar - Kenar - Kenar (K. K. K.) benzerlik kuralı** denir.





Yandaki şekilde $\frac{|AB|}{|DE|}=\frac{|BC|}{|EF|}=\frac{|AC|}{|DF|}=k$ olduğundan Kenar − Kenar − Kenar (K.K.K.) benzerlik kuralı ile $\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$ olur.

ÖRNEK 15



Yukarıdaki üçgenlerden hangilerinin benzer olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

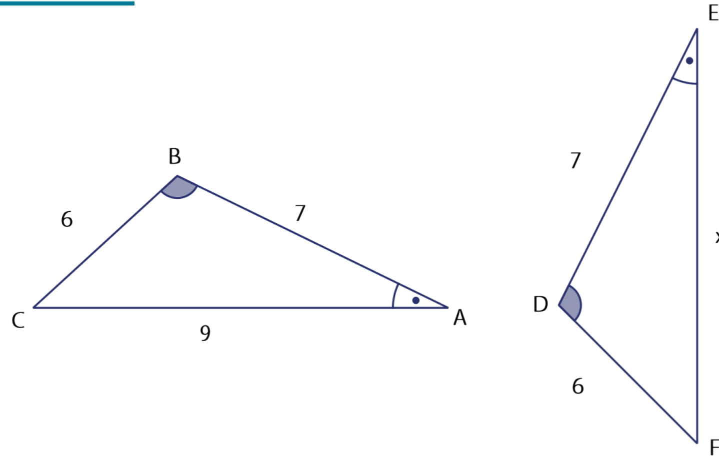
$\widehat{ABC}$ ile $\widehat{DEF}$ nin kenar uzunlukları oranı $\frac{|AB|}{|DE|}=\frac{|BC|}{|EF|}=\frac{|AC|}{|DF|}=2$ olduğundan K.K.K benzerlik kuralı ile $\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$ dir

$\widehat{ABC}$ ile $\widehat{KLM}$ nin kenar uzunlukları oranı $\frac{|AB|}{|KL|}=\frac{|BC|}{|LM|}=\frac{|AC|}{|KM|}=\frac{2}{3}$ olduğundan K. K. K. benzerlik kuralı ile $\widehat{ABC} \sim \widehat{KLM}$ olur.

$\widehat{ABC}$, $\widehat{DEF}$ ve $\widehat{KLM}$ ile benzer olduğundan $\widehat{DEF} \sim \widehat{KLM}$ olur.



ÖRNEK 16



Yukarıdaki üçgenlerin

a) Benzer olup olmadıklarını bulunuz.

b) Eş olup olmadıklarını bulunuz.

c) Eşlik ile benzerlik arasında nasıl bir ilişki olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

a) Üçgenlerin ikişer açıları eşit olduğundan A. A. benzerliği ile $\widehat{ABC} \sim \widehat{EDF}$ olur.

Buradan $\frac{|AB|}{|ED|} = \frac{|AC|}{|EF|} = \frac{|BC|}{|DF|} = k \Rightarrow \frac{7}{7} = \frac{9}{x} = \frac{6}{6} = k \Rightarrow x = 9$ ve $k = 1$ olur.

b) $k = 1$ olduğundan $\left.\begin{matrix} |AB| = |ED| \\ |AC| = |EF| \\ |BC| = |DF| \end{matrix}\right\} \Rightarrow \widehat{ABC} \cong \widehat{EDF}$ olur. (K . K . K. eşlik kuralı).

c) $\widehat{ABC}$ ile $\widehat{EDF}$ üçgenleri benzerlik oranı $k = 1$ olduğu için hem eş hem de benzer üçgenlerdir. O hâlde

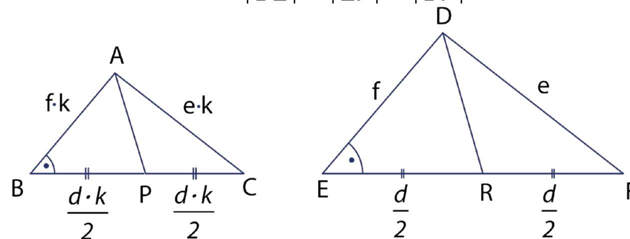
- Benzerlik oranı $k = 1$ olan üçgenler aynı zamanda eştir.
- Eş üçgenler aynı zamanda benzerdir.
- Benzer üçgenler eş olmayabilir.

Benzer üçgenlerin karşılıklı yardımcı elemanları da aynı benzerlik oranına sahiptir.

Bu özelliğin doğruluğu aşağıdaki gibi yapılabilir.

$\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$ alınırsa ve $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|AC|}{|DF|} = k$ olsun.

I.



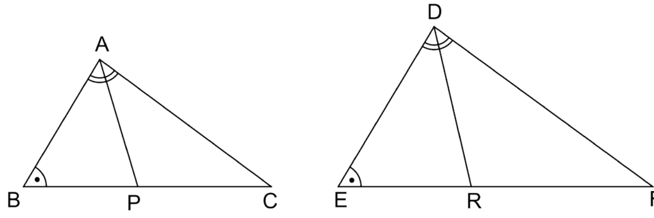
A ve D köşelerinden [AP] ve [DR] kenarortayları çizilsin. $\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$ olduğundan $\widehat{B} = \widehat{E}$ olur. K. A. K. benzerliği ile $\widehat{ABP} \sim \widehat{DER}$ elde edilir.

Buradan $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BP|}{|ER|} = \frac{|AP|}{|DR|} = k$ bulunur.

$\frac{|AP|}{|DR|} = k$ olduğu için benzer üçgenlerin karşılıklı kenarortaylarının uzunlukları benzerlik oranına eşittir.



II.

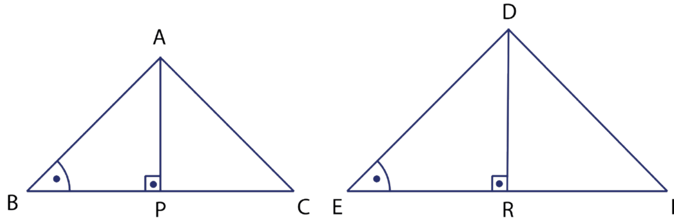


A ve D köşelerinden [AP] ve [DR] açıortayları çizilsin.
$m(\widehat{ABP}) = m(\widehat{DER})$ ve $m(\widehat{BAP}) = m(\widehat{EDR})$ olduğundan A.A. benzerliği ile $\widehat{BAP} \sim \widehat{EDR}$ olur.

Buradan $\frac{|BA|}{|ED|} = \frac{|AP|}{|DR|} = \frac{|BP|}{|ER|} = k$ bulunur.

$\frac{|AP|}{|DR|} = k$ olduğu için benzer üçgenlerin karşılıklı açıortaylarının uzunlukları oranı benzerlik oranına eşittir

III.



$\widehat{A} = \widehat{D}$ olduğundan A ve D köşelerinden [AP] ve [DR] yükseklikleri indirilir. Bu durumda $\widehat{B} = \widehat{E}$ olduğundan A.A. benzerliği ile $\widehat{ABP} \sim \widehat{DER}$ olur.

Buradan $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BP|}{|ER|} = \frac{|AP|}{|DR|} = k$ bulunur.

$\frac{|AP|}{|DR|} = k$ olduğu için benzer üçgenlerin karşılıklı yüksekliklerinin oranı benzerlik oranına eşittir.

Benzer üçgenlerin çevreleri oranı benzerlik oranına eşittir.

Bu özelliğin doğruluğu aşağıdaki gibi yapılabilir.

$\widehat{ABC}$ ile $\widehat{DEF}$ benzer üçgenler ise

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|AC|}{|DF|} = k \Rightarrow \frac{|AB|+|BC|+|AC|}{|DE|+|EF|+|DF|} = k \Rightarrow \frac{Ç(\widehat{ABC})}{Ç(\widehat{DEF})} = k \text{ olur.}$$

ÖRNEK 17

Benzerlik oranı $\frac{2}{5}$ olan iki üçgenden küçük olan üçgenin çevresi 36 cm ise büyük olan üçgenin çevresinin kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Benzerlik oranı $\frac{2}{5} \Rightarrow \frac{Ç(\widehat{ABC})}{Ç(\widehat{DEF})} = \frac{2}{5}$ olacak şekilde $\widehat{ABC}$ ile $\widehat{DEF}$ seçilir.

Bu durumda küçük olan üçgen $\widehat{ABC}$ ve büyük olan üçgen ise $\widehat{DEF}$ olur.

Dolayısıyla $\frac{36}{Ç(\widehat{DEF})} = \frac{2}{5} \Rightarrow Ç(\widehat{DEF}) = 90\text{ cm}$ olur.



ÖRNEK 18

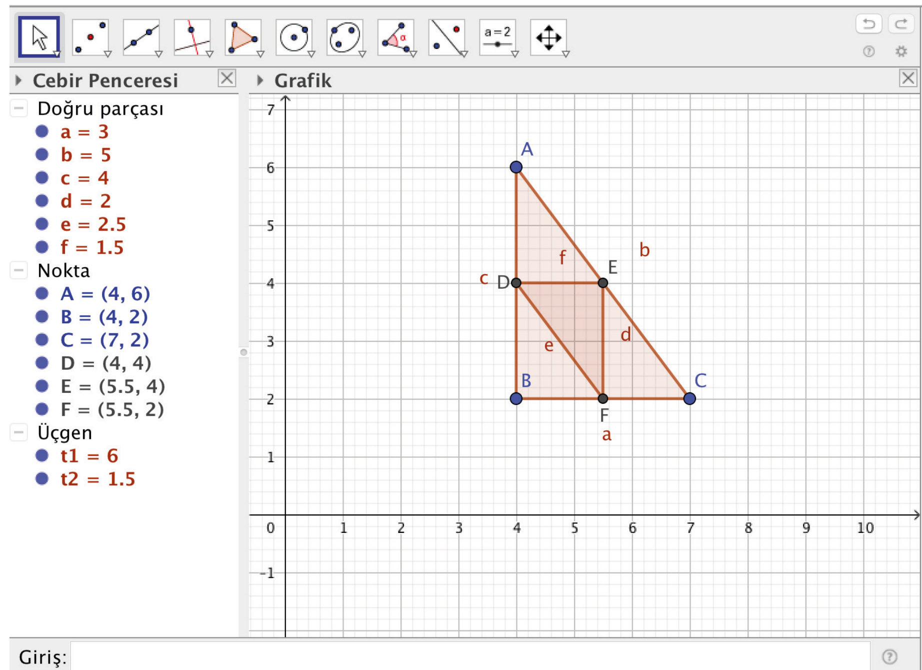
Bir $\widehat{ABC}$ nin kenarlarının orta noktaları alınarak $\widehat{DEF}$ oluşturuluyor.

$\dfrac{Ç(\widehat{ABC})}{Ç(\widehat{DEF})}$ oranını GeoGebra programını kullanarak bulunuz.

ÇÖZÜM

GeoGebra programını açınız. Araç çubuğundaki 5. kutuya ve ardından açılan "Çokgen" sekmesine tıklayınız. Grafik penceresinde üçgen oluşacak şekilde üç farklı noktaya tıklayınız ve ardından ilk tıkladığınız noktaya tekrar tıklayınız. Daha sonra araç çubuğundaki 2. kutuya ve ardından açılan "Orta nokta veya merkez" sekmesine tıklayınız. Ardından üçgenin kenarlarına tıklayarak her bir kenarın orta noktasını belirleyiniz ve bu noktalarla bir üçgen oluşturunuz. Aşağıdaki görselde önce ABC üçgeni sonra ABC üçgeninin kenarlarının orta noktaları ile DEF üçgeni çizilmiştir.

Cebir penceresindeki kenar uzunlukları ile



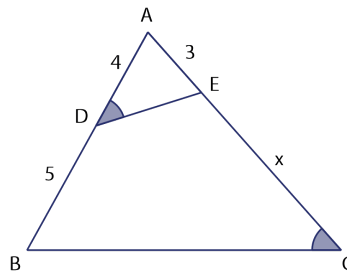
$Ç(\widehat{ABC}) = a + b + c = 3 + 5 + 4 = 12$ birim olur. Benzer şekilde

$Ç(\widehat{DEF}) = d + e + f = 2 + 2{,}5 + 1{,}5 = 6$ birim olur. Buradan

$\dfrac{Ç(\widehat{ABC})}{Ç(\widehat{DEF})} = \dfrac{12}{6} = 2$ bulunur.

ALIŞTIRMALAR

1.

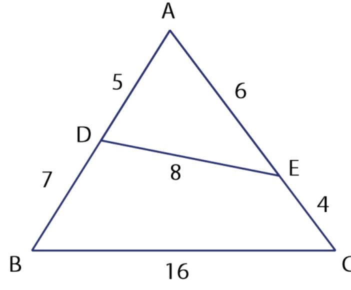


Yandaki şekilde

$|AE| = 3$ birim, $|AD| = 4$ birim, $|BD| = 5$ birim ve $m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{ACB})$ ise $|EC| = x$ değerini bulunuz.



2.



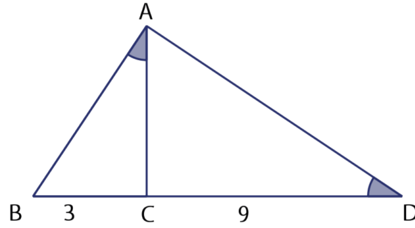
Yandaki şekilde verilenlere göre aşağıdakilerden hangilerinin doğru ya da yanlış olduğunu belirtiniz.

I. K.K.K. benzerlik kuralı ile $\widehat{ADE} \sim \widehat{ACB}$ dir.

II. $\widehat{ACB}$ nin $\widehat{ADE}$ ne benzerlik oranı $\frac{1}{2}$ dir.

III. $\widehat{ADE}$ nde $[AE]$ na ait kenarortay uzunluğunun $\widehat{ACB}$ ndeki $[AB]$ na ait kenarortay uzunluğuna oranı $\frac{1}{2}$ olur.

3.

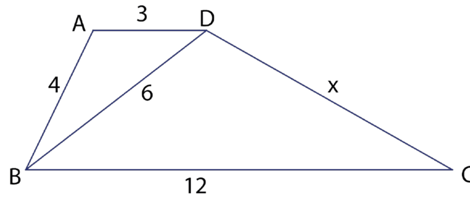


Yandaki şekilde

$m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{ADC})$

$|BC| = 3$ birim ve $|CD| = 9$ birim ise $|AB|$ nu bulunuz.

4.



Yandaki şekilde $[AD] \parallel [BC]$,

$|AD| = 3$ birim,

$|BC| = 12$ birim,

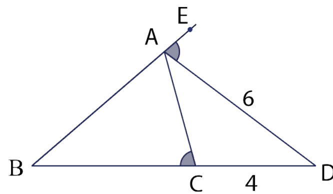
$|AB| = 4$ birim ve

$|BD| = 6$ birim ise

$|DC| = x$ değerini bulunuz.

5. $\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$ olmak üzere $2 \cdot |AB| = 3 \cdot |DE|$ veriliyor. $\widehat{B}$ nın açıortay uzunluğu 12 birim ise $\widehat{E}$ nın açıortay uzunluğunun kaç birim olduğunu bulunuz.

6.



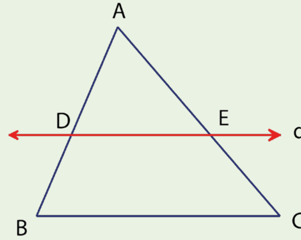
Yandaki şekilde $m(\widehat{DAE}) = m(\widehat{ACB})$ $|AD| = 6$ birim ve $|CD| = 4$ birim ise $|BC|$ nun kaç birim olduğunu bulunuz.



9.4.2.3. Üçgenin Bir Kenarına Paralel ve Diğer İki Kenarı Kesecek Şekilde Çizilen Doğrunun Ayırdığı Doğru Parçaları

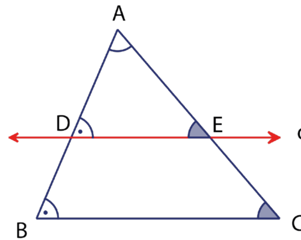
Temel Orantı Teoremi

Bir üçgenin bir kenarına paralel olan ve diğer iki kenarı farklı noktalarda kesen doğru, kestiği kenarlar üzerinde orantılı parçalar oluşturur.



Şekilde d // [BC] ise $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|EC|}$ olur.

Bu özelliğin doğruluğu aşağıdaki gibi yapılabilir.



d // [BC] olduğundan

$m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{ABC})$ ve $m(\widehat{AED}) = m(\widehat{ACB})$ olur.

Bu durumda A.A benzerliği ile $\widehat{ADE} \sim \widehat{ABC}$ olur.

Şekilde

$|AB| = |AD| + |DB|$ ve $|AC| = |AE| + |EC|$ olur.

Bu eşitlikler benzerlikte yerine yazılırsa

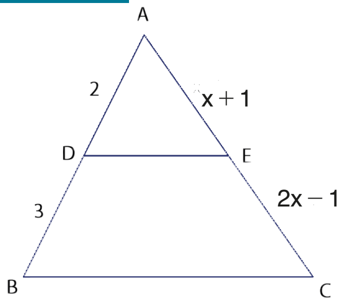
$\widehat{ADE} \sim \widehat{ABC}$ ise

$\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|AE|}{|AC|} \Rightarrow \frac{|AD|}{|AD|+|DB|} = \frac{|AE|}{|AE|+|EC|} \Rightarrow \frac{|AD|+|DB|}{|AD|} = \frac{|AE|+|EC|}{|AE|}$

$\frac{|AD|}{|AD|} + \frac{|DB|}{|AD|} = \frac{|AE|}{|AE|} + \frac{|EC|}{|AE|} \Rightarrow 1 + \frac{|DB|}{|AD|} = 1 + \frac{|EC|}{|AE|}$

$\frac{|DB|}{|AD|} = \frac{|EC|}{|AE|} \Rightarrow \frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|EC|}$ olur.

ÖRNEK 19



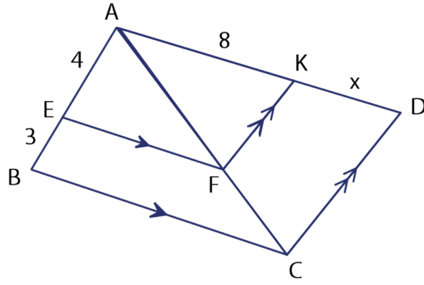
Şekilde $[DE] // [BC]$, $|AD| = 2$ birim, $|BD| = 3$ birim, $|AE| = (x + 1)$ birim ve $|EC| = (2x - 1)$ birim ise x değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$[DE] // [BC]$ olduğundan temel orantı teoremi kullanılırsa

$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|EC|} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{x+1}{2x-1} \Rightarrow 4x - 2 = 3x + 3 \Rightarrow x = 5$ birim olur.

ÖRNEK 20



Şekilde [EF] // [BC] ve [FK] // [CD] dir.

|AE| = 4 birim, |EB| = 3 birim ve |AK| = 8 birim ise |KD| = x değerini bulunuz.

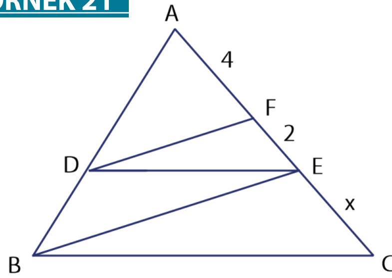
ÇÖZÜM

I. [EF] // [BC] olduğundan $\widehat{ABC}$ nde $\frac{|AE|}{|EB|} = \frac{|AF|}{|FC|} \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{|AF|}{|FC|}$ olur.

II. [FK] // [CD] olduğundan $\widehat{ACD}$ nde $\frac{|AF|}{|FC|} = \frac{|AK|}{|KD|} \Rightarrow \frac{|AF|}{|FC|} = \frac{8}{x}$ olur.

I ve II den $\frac{4}{3} = \frac{8}{x} \Rightarrow 4x = 24 \Rightarrow x = 6$ birim olur.

ÖRNEK 21



$\widehat{ABC}$ nde [DE] // [BC] ve

$\widehat{ABE}$ nde [DF] // [BE] dir.

|AF| = 2 · |FE| = 4 birim ise

|EC| = x değerini bulunuz.

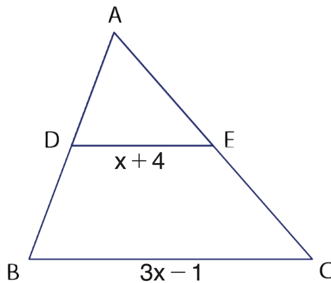
ÇÖZÜM

$\widehat{ABE}$ nde [DF] // [BE] $\Rightarrow \frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AF|}{|FE|} \Rightarrow \frac{|AD|}{|DB|} = \frac{4}{2}$ olur.

$\widehat{ABC}$ nde [DE] // [BC] $\Rightarrow \frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|EC|} \Rightarrow \frac{|AD|}{|DB|} = \frac{6}{x}$ olur.

Bu durumda $\frac{4}{2} = \frac{6}{x} \Rightarrow 4x = 12 \Rightarrow x = 3$ birim olur.

ÖRNEK 22



[DE] // [BC] olmak üzere

|AD| = |DB| ve |AE| = |EC| dur.

|DE| = (x + 4) birim ve |BC| = (3x − 1) birim ise

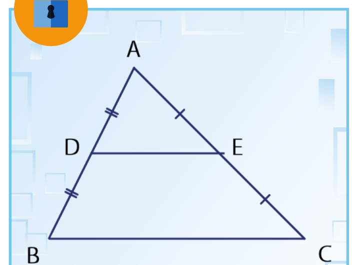
x değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

|AD| = |DB| ve |AE| = |EC| olduğundan [DE], $\widehat{ABC}$ nin orta tabanıdır.

Dolayısıyla $|DE| = \frac{|BC|}{2} \Rightarrow x + 4 = \frac{3x - 1}{2} \Rightarrow 2x + 8 = 3x - 1 \Rightarrow x = 9$ birim olur.





Bir üçgenin iki kenarının orta noktalarını birleştiren doğru parçası üçgenin diğer kenarına paralel olur. Bu doğru parçasına üçgenin **orta tabanı** denir.

Şekilde

|AD| = |DB| ve

|AE| = |EC| ise

$|DE| = \frac{|BC|}{2}$ olur.

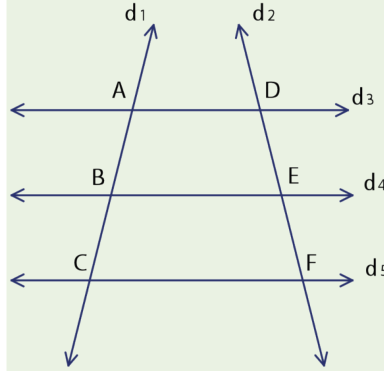
Thales'in Çalışmaları

Miletli Thales (Tales) Sokrates (Sokrat) öncesi dönemde yaşamış olan Anadolulu bir düşünürdür. Doğum yeri olan Milet, Menderes Deltası'nda olup bugünkü Aydın ilimiz sınırları içindedir. Adı bilinen ilk filozof olduğu için felsefenin ve bilimin öncüsü olarak adlandırılır.

Matematik alanında çığır açmış bir bilim insanıdır. Eski Yunan bilginlerinden Kallimakhos'un (Gayyimagos) aktardığı bir düşünceye göre denizcilere kuzey takım yıldızlarından Büyükayı yerine Küçükayı'ya bakarak yön bulmalarını öğütlemiştir. Aynı zamanda Mısırlılardan geometriyi öğrenip Yunanlılara tanıtmıştır. Bulduğu bazı geometri teoremleri şunlardır

- Çap çemberi iki eş parçaya böler.
- Bir ikizkenar üçgenin taban açılarının ölçüleri birbirine eşittir.
- İki doğrunun kesişme noktasındaki ters açılarının ölçüleri birbirine eşittir.
- Köşesi çember üzerinde olan ve çapı gören açı, dik açıdır.
- Tabanı ve buna komşu iki açısı verilen üçgen çizilebilir.

Thales Teoremi

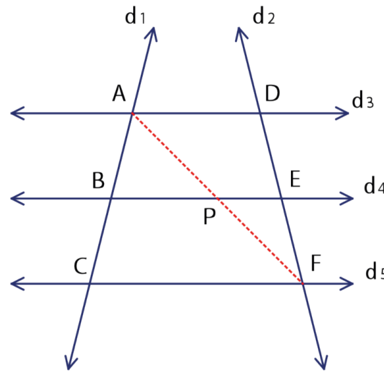


Birbirine paralel en az üç doğru farklı iki kesen üzerinde orantılı doğru parçaları oluşturur. Şekilde $d_3 \parallel d_4 \parallel d_5$ ise

$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|EF|}$ olur.

Bu özelliğin doğruluğu aşağıdaki gibi yapılabilir.

A noktası ile F noktasını birleştiren doğrunun [BE] nı kestiği noktaya P denirse

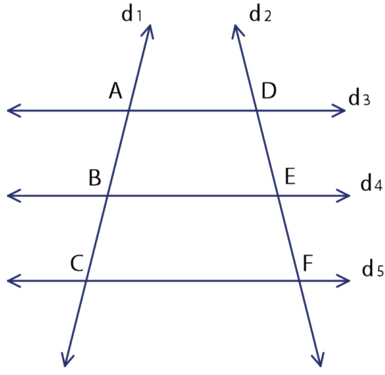


$\widehat{ADF}$ nde temel orantı teoremi ile $\frac{|AP|}{|PF|} = \frac{|DE|}{|EF|}$ olur.

$\widehat{ACF}$ nde temel orantı teoremi ile $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AP|}{|PF|}$ olur.

Yukarıdaki ifadeler kullanılarak $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|EF|}$ olur.

ÖRNEK 23



Şekilde $d_3 \parallel d_4 \parallel d_5$ olmak üzere

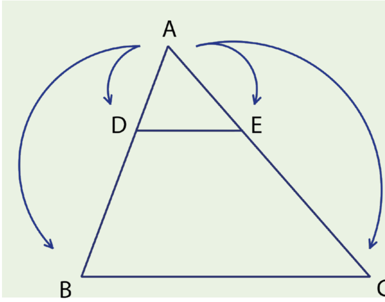
$3 \cdot |AB| = 2 \cdot |BC|$ ve $|DE| = 8$ cm ise

$|EF|$ nu bulunuz.

ÇÖZÜM

$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{2}{3}$ eşitliği Thales teoreminde uygulanırsa

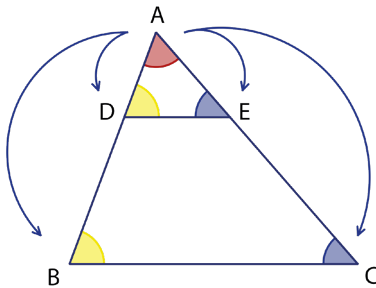
$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|EF|} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{|DE|}{|EF|} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{8}{|EF|} \Rightarrow |EF| = 12$ cm olur.



Şekilde $[DE] \parallel [BC]$ ise

$\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|DE|}{|BC|}$ olur.

Bu özelliğin doğruluğu aşağıdaki gibi yapılabilir.

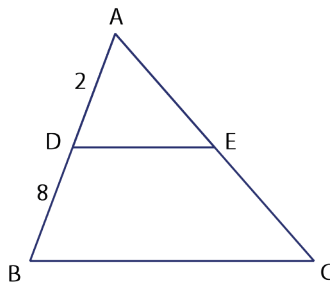


A . A . benzerlik kuralı ile

$\widehat{ADE} \sim \widehat{ABC}$ olduğundan

$\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|DE|}{|BC|}$ olur.

ÖRNEK 24



Şekilde $|AD| = 2$ birim ve $|DB| = 8$ birimdir.

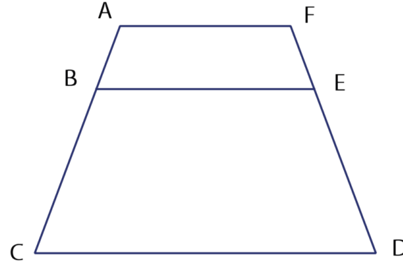
$[DE] \parallel [BC]$ ise $\frac{|DE|}{|BC|}$ oranını bulunuz.

ÇÖZÜM

$[DE] \parallel [BC]$ olduğundan $\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|DE|}{|BC|} \Rightarrow \frac{2}{10} = \frac{|DE|}{|BC|} \Rightarrow \frac{|DE|}{|BC|} = \frac{1}{5}$ olur.



ÖRNEK 25



Şekilde [AF] // [BE] // [CD] dir.

$|BC| = 3 \cdot |AB|$,

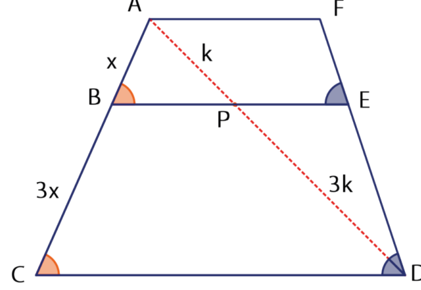
$|AF| = 6$ birim

ve $|CD| = 22$ birim

ise $|BE|$ nu bulunuz.

ÇÖZÜM

A ve D noktaları birleştirilir ve [AD] nın [BE] nı kestiği noktaya P denirse



$\widehat{ACD}$ için temel orantı teoremi ile

$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AP|}{|PD|} \Rightarrow \frac{x}{3x} = \frac{|AP|}{|PD|} \Rightarrow \frac{|AP|}{|PD|} = \frac{1}{3}$ olur.

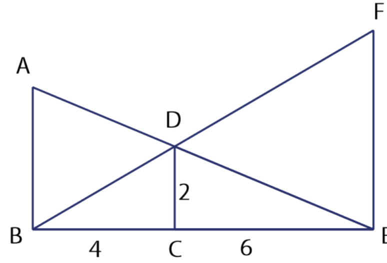
Bu durumda |AP| = k ve |PD| = 3k denirse

$\widehat{ACD}$ için $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BP|}{|CD|} \Rightarrow \frac{x}{4x} = \frac{|BP|}{22} \Rightarrow |BP| = \frac{11}{2}$ olur.

$\widehat{DFA}$ için $\frac{|DP|}{|DA|} = \frac{|PE|}{|AF|} \Rightarrow \frac{3k}{4k} = \frac{|PE|}{6} \Rightarrow |PE| = \frac{9}{2}$ olur.

Sonuç olarak $|BE| = |BP| + |PE| = \frac{11}{2} + \frac{9}{2} = 10$ birim olur.

ÖRNEK 26



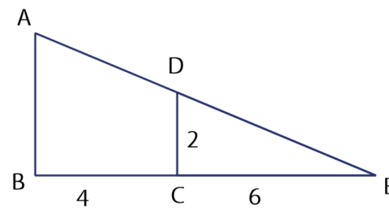
Şekilde [AB] // [DC] // [FE] dir.

$|BC| = 4$ birim, $|CE| = 6$ birim ve

$|DC| = 2$ birim ise

$|AB| + |EF|$ değerini bulunuz.

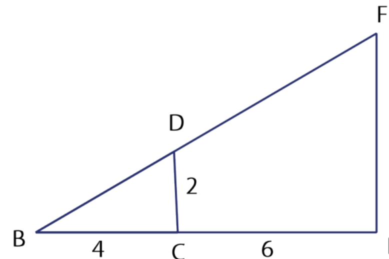
ÇÖZÜM



[DC] // [AB] olduğundan $\widehat{ABE}$ için

$\frac{|EC|}{|EB|} = \frac{|DC|}{|AB|}$

$\frac{6}{10} = \frac{2}{|AB|} \Rightarrow 6 \cdot |AB| = 20 \Rightarrow |AB| = \frac{10}{3}$ olur.



[DC] // [EF] olduğundan $\widehat{BEF}$ için

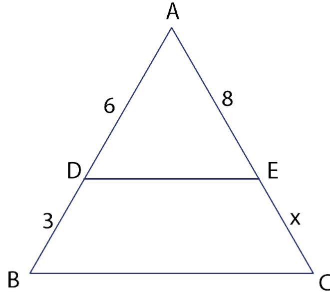
$\frac{|BC|}{|BE|} = \frac{|CD|}{|EF|}$

$\frac{4}{10} = \frac{2}{|EF|} \Rightarrow 4 \cdot |EF| = 20 \Rightarrow |EF| = 5$ olur.

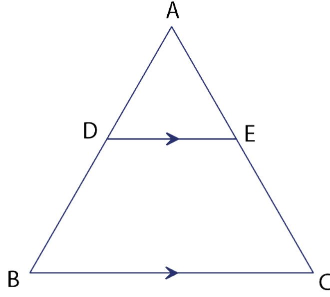
$|AB| + |EF| = \frac{10}{3} + 5 = \frac{25}{3}$ olur.



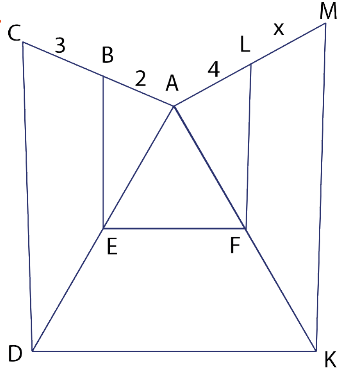
ALIŞTIRMALAR

1. 

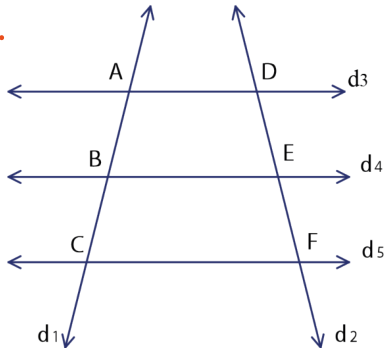
$[DE] \mathbin{/\!/} [BC]$ ise yandaki şekilde verilenlere göre $|EC| = x$ değerini bulunuz.

2. 

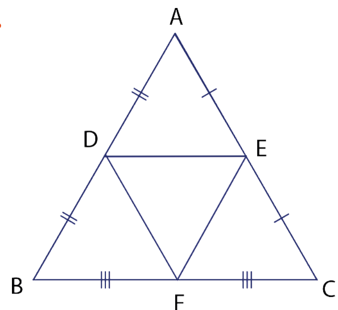
Yandaki şekilde $[DE] \mathbin{/\!/} [BC]$ olmak üzere $3 \cdot |DE| = |BC|$ ve $|AE| = 4$ birim ise $|CE| = x$ değerini bulunuz.

3. 

Yandaki şekilde $[BE] \mathbin{/\!/} [CD]$, $[EF] \mathbin{/\!/} [DK]$ ve $[FL] \mathbin{/\!/} [KM]$ ise $|LM| = x$ değerini bulunuz.

4. 

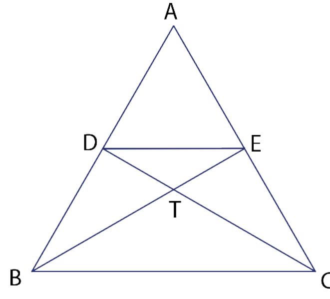
Yandaki şekilde $d_3 \mathbin{/\!/} d_4 \mathbin{/\!/} d_5$ dir. $|AB| = (x + 2)$ birim, $|BC| = (2x + 4)$ birim ve $|DE| = 4$ birim ise $|EF| = x$ değerini bulunuz.

5. 

Yandaki şekilde D, E, F bulundukları kenarların orta noktaları olmak üzere $Ç(\widehat{DEF}) = 15$ birim ise $Ç(\widehat{ABC})$ kaç birim olduğunu bulunuz.

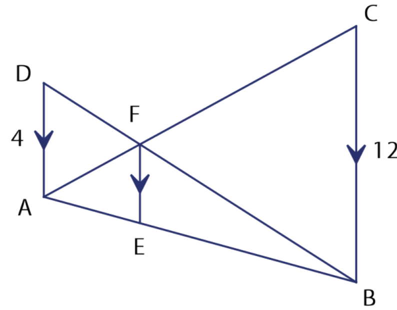


6.



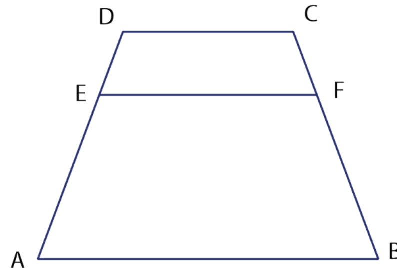
Yandaki şekilde [DE] // [BC], $2 \cdot |DT| = |TC|$ ve $|AD| = 5$ birim ise $|DB|$ nu bulunuz.

7.



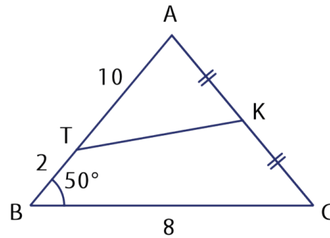
Yandaki şekilde [AD] // [EF] // [BC] olmak üzere $|AD| = 4$ birim ve $|BC| = 12$ birim ise $|EF|$ nu bulunuz.

8.



Yandaki şekilde [DC] // [EF] // [AB], $4 \cdot |DE| = |AD|$ ve $|CF| = 15$ birim ise $|BC|$ nun kaç birim olduğunu bulunuz.

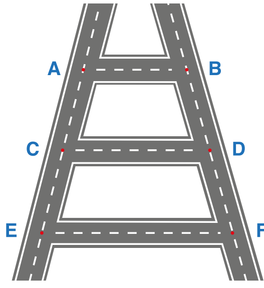
9.



Yandaki şekilde $|AK| = |KC|$, $|AT| = 10$ birim, $|TB| = 2$ birim ve $|BC| = 8$ birim ise $m(\widehat{ATK})$ nü bulunuz.

9.4.2.4. Üçgenlerin Benzerliği ile İlgili Problemler

ÖRNEK 27

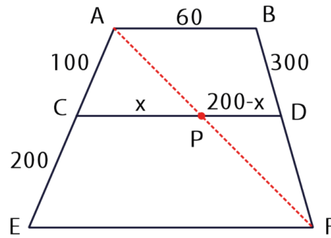


Bir semtin belirli bir bölgesindeki yol haritası şekildeki gibidir. Yatay yollar birbirine paralel olmak üzere |AB| = 60 m, |AC| = 100 m, |EC| = |CD|=200 m ve |BD| = 300 m dir.

D noktasında bulunan bir sürücü sırasıyla F, E ve sonra da C noktasına gidiyor. Bu sürücünün gittiği yolun toplam kaç metre olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Yol görseli geometrik olarak aşağıdaki gibi çizilirse



Yatay yollar birbirine paralel olarak verildiğinden [AB] ⫽ [CD] ⫽ [EF] olur. Temel orantı teoremi yardımı ile

$$\frac{|AC|}{|CE|} = \frac{|BD|}{|DF|} \Rightarrow \frac{100}{200} = \frac{300}{|DF|} \Rightarrow |DF| = 600 \text{ m olur.}$$

A ile F noktalarını birleştirerek [AF] nı oluşturunuz. [AF] nın [CD] nı kestiği noktaya P denirse |CP| = x ve |PD| = 200 − x yazılabilir.

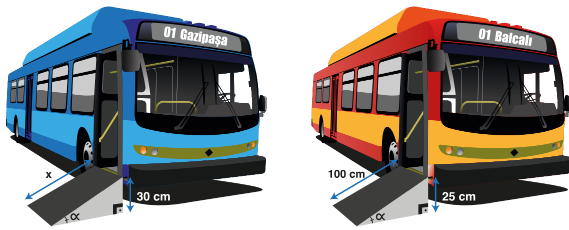
$$\widehat{FBA} \text{ için } \frac{|FD|}{|FB|} = \frac{|PD|}{|AB|} \Rightarrow \frac{600}{900} = \frac{200 - x}{60} \Rightarrow 200 - x = 40 \Rightarrow x = 160 \text{ m olur.}$$

$$\widehat{AEF} \text{ için } \frac{|AC|}{|AE|} = \frac{|CP|}{|EF|} \Rightarrow \frac{100}{300} = \frac{x}{|EF|} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{160}{|EF|} \Rightarrow |EF| = 480 \text{ m olur.}$$

Sonuç olarak D noktasından yola çıkan bir sürücü C ye kadar

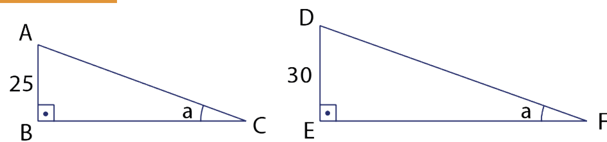
|DF| + |FE| + |EC| = 600 m + 480 m + 200 m = 1280 m yol gitmiş olur.

ÖRNEK 28



Bir firma yerden yüksekliği 25 cm olan otobüsler için uzunluğu 100 cm olan engelli rampaları üretmektedir. Bu firma yeni gelen otobüslerin yerden yüksekliğinin 30 cm olduğunu görmüş ve otobüse takılacak engelli rampalarının zeminle yaptığı açının ölçüsünün önceki otobüslere takılan engelli rampalarının zeminle yaptığı açının ölçüsüne eşit olmasını istemiştir. Yeni yapılacak engelli rampalarının uzunluğunun kaç cm olacağını bulunuz.

ÇÖZÜM



A.A. benzerliği ile $\widehat{BCA} \sim \widehat{EFD}$ olduğundan

$$\frac{|CA|}{|FD|} = \frac{|BA|}{|ED|} \Rightarrow \frac{100}{x} = \frac{25}{30} \Rightarrow x = 120 \text{ cm}$$

Bu durumda yapılacak olan yeni rampanın uzunluğu 120 cm olmalıdır.

ÖRNEK29

Yüksekliği 5 metre olan bir duvara dayanmış merdivenin uzunluğu 13 metredir. Duvara dayalı ucu B noktasında olan merdivenin bu ucu A noktasına kaldırılıyor. İkinci durumda duvar ile arasındaki açı, ilk durumdaki zemin ile merdiven arasındaki açıya eşit olan bu merdivenin ucunun kaç metre yukarı kaldırılmış olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

|DB| = |AC| = 13 m dir. Ayrıca Pisagor bağıntısı ile |OD|=12 m olur.

İkinci durumda duvar ile arasındaki açı, ilk durumdaki zemin ile merdiven arasındaki açının ölçüsüne eşit verildiğinden

$m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{CDB}) = a$ ve

$m(\widehat{OBD}) = m(\widehat{OCA}) = b$ alınırsa

A.K.A. eşliği ile $\widehat{OBD} \cong \widehat{OCA}$ olur.

Dolayısıyla $|OD| = |OA| = 12$ m olur.

$|OA| = |OB| + |BA| = 12 \text{ m} \Rightarrow 5 + |BA| = 12$ m

$\Rightarrow \quad |BA| = 7$ m olur.

Sonuç olarak merdivenin duvardaki ucu 7 metre yukarı kaldırılmıştır.

ÖRNEK 30

Dikdörtgen şeklindeki bir bilardo masasında A noktasında duran topa vurulduğunda topun izlediği yol şekilde verilmiştir.

$m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{CBE})$

olmak üzere $|AD| = 50$ cm,

$|EC| = 150$ cm ve

$|FC| = 240$ cm ise

$|EB|$ nu bulunuz.

ÇÖZÜM

DECF dikdörtgen olduğundan karşılıklı kenar uzunlukları eşittir.
|DE| = |FC| = 240 cm olduğundan |EB| = x ve |DB| = 240 − x denirse

A.A. benzerliği ile $\widehat{DBA} \sim \widehat{EBC}$ olur.

Bu durumda

$$\frac{|DB|}{|EB|} = \frac{|DA|}{|EC|} \Rightarrow \frac{240-x}{x} = \frac{50}{150}$$

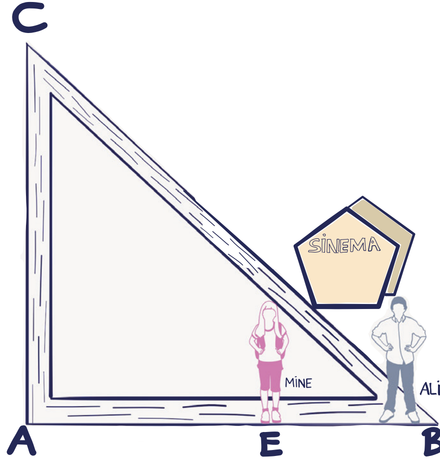
$$\Rightarrow \frac{240-x}{x} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 720 - 3x = x$$

$$\Rightarrow \quad 720 = 4x$$

$$\Rightarrow \quad x = 180 \text{ cm olur.}$$

ÖRNEK 31



Mine ve eşi Ali yukarıdaki gibi bir alışveriş merkezinde buluşarak sinemaya gideceklerdir.

I. Dik üçgen şeklindeki alışveriş merkezinde mağazalar, üçgenin kenarlarına gelecek şekilde yerleştirilmiş, iç bölge ise aktivite alanı olarak boş bırakılmıştır.

II. Mine, [AB] üzerindeki E noktasında ve sinemaya en yakın konumdadır.

III. |AC| = 200 m, |BC| = 250 m ve |EB| = 50 m dir.

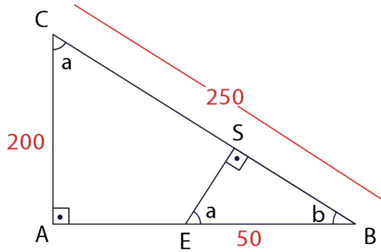
IV. Ali, bulunduğu B noktasından Mine'nin bulunduğu E noktasına gidecek ve ardından ikisi beraber sinemaya gideceklerdir.

Buna göre

a) Mine ile sinema arasındaki en kısa mesafenin kaç metre olduğunu bulunuz.

b) Ali'nin bulunduğu B noktasından Mine'nin yanına ve oradan beraber sinemaya gittiğinde toplam kaç metre yürüdüğünü bulunuz.

ÇÖZÜM



Sinema [BC] nın üzerinde ve Mine'ye en yakın noktada olduğundan Mine ile sinema arası en kısa uzaklık $[ES] \perp [BC]$ olacak şekilde $|ES|$ olur.

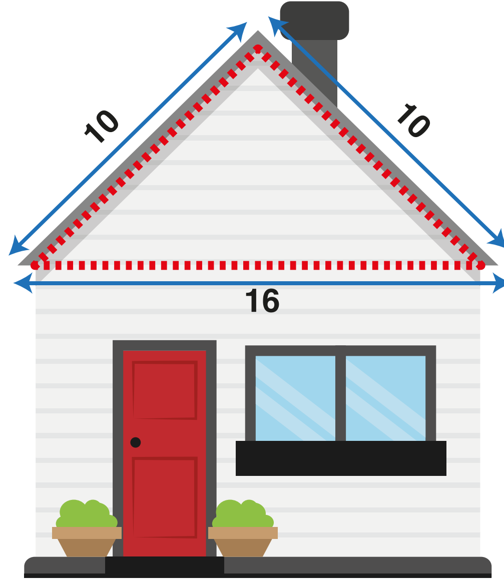
Açılar şekildeki gibi yerleştirilirse A.A. benzerlik kuralı ile $\widehat{ABC} \sim \widehat{SBE}$ olur.

Bu durumda $\frac{|BC|}{|BE|} = \frac{|AC|}{|SE|} \Rightarrow \frac{250}{50} = \frac{200}{|SE|} \Rightarrow |SE| = 40$ m olur. Buradan

a) 40 m

b) |EB| + |ES| = 50m + 40m = 90m olur.

ÖRNEK 32



Mimar Şengül Hanım, "Doğal Yaşam Evleri" isimli projesini şekildeki gibi bir maket ev yaptırarak tanıtmak istiyor.

- Maket evlerin gerçek evlere oranını $\frac{1}{75}$ olarak belirliyor ve bu orana uygun maket evler yaptırıyor.
- Maket evlerin ilgi çekmesi için çatının ön yüzündeki üçgensel bölgenin çevresini şerit led ile aydınlatıyor.
- Müşterilerden gelen talepler doğrultusunda isteğe bağlı olarak gerçek evlere de şerit led uygulaması yaptırıyor.
- Şerit ledin metre fiyatı 4 Türk lirası olarak belirleniyor.

Buna göre evine şerit led uygulaması isteyen bir müşterinin kaç Türk lirası ödeme yapacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

Şekildeki maketin çatısının çevresi $10 + 10 + 16 = 36$ cm olur.

Maket evlerin gerçek evlere oranı $\frac{1}{75}$ olduğundan yapılması planlanan bir evin çatısının çevresi $36 \cdot 75 = 2700$ cm olur.

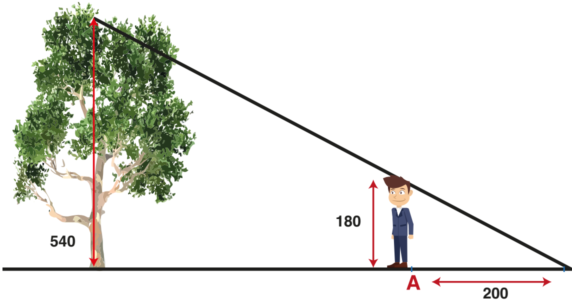
2700 cm = 27 m şerit led kullanılması gerekir.

Şerit ledin metre fiyatı 4 Türk lirası olduğundan $27 \cdot 4 = 108$ lira ödeme yapılmalıdır.



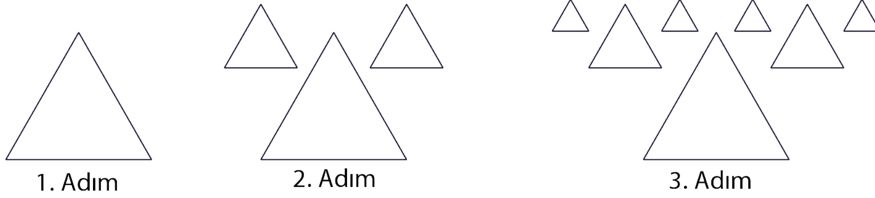
ALIŞTIRMALAR

1.



Şekilde boyu 540 cm olan bir ağaç ile boyu 180 cm olan bir çocuk verilmiştir. Çocuğun gölgesinin boyu 200 cm ve çocuk ile ağacın gölgelerinin bitim noktası aynı ise ağacın gölgesinin boyunun kaç cm olacağını bulunuz.

2.

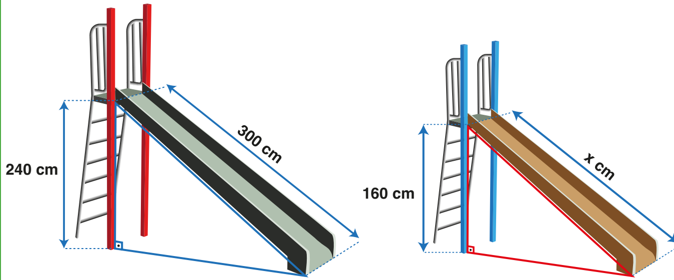


1. Adım 2. Adım 3. Adım

Bir halıya desen oluşturmak isteyen Ayşe Hanım ilk olarak bir eşkenar üçgen çiziyor. Daha sonra ve her defasında bir önceki adımda çizilen üçgenlerin yanlarına bu üçgenlerin $\frac{1}{2}$ oranında benzeri iki üçgen çiziyor.

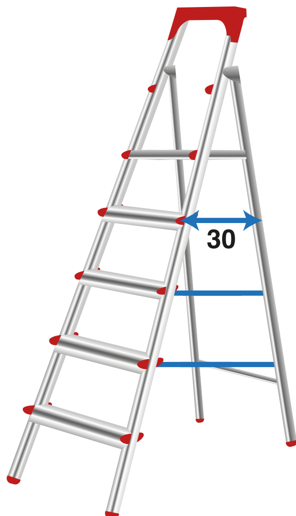
1. adımdaki üçgenin çevresi 64 birim ise 4. adımdaki üçgenlerin çevreleri toplamının bulunuz.

3.



Soldaki kaydırağın oranları kullanılarak sağdaki kaydırak imal edilmiştir. Buna göre sağdaki kaydırağın uzunluğunu bulunuz.

4.



5 basamaklı katlanır merdivenin iki kanadını birbirine bağlayan 3 tane ara parçası vardır. Bu ara parçalar ikinci, üçüncü ve dördüncü basamak hizasındadır.

Basamak araları eşit uzunlukta olan bu merdivenin en küçük ara parçasının uzunluğu 30 cm ise diğer iki ara parçasının uzunlukları toplamının kaç cm olacağını bulunuz.



9.4.3. Üçgenin Yardımcı Elemanları

Neler Öğreneceksiniz?

- Üçgenin iç ve dış açıortaylarının özelliklerini,
- Üçgenlerin kenarortaylarının özelliklerini,
- Üçgenin kenar orta dikmelerinin bir noktada kesiştiğini,
- Üçgenin çeşidine göre yüksekliklerinin kesiştiği noktanın konumunu öğreneceksiniz.



Terimler ve Kavramlar

- Açıortay
- İç Açıortay
- Dış Açıortay
- Kenarortay
- Ağırlık Merkezi
- Yükseklik
- Diklik Merkezi
- Kenar Orta Dikme

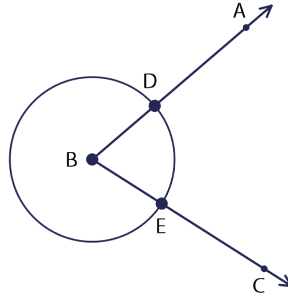


Sembol ve Gösterimler

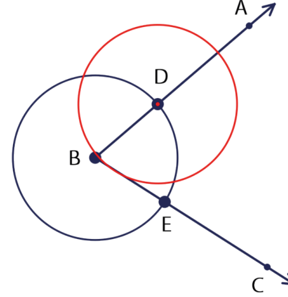
n_A, n'_A, V_a, G, h_a

9.4.3.1. Üçgenin İç ve Dış Açıortaylarının Özellikleri

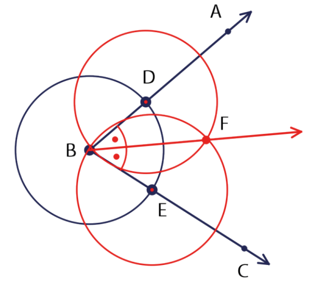
Pergel ve Cetvelle Açıortay Çizimi



Bir $\widehat{ABC}$ nın B noktasına pergelin sivri ucunu koyarak bir çember çizilir. Çizilen çemberin açının kollarını kestiği noktalarına D ve E denilsin.



Pergelin sivri ucunu D noktasına koyarak yarıçapı [BD] olan bir çember çizilir.

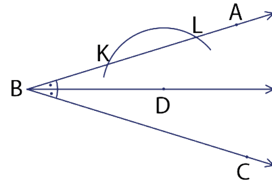


Pergelin sivri ucunu E noktasına koyarak yarıçapı [BE] olan bir çember çizilir (|BD| = |BE|olduğuna dikkat ediniz.).

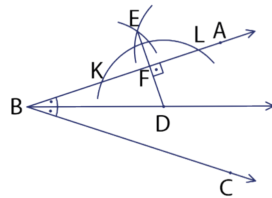
Son çizilen iki çemberin kesim noktalarından birine F denirse cetvel kullanılarak çizilen [BF, $\widehat{ABC}$ nın açıortayıdır.

Açıortay üzerinde alınan bir noktadan açının kollarına indirilen dikmelerin uzunlukları eşittir.

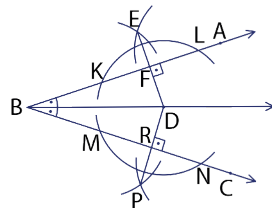
Yukarıdaki ifade pergel ve cetvel kullanılarak aşağıdaki gibi gösterilebilir.



$\widehat{ABC}$ nın açıortayı üzerindeki herhangi bir D noktası merkez olmak üzere [BA nı K ve L noktalarında kesen bir yay çizilir.



[BA üzerinde bulunan K ve L noktaları merkez alınıp aynı yarıçaplı iki yay çizilerek E noktası oluşturulur. Cetvel ile D ve E noktaları birleştirilince [DE], [BA na dik olur. [DE] nın [BA nı kestiği noktaya F denilir.



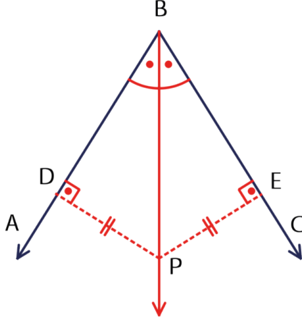
Yukarıda yapılan işlemler [BC için de yapılırsa yandaki gibi bir görsel elde edilir. Cetvel kullanarak |DF| ve |DR| ölçülürse |DF| = |DR| olduğu görülür.

Bu durumda açıortay üzerindeki herhangi bir noktadan açının kollarına indirilen dikmelerin uzunlukları eşittir.

ÖRNEK 1

Bir $\widehat{ABC}$ na ait B köşesinden çizilen açıortay üzerinde herhangi bir P noktası alınıyor.
P noktasının
[BA na en kısa uzaklığı (x − 2) cm,
[BC na en kısa uzaklığı (7 − 2x) cm
ise x değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

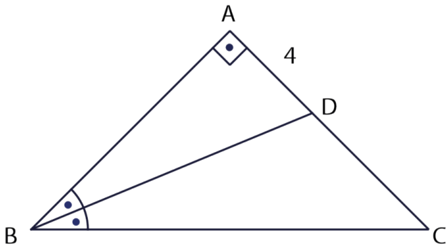


P noktasının [BA na en kısa uzaklığı [PD] ⊥ [BA olacak şekilde bir D noktasıdır. Bu durumda |PD| = x − 2 olur.

P noktasının [BC na en kısa uzaklığı [PE] ⊥ [BC olacak şekilde bir E noktasıdır. Bu durumda |PE| = 7 − 2x olur. |DP| = |EP| olduğundan

$x - 2 = 7 - 2x \Rightarrow 3x = 9$ ve $x = 3$ olur.

ÖRNEK 2

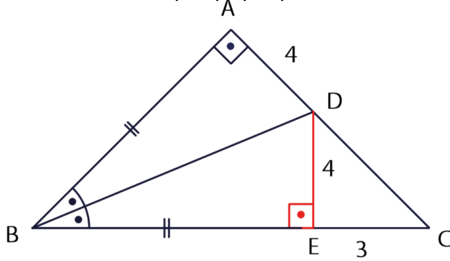


Yandaki ABC üçgeninde [BD], $\widehat{ABC}$ nın açıortayıdır.

[DA] ⊥ [BA], |AD| = 4 birim ve |BC| = |AB| +3 ise |DC| nun kaç birim olduğunu bulunuz?

ÇÖZÜM

Açıortay doğrusu üzerinden açıortayın kollarına indirilen dikmelerin uzunlukları eşit olduğundan |AD| =|DE| = 4 birim olacak şekilde bir E noktası vardır.

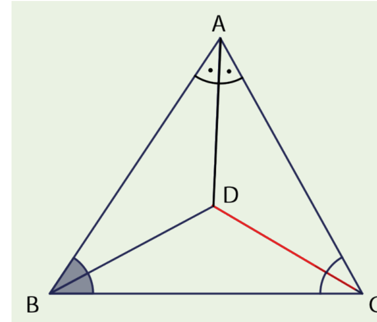


Bu durumda ABD ve EBD üçgenlerinde Pisagor teoremi uygulanırsa $|AB|^2 + |AD|^2 = |BE|^2 + |ED|^2$ eşitliğinden |AB| = |BE| elde edilir.

$|BC| = |AB| + 3$
$|BC| = |BE| + 3$ (|AB| = |BE| yazılmıştır.)
$|BE| + |EC| = |BE| + 3$ (|BC| = |BE| + |EC| yazılmıştır.)
$|EC| = 3$ olur.

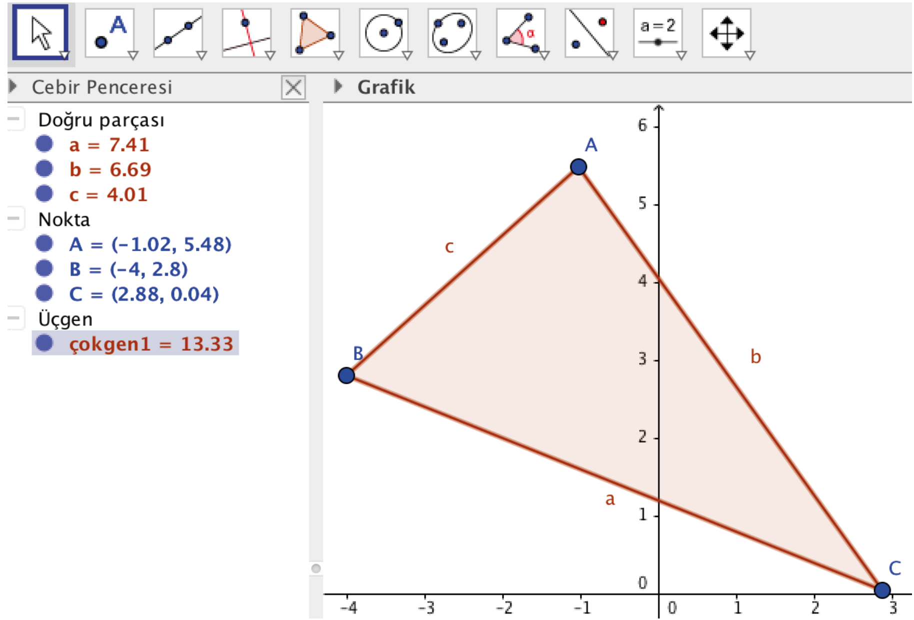
$\widehat{DEC}$ nde Pisagor teoremi ile
$|DC|^2 = |DE|^2 + |EC|^2$
$|DC|^2 = 4^2 + 3^2$
$|DC|^2 = 25$
$|DC| = 5$ birim olur.

Üçgende İç ve Dış Açıortaylar

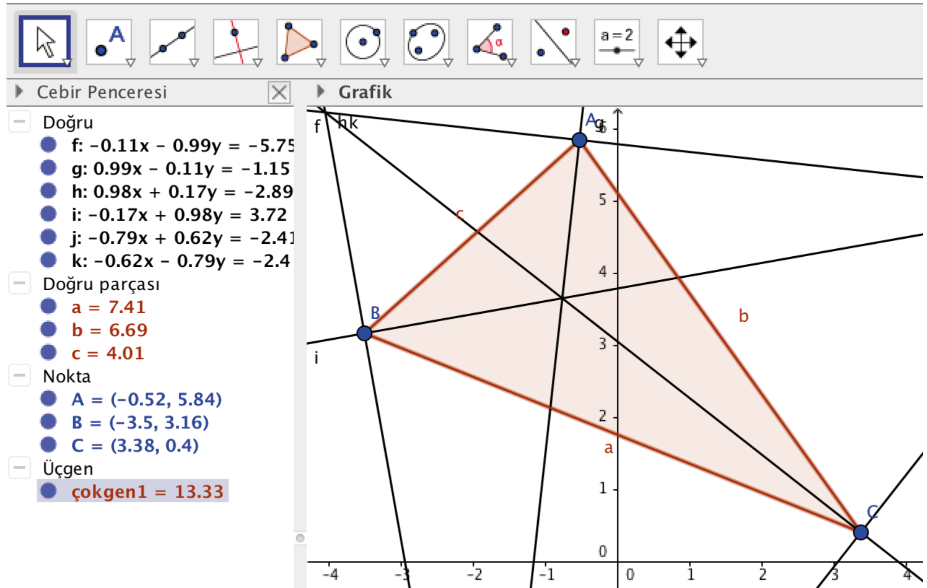


Üçgenin herhangi iki köşesine ait iç açıortayların kesiştiği nokta D ise diğer köşeden gelen açıortay da D noktasından geçer.

Bu ifadenin doğruluğunun GeoGebra programı ile gösterimi aşağıdaki gibidir. Araç çubuğundaki 5. kutuya ve ardından açılan "Çokgen" sekmesine tıklanarak grafik penceresinde herhangi bir $\widehat{ABC}$ oluşturulur.

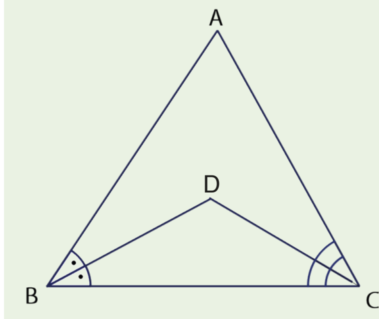


Araç çubuğundaki "4. kutuya" ve ardından açılan "Açıortay" sekmesine tıklanır. Daha sonra ayrı ayrı her köşedeki iki kenara tıklanarak üçgenin köşelerine ait açıortaylar çizilmiş olur.



Görsele bakıldığında iç açıortayların üçgen içinde ortak bir noktada kesiştiği görülür.

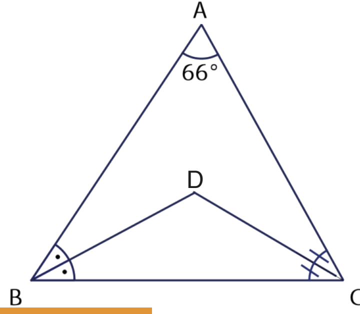




Şekildeki ABC üçgeninde B ve C köşelerine ait iç açıortaylar D noktasında kesişmiştir.

İç açıortaylar arasındaki açı $\widehat{BDC}$ olmak üzere

ÖRNEK 3

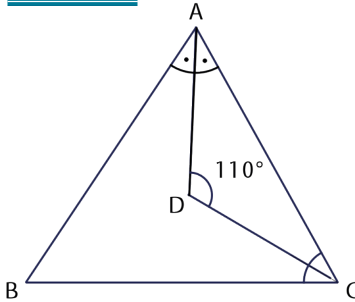


Yandaki $\widehat{ABC}$ nde $m(\widehat{BAC}) = 66^\circ$ ve $[BD]$ ile $[CD]$ iç açıortaylardır. Verilenlere göre $m(\widehat{BDC})$ nü bulunuz.

ÇÖZÜM

$$m(\widehat{BDC}) = 90^\circ + \frac{m(\widehat{BAC})}{2} \Rightarrow m(\widehat{BDC}) = 90^\circ + \frac{66^\circ}{2} \Rightarrow m(\widehat{BDC}) = 123^\circ \text{ olur.}$$

ÖRNEK 4



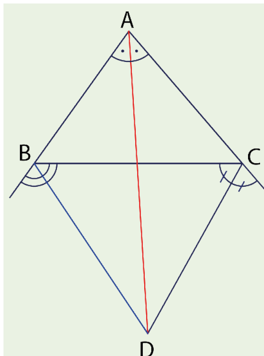
Şekilde $m(\widehat{ADC}) = 110^\circ$ ve [AD] ile [CD] iç açıortaylardır. Verilenlere göre $m(\widehat{ABC})$ nü bulunuz.

ÇÖZÜM

İç açıortayların arasındaki açı $m(\widehat{ADC})$ olmak üzere

$$m(\widehat{ADC}) = 90^\circ + \frac{m(\widehat{ABC})}{2}$$

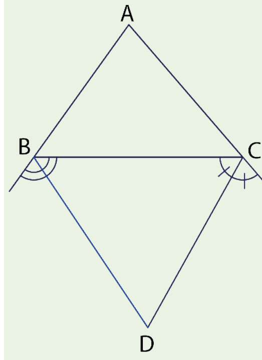
$$110^\circ = 90^\circ + \frac{m(\widehat{ABC})}{2} \Rightarrow 20^\circ = \frac{m(\widehat{ABC})}{2} \Rightarrow m(\widehat{ABC}) = 40^\circ \text{ olur.}$$



Üçgende herhangi iki köşeye ait dış açıortayların kesiştiği nokta D ise diğer köşeye ait iç açıortay da D noktasından geçer. Bu durumda "Herhangi iki açıortayın kesiştiği noktaya diğer köşeden çizilen doğru parçası da açıortaydır." sonucu elde edilir.

Siz de yukarıdaki ifadenin doğruluğunu GeoGebra programı yardımıyla gösteriniz.



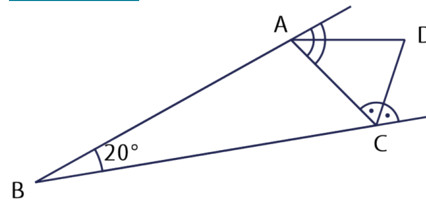


Şekildeki $\widehat{ABC}$ nde B ve C köşelerine ait dış açıortaylar D noktasında kesişmiştir.

Dış açıortayların oluşturduğu açı $\widehat{BDC}$ olmak üzere

$m(\widehat{BDC}) = 90^\circ - \dfrac{m(\widehat{BAC})}{2}$ olur.

ÖRNEK 5



Şekilde $m(\widehat{ABC}) = 20^\circ$ ve [AD] ile [CD] bulundukları köşelerin dış açıortaylarıdır. Verilenlere göre $m(\widehat{ADC})$ nü bulunuz.

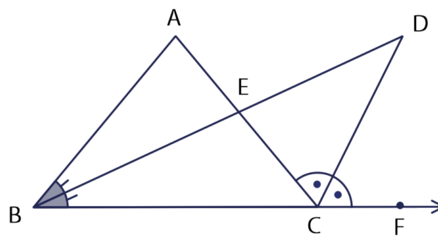
ÇÖZÜM

$\widehat{ADC}$ dış açıortaylar arası açıdır. Bu durumda

$m(\widehat{ADC}) = 90^\circ - \dfrac{m(\widehat{ABC})}{2} \Rightarrow m(\widehat{ADC}) = 90^\circ - \dfrac{20^\circ}{2}$

$m(\widehat{ADC}) = 90^\circ - 10^\circ \Rightarrow m(\widehat{ADC}) = 80^\circ$ olur.

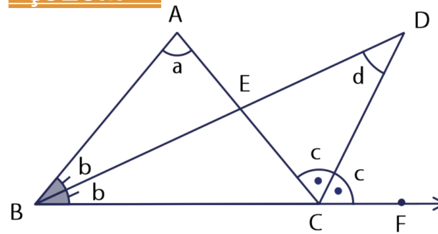
ÖRNEK 6



Şekilde $\widehat{ABC}$ nde [BD], B köşesine ait iç açıortay ve [CD] ise C köşesine ait dış açıortaydır.

$m(\widehat{D})$ ile $m(\widehat{A})$ arasındaki bağıntıyı bulunuz.

ÇÖZÜM



Bir dış açı kendisine komşu olmayan iki iç açının ölçüleri toplamına eşit olduğundan

$\widehat{DBC}$ nde $c = d + b$ ve

$\widehat{ABC}$ nde $2c = 2b + a$ olur.

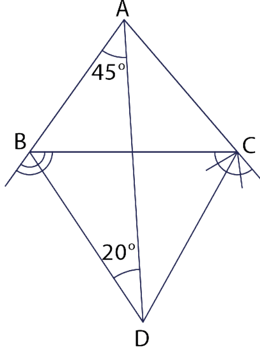
$2c = 2b + a$ eşitliğinde $c = d + b$ yazılır.

$2c = 2b + a \Rightarrow 2 \cdot (d + b) = 2b + a \Rightarrow 2d = a$

$\Rightarrow d = \dfrac{a}{2}$

$\Rightarrow m(\widehat{D}) = \dfrac{m(\widehat{A})}{2}$ olur.

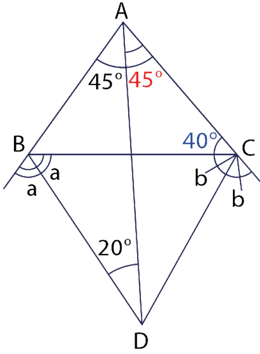
ÖRNEK 7



[BD] ve [CD], $\widehat{ABC}$ nin dış açıortaylarıdır.

$m(\widehat{BAD}) = 45°$ ve $m(\widehat{BDA}) = 20°$ ise $m(\widehat{CDA})$ nü bulunuz.

ÇÖZÜM



Herhangi iki açıortayın kesiştiği noktaya diğer köşeden çizilen doğru parçası da açıortay olduğundan

$m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{CAD}) = 45°$ olur.

A dan çizilen iç açıortayla B den çizilen dış açıortay, D noktasında kesiştiğinden

$m(\widehat{BDA}) = \dfrac{m(\widehat{BCA})}{2} \Rightarrow 20° = \dfrac{m(\widehat{BCA})}{2} \Rightarrow m(\widehat{BCA}) = 40°$

$\widehat{ABC}$ nin iç açıları ölçüleri toplamından

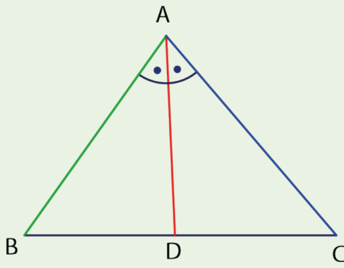
$m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{ACB}) = 180°$

$m(\widehat{ABC}) + 90° + 40° = 180° \Rightarrow m(\widehat{ABC}) = 50°$ olur.

A dan çizilen iç açıortayla C den çizilen dış açıortay D noktasında kesiştiğinden

$m(\widehat{CDA}) = \dfrac{m(\widehat{ABC})}{2} \Rightarrow m(\widehat{CDA}) = \dfrac{50°}{2} \Rightarrow m(\widehat{CDA}) = 25°$ olur.

İç Açıortay Teoremi

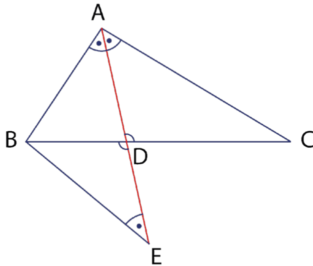


$\widehat{ABC}$ nin A köşesine ait iç açıortayı $[AD]$ ise

$$\frac{|DB|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|}$$

$|AD| = n_A$ ile gösterilir.

Bu özelliğin doğruluğu aşağıdaki şekilde gösterilebilir.



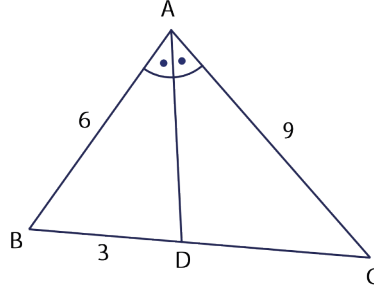
$[AD]$ uzatılarak $[AC] \parallel [BE]$ olacak şekilde $[BE]$ çizilir. İç ters açıların özelliğinden $m(\widehat{CAD}) = m(\widehat{BEA})$ ve ters açı özelliğinden $m(\widehat{ADC}) = m(\widehat{BDE})$ olur. Buradan ABE ikizkenar üçgendir. $|AB| = |EB|$ elde edilir.

A.A. benzerliği ile $\widehat{EDB} \sim \widehat{ADC}$ olup

$\dfrac{|DB|}{|DC|} = \dfrac{|EB|}{|AC|}$ ve $|AB| = |EB|$ olduğundan

$\dfrac{|DB|}{|DC|} = \dfrac{|AB|}{|AC|}$ bulunur.

ÖRNEK 8



Yandaki şekilde [AD], A açısının iç açıortayıdır.

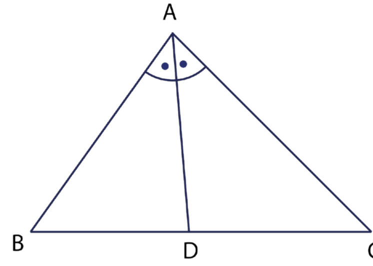
|BD| = 3 birim, |BA| = 6 birim,

|AC| = 9 birim ise |DC| nu bulunuz.

ÇÖZÜM

İç açıortay teoremine göre $\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|BA|}{|AC|} \Rightarrow \frac{3}{|DC|} = \frac{6}{9} \Rightarrow |DC| = \frac{9}{2}$ birim olur.

ÖRNEK 9



Yandaki şekilde [AD], A açısının iç açıortayı olmak üzere |BA| = 12 cm ve |AC| = 15 cm olur.

$Ç(\widehat{ABC}) = 45$ cm ise |DC| nu bulunuz.

ÇÖZÜM

İç açıortay teoremi ile $\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|BA|}{|AC|} \Rightarrow \frac{|BD|}{|DC|} = \frac{12}{15} \Rightarrow \frac{|BD|}{|DC|} = \frac{4}{5}$

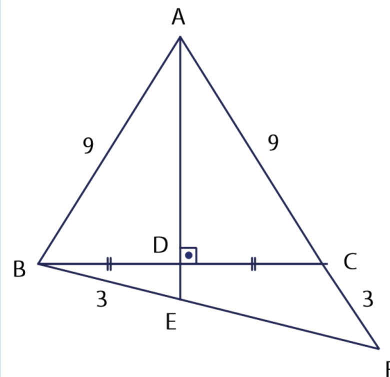
|BD| = 4k ve |DC| = 5k denir ($k \in \mathbb{R}^+$).

$Ç(\widehat{ABC}) = 45$ ise |BA| + |AC| + |BC| = 45

12 + 15 + 4k + 5k = 45 ise 9k = 18 olup k = 2 olur.

Bu durumda |DC| = 5k = 5 · 2 = 10 cm olur.

ÖRNEK 10

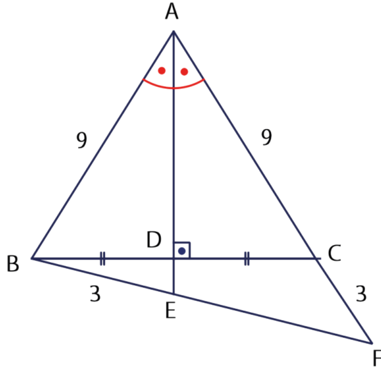


Yandaki şekilde |AB| =|AC|= 9 cm,

|BE| = |CF| = 3 cm

$[AD] \perp [BC]$, |BD| = |DC| ise |EF| kaç santimetredir?

ÇÖZÜM

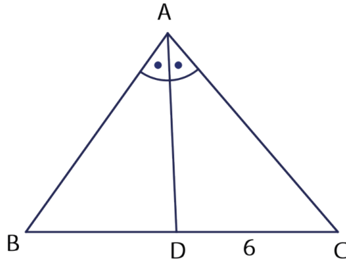


$[AD] \perp [BC]$ ve $|BD| = |DC|$ olduğundan $\widehat{ABC}$ ikizkenar üçgen olur. Bu durumda [AD], A köşesine ait iç açıortaydır ve $|BA| = |AC| = 9$ cm olur. Şekle dikkatli bakılırsa A köşesine ait iç açıortay aynı zamanda $\widehat{ABF}$ nin de iç açıortayıdır.

O hâlde

$$\frac{|BE|}{|EF|} = \frac{|BA|}{|AF|} \Rightarrow \frac{3}{|EF|} = \frac{9}{12} \Rightarrow |EF| = 4 \text{ cm olur.}$$

ÖRNEK 11

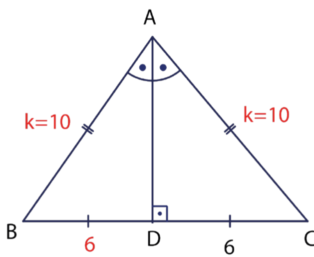


Yandaki şekilde verilen $\widehat{ABC}$ nde $|AB| = |AC|$ ve $n_A = |AD|$ dur. $|DC| = 6$ birim ve $Ç(\widehat{ABC}) = 32$ birim ise n_A kaç birim olduğunu bulunuz?



İkizkenar üçgende tepe açısından tabana çizilen açıortay aynı zamanda yükseklik ve kenarortaydır.

ÇÖZÜM



$\widehat{ABC}$ ikizkenar üçgen olduğundan

$[AD] \perp [BC]$ ve $|BD| = |DC| = 6$ birim olur.

Açıortay teoremini kullanarak

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|BA|}{|AC|} \Rightarrow \frac{6}{6} = \frac{|BA|}{|AC|} \Rightarrow 1 = \frac{|BA|}{|AC|} \Rightarrow |BA| = |AC| = k \text{ denirse}$$

$Ç(\widehat{ABC}) = 32$ ise $|AB| + |AC| + |BC| = 32$

$k + k + 12 = 32$ olup $k = 10$ birim bulunur.

$\widehat{ABD}$ nde Pisagor teoremi ile $|AB|^2 = |BD|^2 + |AD|^2$

$$10^2 = 6^2 + |AD|^2$$

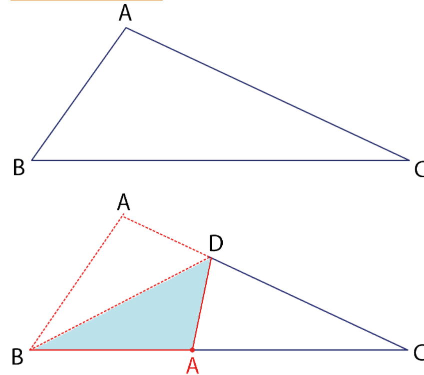
$$100 = 36 + |AD|^2$$

$$|AD| = n_A = 8 \text{ birim olur.}$$

ÖRNEK 12

Kâğıt katlama sanatı (origami) ile açıortay elde ediniz ve bu durumu "GeoGebra" programında gösteriniz.

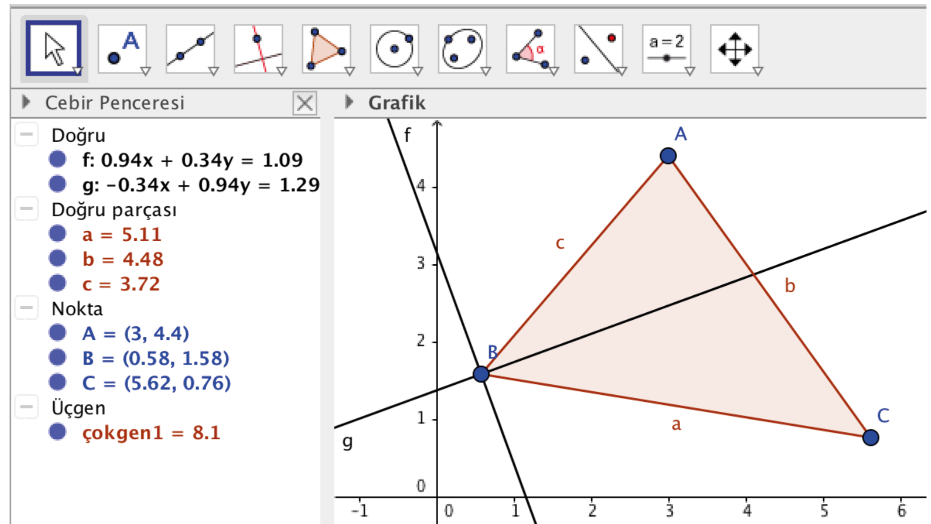
ÇÖZÜM



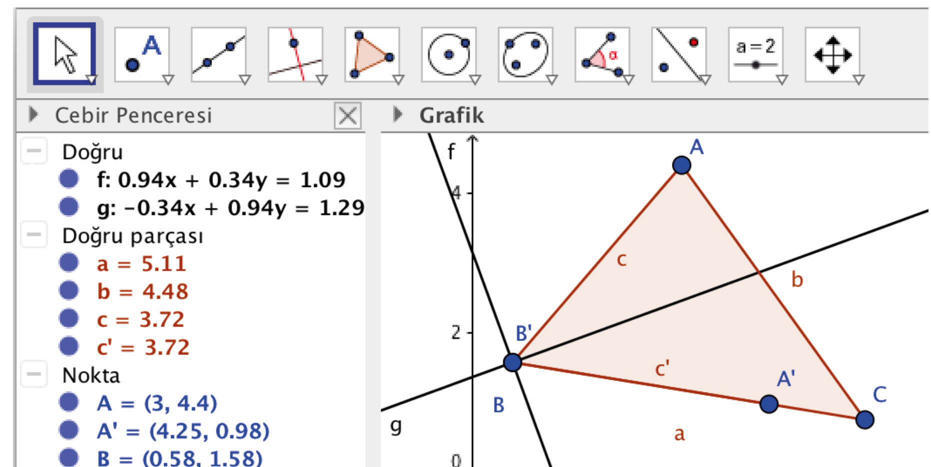
Üçgen şeklinde bir kağıt parçası hazırlanarak köşelerine A, B, C denilir. Daha sonra [AB], [BC] nın üzerine gelecek şekilde katlanır. [AC] nın katlandığı noktaya D denirse kağıt geri açıldığında görülen katlama çizgisi [BD], B köşesine ait iç açıortaydır.

Bu durum "GeoGebra" programı ile gösterilebilir.

"GeoGebra" programını açarak araç çubuğundaki 5. kutuya ve ardından açılan "Çokgen" sekmesine tıklanır. Daha sonra grafik penceresinde üçgen olacak şekilde üç nokta seçilir ve ardından ilk seçilen noktaya tıklanır. Araç çubuğundaki 4. kutuya ve ardından açılan pencerede "Açıortay" sekmesine tıklanır. Üçgenin herhangi iki kenarına tıklanarak açıortay çizilir (Aşağıdaki görselde B köşesinden açıortay çizilmiştir.).



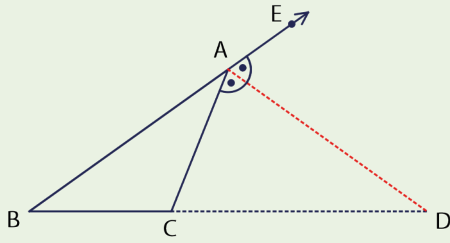
Araç çubuğundaki 9.kutuya ve ardından açılan "Doğruda Yansıt" sekmesine tıklanır. Ardından önce [AB] na sonra iç açıortay doğrusu üzerine tıklanır.



Bu işlemler sonucunda [AB], [BC] üzerine katlandığında katlama çizgisinin iç açıortay doğrusu boyunca olduğu görülür.



Dış Açıortay Teoremi

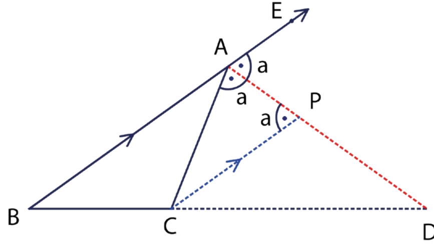


Bir $\widehat{ABC}$ nde A köşesindeki açının dış açıortayı [BC] nın uzantısını D noktasında kesiyorsa

$\frac{|DC|}{|DB|} = \frac{|CA|}{|BA|}$ olur.

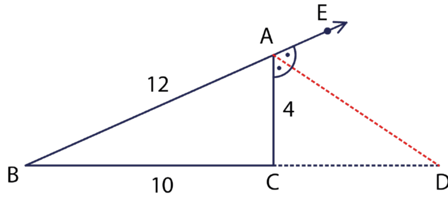
$|AD| = n'_A$ ile gösterilir.

Bu özelliğin doğruluğu aşağıdaki şekilde gösterilebilir.



Yandaki şekilde P ∈ [AD] olmak üzere [AB] // [CP] olacak şekilde [CP] çizilir. İç ters açı özelliğinden $m(\widehat{EAP}) = m(\widehat{APC})$ olduğundan $|AC| = |CP|$ olur. Thales teoreminden $\frac{|DC|}{|DB|} = \frac{|CP|}{|AB|} \Rightarrow \frac{|DC|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|AB|}$ bağıntısı vardır.

ÖRNEK 13



Şekildeki $\widehat{ABC}$ için $n'_A = |AD|$ dur.

|AB| = 12 cm, |BC| = 10 cm ve |AC| = 4 cm ise |CD| nu bulunuz.

ÇÖZÜM

|DC|=x denirse dış açıortay teoremi ile

$\frac{|DC|}{|DB|} = \frac{|CA|}{|BA|} \Rightarrow \frac{x}{x+10} = \frac{4}{12}$ ise 3x = x+10

2x = 10

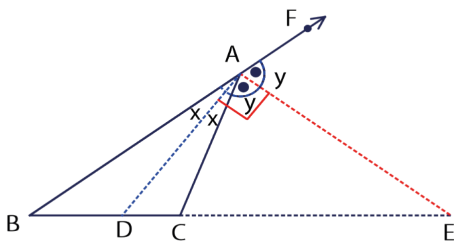
x = 5 olur. Bu durumda |CD| = 5 cm bulunur.

ÖRNEK 14

Bir $\widehat{ABC}$ nde A köşesinden $n_A = |AD|$ ve $n'_A = |AE|$ olacak şekilde doğru parçaları çiziliyor.

|DE| = 8 cm ise $(n_A)^2 + (n'_A)^2$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



$\widehat{ABC}$ için n_A ve n'_A yandaki gibi çizilebilir ve açılar şekildeki gibi yerleştirilebilir.

Doğru açı 180° olduğundan

2x + 2y = 180° ise x + y = 90° olur.

$\widehat{ADE}$ dik üçgen olduğundan

Pisagor teoremi ile $|AD|^2 + |AE|^2 = |DE|^2$

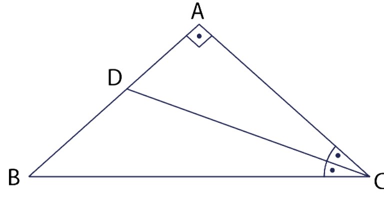
$(n_A)^2 + (n'_A)^2 = 8^2$

$(n_A)^2 + (n'_A)^2 = 64$ olur.



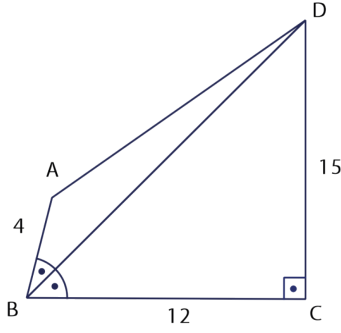
ALIŞTIRMALAR

1.



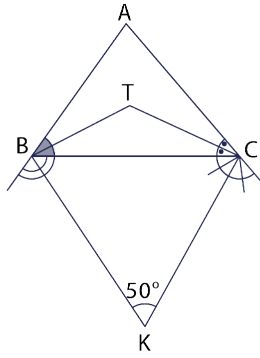
Yandaki şekilde $\widehat{ABC}$ için $n_C = |CD|$ dur. $|AD| = 6$ birim ve $|BC| = |AC| + 8$ ise $|BD|$ nun kaç birim olduğunu bulunuz.

2.



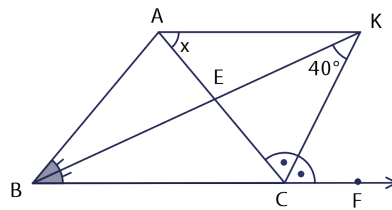
Yandaki şekilde $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{CBD})$, $|AB| = 4$ cm, $|BC| = 12$ cm ve $|CD| = 15$ cm ise $|AD|$ nun kaç santimetre olduğunu bulunuz.

3.



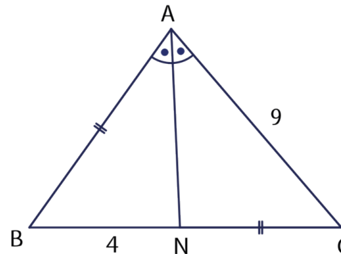
Yandaki şekildeki T noktası $\widehat{ABC}$ nin iç açıortaylarının kesim noktası ve K noktası ise B ve C köşelerine ait dış açıortayların kesim noktasıdır. $m(\widehat{BKC}) = 50^\circ$ ise $m(\widehat{BTC})$ nü bulunuz.

4.



Yandaki şekilde verilenlere göre $m(\widehat{CAK}) = x$ değerini bulunuz.

5.



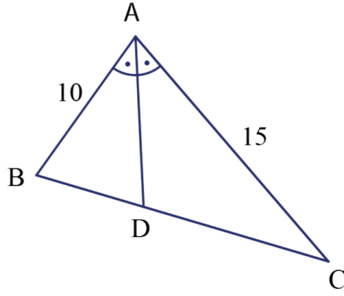
Yandaki $\widehat{ABC}$ nde $n_A = |AN|$, $|AB| = |NC|$, $|BN| = 4$ birim ve

$|AC| = 9$ birim ise

Ç($\widehat{ABC}$) nin kaç birim olduğunu bulunuz.

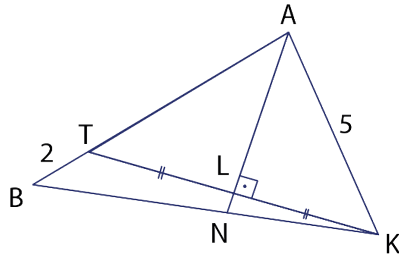


6.



Yandaki şekilde verilen $\widehat{ABC}$ nde [AD], A köşesine ait iç açıortaydır. |AB| = 10 birim ve |AC| = 15 birim ise |AD| nun alabileceği tam sayı değerlerini bulunuz.

7.



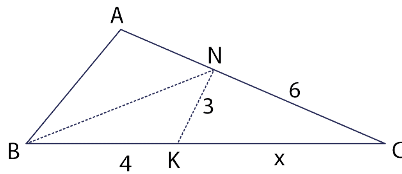
Yandaki şekilde

$[AN] \perp [TK]$, $|TL| = |LK|$,

$|AK| = 5$ birim ve $|TB| = 2$ birim

ise $\frac{|NB|}{|NK|}$ nın kaç olduğunu bulunuz.

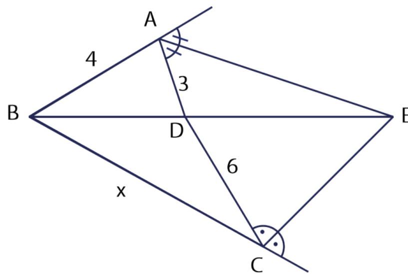
8.



Yandaki $\widehat{ABC}$ nde [AB], [BC] üzerine katlanırsa A noktası K noktası üzerine denk gelmektedir.

Katlama çizgisi [BN] ise |KC| = x in kaç birim olduğunu bulunuz.

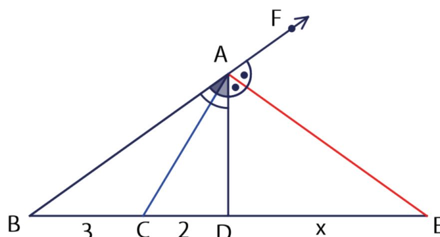
9.



Yandaki şekilde $\widehat{ABD}$ için

$n'_A = |AE|$, $\widehat{BAD}$ nın dış açıortayı ve $\widehat{BDC}$ için $n'_C = |CE|$, $\widehat{DCB}$ nın dış açıortayıdır. |AB| = 4 birim, |AD| = 3 birim ve |DC| = 6 birim ise |BC| = x in kaç birim olduğunu bulunuz.

10.



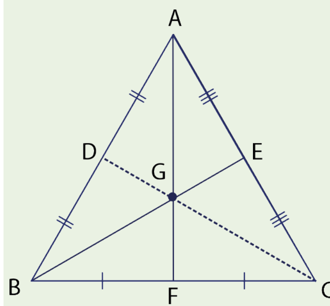
Yandaki $\widehat{ABD}$ nde $n_A = |AC|$ ve

$n'_A = |AE|$ olmak üzere |BC| = 3 birim, |CD| =2 birim ise |DE| = x in kaç birim olduğunu bulunuz.



9.4.3.2. Üçgenin Kenarortayları

Bir cismin dengede durması ve daha dayanıklı olması için ağırlık merkezini uygun bir noktada oluşturmak gerekir. Örneğin İtalya'nın Pisa şehrindeki Pisa Kulesi, temelindeki yumuşak zeminin çökmesi sebebiyle eğilmeye başlamıştır. Bu eğilmeye rağmen kulenin bugüne kadar yıkılmamasının sebebi, ağırlık merkezinin izdüşümünün kulenin temeline ait dairenin içinde kalmasıdır.



Bir üçgende bir köşeyi karşısındaki kenarın orta noktasına birleştiren doğru parçasına üçgenin bu kenarına ait **kenarortayı** denir.

A köşesinden çizilen kenarortay uzunluğu V_a ile gösterilir ve şekilde $V_a = |AF|$ olur.

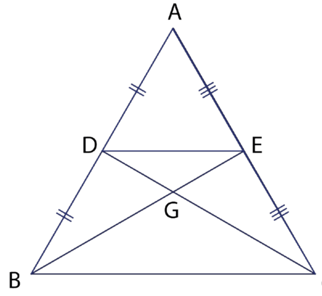
B köşesinden çizilen kenarortay uzunluğu V_b ile gösterilir ve şekilde $V_b = |BE|$ olur.

C köşesinden çizilen kenarortay uzunluğu V_c ile gösterilir ve şekilde $V_c = |CD|$ olur.

İki kenarortayın kesiştiği noktadan üçüncü kenarortay da geçer.

Kenarortaylar üçgen içinde bir noktada kesişirler. Bu noktaya **üçgenin ağırlık merkezi** denir ve "G" ile gösterilir. Şekilde $\frac{|AG|}{|GF|} = \frac{|BG|}{|GE|} = \frac{|CG|}{|GD|} = 2$ olur.

Bu özelliğin doğruluğu aşağıdaki gibi gösterilebilir.

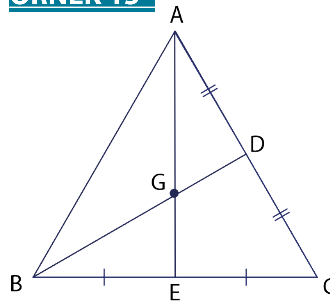


$|AD| = |DB|$ ve $|AE| = |EC|$ olduğundan $[DE] \parallel [BC]$ dir. Temel orantı teoreminden $\widehat{DGE} \sim \widehat{CGB}$ olur. Buradan $\frac{|DE|}{|BC|} = \frac{1}{2}$ olur.

Sonuç olarak $\frac{|DE|}{|BC|} = \frac{|EG|}{|GB|} = \frac{|DG|}{|GC|} = \frac{1}{2}$ olur.

Benzer şekilde $[BC]$ nın orta noktası F olmak üzere $\frac{|GF|}{|GA|} = \frac{1}{2}$ bulunur.

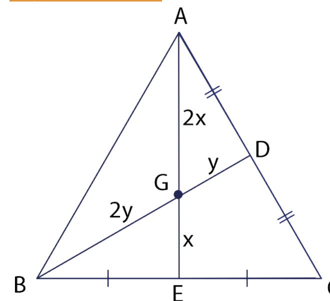
ÖRNEK 15



G noktası $\widehat{ABC}$ nin ağırlık merkezi olmak üzere

$|AE| + |BD| = 36$ cm ise $|AG| + |BG|$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



G ağırlık merkezi olduğundan

$\frac{|AG|}{|GE|} = 2 \Rightarrow |GE| = x$ ve $|AG| = 2x$

$\frac{|BG|}{|GD|} = 2 \Rightarrow |GD| = y$ ve $|BG| = 2y$

denilir. Bu durumda $|AE| = 3x$ ve $|BD| = 3y$ olur.

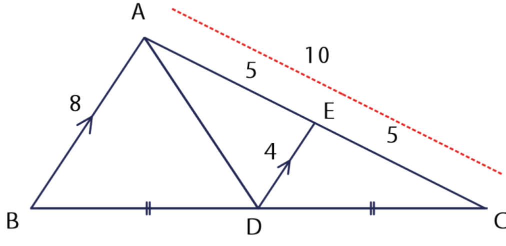
$|AE| + |BD| = 36$ ise $3x + 3y = 36$ ve $x + y = 12$ olur.

Sonuç olarak $|AG| + |BG| = 2x + 2y = 2 \cdot 12 = 24$ cm olur.

ÖRNEK 16

Bir $\widehat{ABC}$ için $|AB|=8$ birim ve $|AC|=10$ birim veriliyor. V_a nın alabileceği değerlerin aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM

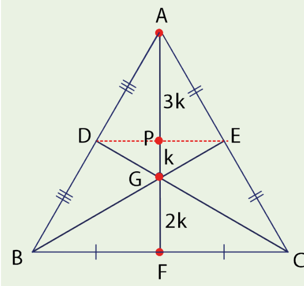


Verilenler şekildeki gibi çizilir. $V_a=|AD|$ olur. [AC] üzerinde bir E noktası, [DE] ⫽ [AB] olacak şekilde seçilir. Bu durumda [DE] orta taban olduğu için

$|DE|=\frac{|AB|}{2}=\frac{8}{2}=4$ ve

$|AE|=|EC|=5$ olur.

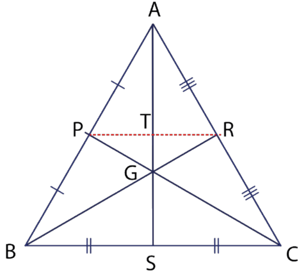
$\widehat{ADE}$ için üçgen eşitsizliği ile $5-4<|AD|<5+4 \Rightarrow 1<V_a<9$ olur. Buradan V_a nın alabileceği değerlerin aralığı $(1, 9)$ olur.



Üçgenin ağırlık merkezi ile orta tabanının kenarortay üzerinde ayırdığı uzunluklar köşeden kenara doğru sırasıyla 3, 1 ve 2 sayılarıyla orantılıdır.

Şekilde $|AP| = 3k$, $|PG| = k$ ve $|GF| = 2k$ ($k \in \mathbb{R}^+$) olur.

Bu özelliğin doğruluğu aşağıdaki gibi gösterilebilir.



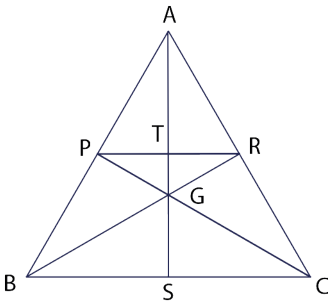
[PR] orta taban olduğundan $[PR] ⫽ [BC]$ ve $|BC|=2|PR|$ tir. Buradan A.A. benzerlik kuralından

$\widehat{TGR} \sim \widehat{SGB}$ dir. Bu benzerlikten

$\frac{|GR|}{|GB|}=\frac{|TG|}{|GS|}=\frac{1}{2}$ ve $\frac{|AR|}{|RC|}=\frac{|AT|}{|TS|}=1$ olur.

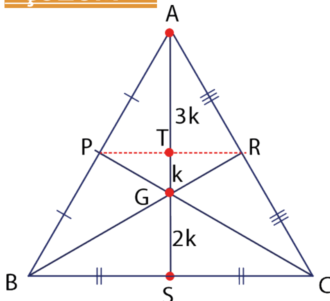
$|TG|=k$ denirse $|GS|=2k$ ve $|AT|=3k$ olur.

ÖRNEK 17



Yandaki ABC üçgeninde ağırlık merkezi G olmak üzere $|AS| = 30$ cm ise $|AT| + |GS|$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



G ağırlık merkezi olduğundan [PR] ⫽ [BC] olur.

O hâlde $|AT| = 3k$, $|TG| = k$ ve $|GS| = 2k$ denilir.

$|AS|= 30 \Rightarrow 6k = 30 \Rightarrow k = 5$ olur.

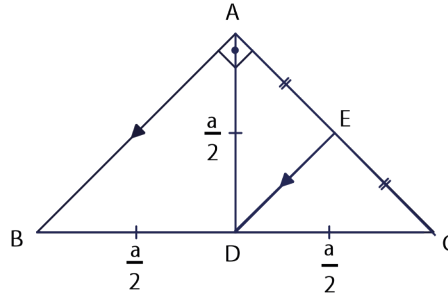
Bu durumda $|AT| + |GS|= 3k + 2k = 5k = 5 \cdot 5$

$= 25$ cm olur.

ÖRNEK 18

Dik üçgende hipotenüse ait kenarortay uzunluğunun hipotenüs uzunluğunun yarısı olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM



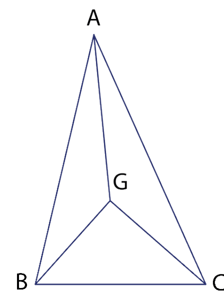
Şekildeki gibi çizilen bir ABC dik üçgeninde hipotenüse ait kenarortay uzunluğu V_a= |AD| olur.

D noktasından [AC] na [DE] ∥ [AB] olacak şekilde dik indirilir.

[DE] ∥ [AB] ve |BD| = |DC| olduğundan |AE| = |EC| olur.

ADC üçgeninde [DE], hem yükseklik hem kenarortay olduğundan ADC ikizkenar üçgendir ve |AD| = |DC| olur. Bu durumda $V_a = \frac{a}{2}$ olur.

ÖRNEK 19

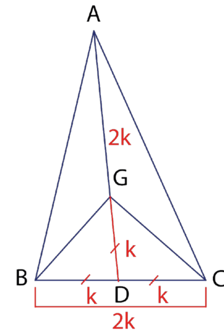


Yandaki şekilde $\widehat{ABC}$ nin ağırlık merkezi G noktasıdır.

|AG| = |BC| ise $m(\widehat{BGC})$ kaç derece olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Şekildeki gibi A, G, D noktaları doğrusal olacak şekilde uzatılırsa [AD], kenarortay olur.



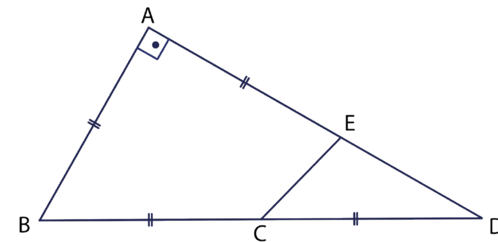
|GD| = k denirse |AG| = |BC| = 2k yazılır.

|BC| = 2k ise |BD| = |DC| = k olur.

BGC üçgeninde [GD], [BC] nı iki eş parçaya böler. |

GD| = |BD| = |DC| olup 90° den indirilen dikme tabanı iki eş parçaya böleceğinden $m(\widehat{BGC}) = 90^\circ$ olur.

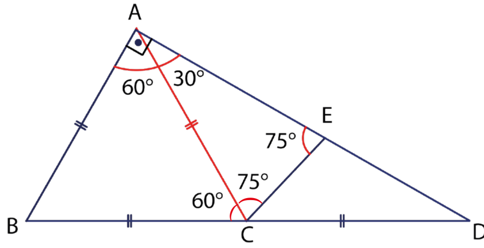
ÖRNEK 20



Yukarıdaki şekilde $[BA] \perp [AD]$ ve $|BC| = |CD| = |AB| = |AE|$ ise $m(\widehat{ECD})$ nü bulunuz.



ÇÖZÜM



|BC| = |CD| olduğundan ABC dik üçgeninde hipotenüse ait kenarortay C noktasından geçer ve |AC| = |BC| = |CD| olur.

|AB| = |AC| = |BC| olduğundan $\widehat{ABC}$ eşkenar üçgendir.

$\widehat{ABC}$ eşkenar üçgen olduğundan $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{BCA}) = m(\widehat{BAC}) = 60^\circ$ olur.

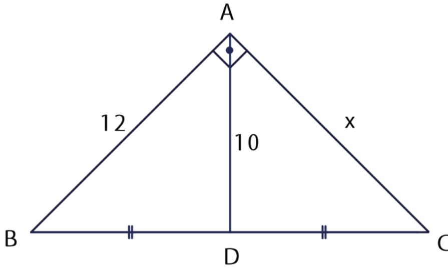
Buradan $m(\widehat{DAC}) = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ olur.

$\widehat{ACE}$ ikizkenar üçgen olduğundan $m(\widehat{ACE}) = m(\widehat{AEC}) = 75^\circ$ olur.

B, C, D noktaları doğrusal olduğundan C noktasındaki açıların ölçüleri toplamı 180° olur. O hâlde

$$m(\widehat{ACB}) + m(\widehat{ACE}) + m(\widehat{ECD}) = 180^\circ \Rightarrow 60^\circ + 75^\circ + m(\widehat{ECD}) = 180^\circ$$
$$\Rightarrow \quad 135^\circ + m(\widehat{ECD}) = 180^\circ$$
$$\Rightarrow \quad m(\widehat{ECD}) = 45^\circ \text{ olur.}$$

ÖRNEK 21

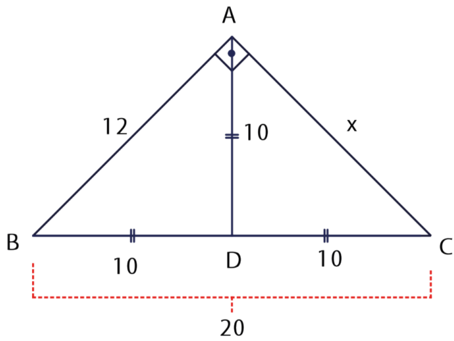


Yandaki şekilde $[BA] \perp [AC]$,

|AB| = 12 birim ve |AD| = 10 birim veriliyor.

|BD| = |DC| ise |AC| = x değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



Dik üçgende hipotenüse ait kenarortay uzunluğu hipotenüs uzunluğunun yarısı olduğundan

$$|AD| = \frac{|BC|}{2} \Rightarrow 10 = \frac{|BC|}{2} \Rightarrow |BC| = 20 \text{ olur.}$$

Pisagor teoremi ile

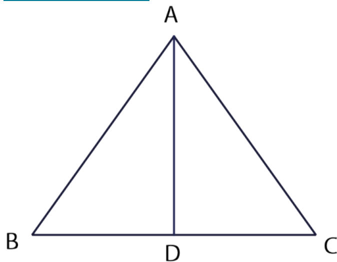
$|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$ ise

$12^2 + x^2 = 20^2$

$144 + x^2 = 400$

$x = 16$ birim olur.

ÖRNEK 22



Yandaki şekilde $m(\widehat{BAC}) < 90^\circ$ ve $V_a = 8$ birim ise |BC| nun alabileceği **en büyük** tam sayı değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

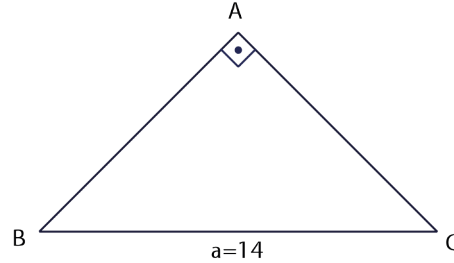
|BC| = a denirse $m(\widehat{BAC}) < 90^\circ$ olduğundan $V_a > \frac{a}{2} \Rightarrow 8 > \frac{a}{2} \Rightarrow 16 > a$ olur. Bu durumda |BC| nun en büyük tam sayı değeri 15 olur.



ÖRNEK 23

Bir $\widehat{ABC}$ için $m(\widehat{A}) = 90°$ ve $|BC| = 14$ cm olarak veriliyor. Bu üçgenin **en kısa** kenarortay uzunluğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



En kısa kenarortayın en büyük açıdan indiği bilinmektedir. $\widehat{ABC}$ için en büyük açı $\widehat{A}$ olduğundan en kısa kenarortay uzunluğu V_a olur. Bu durumda

$V_a = \frac{a}{2} \Rightarrow V_a = \frac{14}{2} \Rightarrow V_a = 7$ cm olur.

ÖRNEK 24

GeoGebra programı ile üçgen üzerinde değişiklikler yaparak ve üçgen çeşitlerine bağlı olarak değişikliklerin kenarortaylar üzerindeki etkisini inceleyiniz.

ÇÖZÜM

Grafik penceresine sağ tıklanarak "Grid" sekmesi seçilir.

Araç çubuğundaki 5. kutuya ve ardından açılan "Çokgen" sekmesine tıklanarak grafik penceresinde bir ABC üçgeni çizilir.

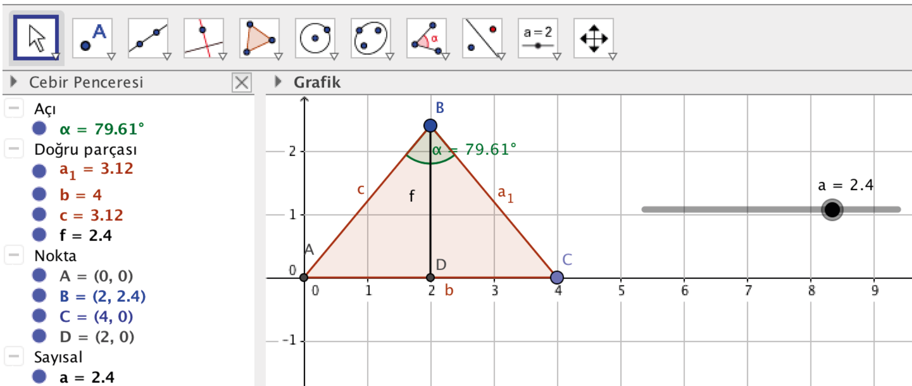
Araç çubuğundaki 1. kutuya, ardından cebir penceresindeki B noktasına çift tıklanarak sıralı ikilinin 2. bileşeni yerine "a" yazılır ve ENTER tuşuna basılır. Daha sonra araç çubuğundaki 10. kutuya ve ardından "Sürgü" sekmesine tıklanır.

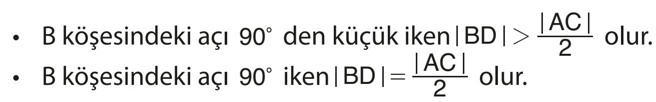
Açılan pencerede "a" yazılarak "Tamam" butonuna basılır. Daha sonra 8. kutuya ve ardından "Açı" sekmesine tıklanarak B köşesindeki açı belirlenir.

Araç çubuğundaki 2. kutuya ve ardından "Orta nokta ve merkez" sekmesine tıklanır. Daha sonra [AC] na tıklanırsa orta nokta olan D noktası belirlenir.

Araç çubuğundaki 3. kutuya ve ardından açılan pencerede "Doğru parçası" sekmesine tıklanarak B ile D birleştirilir ve B köşesine ait kenarortay olan [BD] oluşturulur.

Daha sonra sürgü sağa sola sürüklenirse

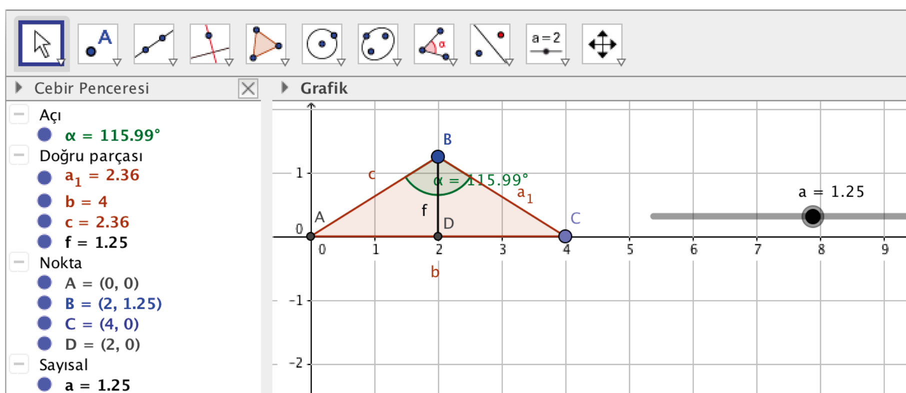




- B köşesindeki açı 90° den küçük iken $|BD| > \frac{|AC|}{2}$ olur.
- B köşesindeki açı 90° iken $|BD| = \frac{|AC|}{2}$ olur.

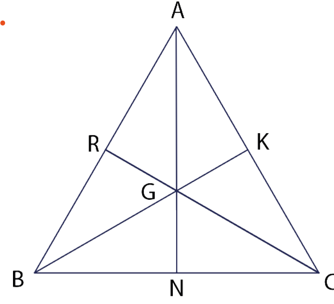


- B köşesindeki açı 90° den büyük iken $|BD| < \frac{|AC|}{2}$ olur.



ALIŞTIRMALAR

1.

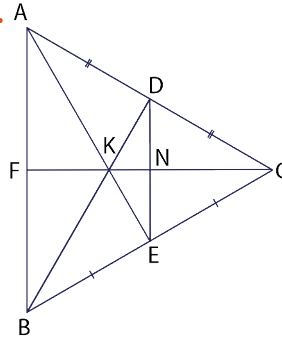


Yandaki şekilde G noktası $\widehat{ABC}$ nin ağırlık merkezidir.

$|AG| + |BG| + |CG| = 24$ birim

ise $V_a + V_b + V_c$ değerinin kaç birim olacağını bulunuz.

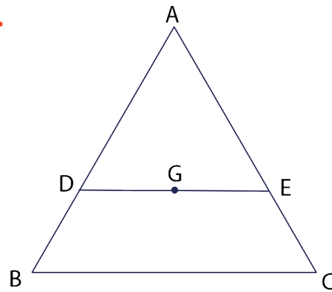
2.



Yandaki şekilde $|FK| = (3x - 1)$birim , $|KN| = (x+1)$birim,

$|AD| = |DC|$ ve $|BE| = |EC|$ ise $|NC|$nun kaç birim olacağını bulunuz.

3.



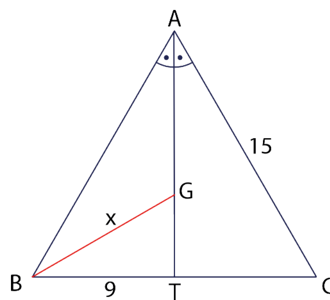
Ağırlık merkezi G olan yandaki $\widehat{ABC}$ nde

$[DE] \parallel [BC]$,

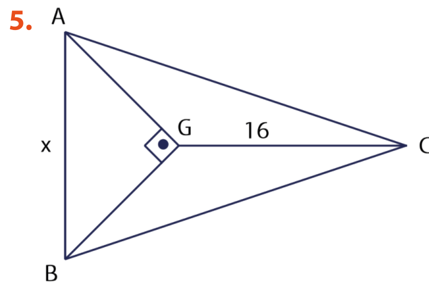
$|BD| = 4$ birim,

$|AE| = |DE| = 6$ birim ise Ç($\widehat{ABC}$) nin kaç birim olacağını bulunuz.

4.



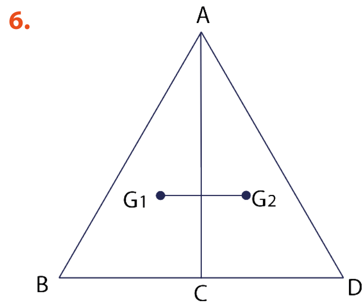
Yandaki $\widehat{ABC}$ nde [AT], $\widehat{A}$ nın açıortayı ve G noktası ise $\widehat{ABC}$ nin ağırlık merkezidir. $|AC| = 15$ birim ve $|BT| = 9$ birim ise $|BG| = x$ in kaç birim olacağını bulunuz.

5. 

Yandaki şekilde G noktası,

$\widehat{ABC}$ nin ağırlık merkezi olmak üzere $[AG] \perp [GB]$ ve $|GC| = 16$ birim ise

$|AB| = x$ in kaç birim olacağını bulunuz.

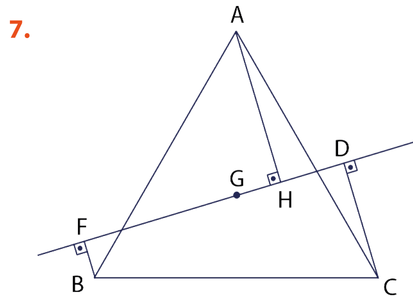
6. 

Yandaki şekilde G_1 $\widehat{ABC}$ nin, G_2 ise $\widehat{ACD}$ nin ağırlık merkezidir.

$[G_1 G_2] \,/\!/\, [BD]$ olmak üzere

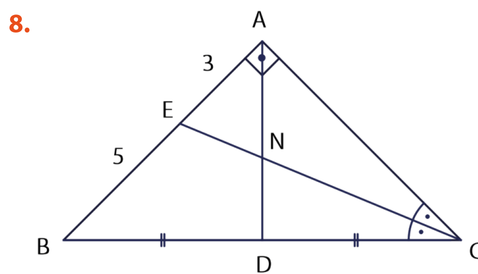
$|G_1 G_2| = 4$ birim ise

$|BD|$ nun kaç birim olacağını bulunuz.

7. 

Yandaki şekilde G, $\widehat{ABC}$ nin ağırlık merkezi ve $[FB] \,/\!/\, [AH] \,/\!/\, [DC]$ dir.

$|AH| = |FB| + |DC|$ olduğunu gösteriniz.

8. 

Yandaki $\widehat{ABC}$ nde $[AB] \perp [AC]$, $|AE| = 3$ birim, $|BE| = 5$ birim, $|BD| = |DC|$ ve $[CE]$, $\widehat{C}$ nın açıortayı olmak üzere

$|AN|$ nun kaç birim olacağını bulunuz.

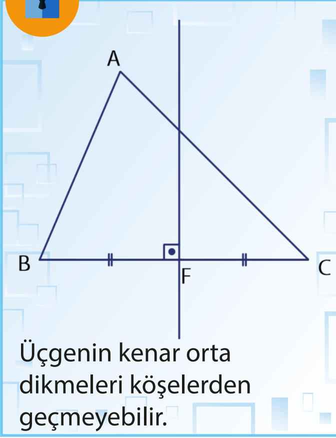
9. Bir $\widehat{ABC}$ için $m(\widehat{A})=90^\circ$ olarak veriliyor. Bu üçgenin ağırlık merkezinin hipotenüse uzaklığı 3 birim ise A köşesinin hipotenüse olan uzaklığını bulunuz.

9.4.3.3. Üçgenin Kenar Orta Dikmeleri

Üçgenin herhangi bir kenarının orta noktasından geçen ve bu kenara dik olan doğru parçasına **kenar orta dikme** denir.

Üçgenin kenar orta dikmeleri bir noktada kesişir.



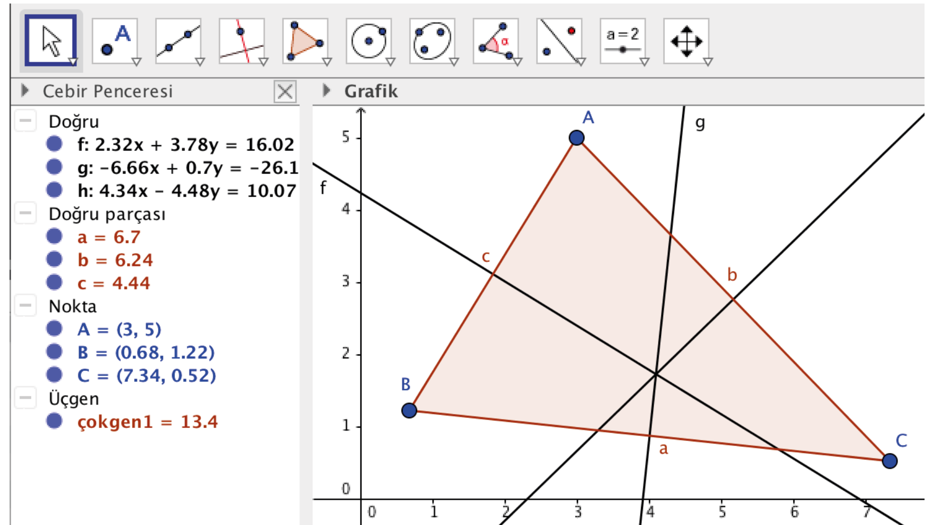


Üçgenin kenar orta dikmeleri köşelerden geçmeyebilir.

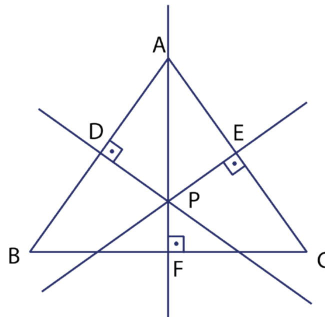
Yukarıdaki ifadenin GeoGebra programı ile gösterimi aşağıdaki gibidir.

- Önce program açılarak bir $\widehat{ABC}$ çizilir. Daha sonra araç çubuğundaki 4. kutuya ve ardından "Orta Dikme" sekmesine tıklanır. Daha sonra üçgenin her kenarına ayrı ayrı tıklanırsa kenarlara ait orta dikmeler çizilmiş olur.
- Şekle bakılırsa kenar orta dikmelerin bir noktada kesiştiği görülür.

Siz de dar açılı, dik açılı ve geniş açılı üçgenler çizerek kenar orta dikmelerin kesişim noktalarını inceleyiniz.



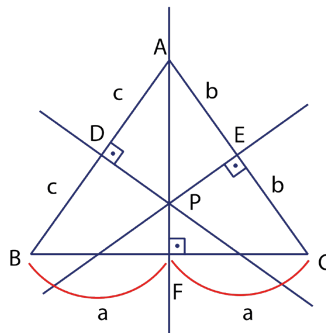
ÖRNEK 25



$\widehat{ABC}$ nin kenar orta dikmeleri P noktasında kesişmektedir.

$|AD| + |EC| + |FB| = 34$ birim ise Ç($\widehat{ABC}$) ni bulunuz.

ÇÖZÜM



$|AD| = c$, $|EC| = b$, $|BF| = a$ denirse

$|DB| = c$, $|AE| = b$, $|FC| = a$ olur.

$|AD| + |EC| + |FB| = 34 \Rightarrow c + b + a = 34$

$\Rightarrow 2 \cdot (c + b + a) = 68 \Rightarrow$ Ç($\widehat{ABC}$) = 68 birim

olur.

ÖRNEK 26

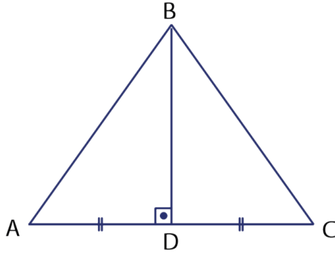
Bir $\widehat{ABC}$ nin B köşesine ait kenarortayı aynı zamanda [AC] nı dik olarak kesmektedir. Bu noktaya D noktası denirse aşağıda verilenlerin doğru olup olmadıklarını inceleyiniz.

I. [AC] nın kenar orta dikmesi [BD] dır.

II. $\widehat{ABC}$, ikizkenar üçgendir.

III. |AB| = |BC| tir.

ÇÖZÜM



I. [BD], [AC] üzerine hem kenarortay hem de dik olarak gittiği için [BD] na [AC] nın **kenar orta dikmesi** denir. Bu durumda I. doğrudur.

II. Bir ikizkenar üçgenin tepe açısından indirilen kenarortay aynı zamanda yükseklik olduğundan $\widehat{ABC}$ ikizkenar üçgen olur ve $\widehat{B}$, tepe açısıdır. Bu durumda II. doğrudur.

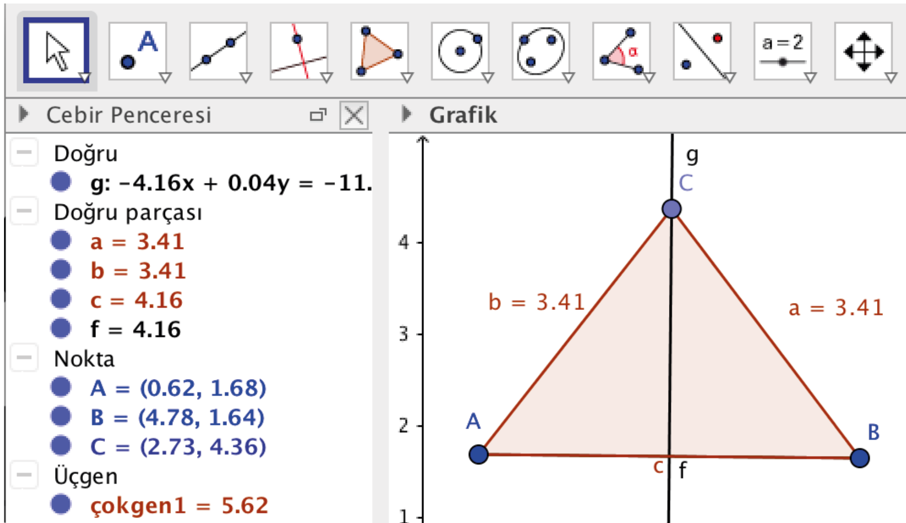
III. $\widehat{ABC}$ ikizkenar üçgen ve $\widehat{B}$, tepe açısı olduğundan |AB| = |BC| tir. Bu durumda III. doğrudur.

Bir doğru parçasının orta dikmesi üzerinde alınan her nokta, doğru parçasının uç noktalarına eşit uzaklıktadır ve bunun karşıtı da doğrudur.

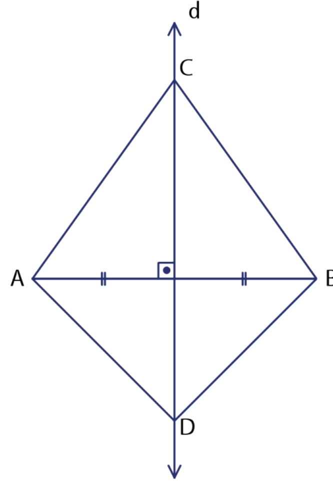
Yukarıdaki ifadenin GeoGebra programı ile gösterimi aşağıdaki gibidir.

- Araç çubuğundaki 3. kutuya ve ardından "Doğru parçası" sekmesine tıklanır. Ardından grafik penceresinde iki farklı noktaya tıklanarak [AB] oluşturulur.
- Araç çubuğundaki 4. kutuya ve ardından "Orta dikme" sekmesine tıklanır. Daha sonra [AB] üzerine tıklanarak kenar orta dikme doğrusu çizilir.
- Kenar orta dikme doğrusu üzerinde bir nokta seçilir ve bu nokta ile $\widehat{ACB}$ oluşturulur.
- Araç çubuğundaki 8. kutuya ve ardından "Uzaklık veya uzunluk" sekmesine tıklanır. Daha sonra [AC] ve [CB] üzerine tıklanırsa |AC| = |CB| olduğu görülür.

Siz de GeoGebra programını kullanarak yaptığımız işlemlerin karşıtının da doğru olduğunu gösteriniz.



ÖRNEK 27



Şekildeki d doğrusu, [AB] nın kenar orta dikmesidir. d doğrusu üzerindeki C ve D noktaları için
$|AC| = (x + 3)$ birim,
$|BC| = (17 - x)$ birim,
$|AD| = 8$ birim ise ADBC dörtgeninin çevresini bulunuz.

ÇÖZÜM

Kenar orta dikmesi üzerindeki bir nokta, doğru parçasının uç noktalarına eşit uzaklıktadır.

Doğru üstündeki C noktası için $|AC| = |CB| \Rightarrow x + 3 = 17 - x$

$\Rightarrow 2x = 14$

$\Rightarrow x = 7$ olur.

Bu durumda $|AC| = |CB| = 10$ bulunur.

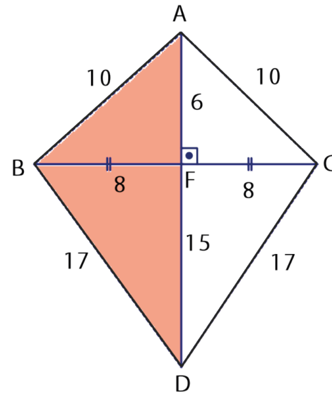
Doğru üstündeki D noktası için $|AD| = |DB| = 8$ birim olur.

Bu durumda $Ç(ADBC) = |AD| + |DB| + |BC| + |CA| = 8 + 8 + 10 + 10 = 36$ birim olur.

ÖRNEK 28

$|BC| = 16$ birim olacak şekilde [BC] çizilir. B ve C noktalarına 10 birim uzaklıktaki A noktası ile B ve C noktalarına 17 birim uzaklıktaki D noktası alınır. Bu durumda |AD| nun **en çok** kaç olabileceğini bulunuz.

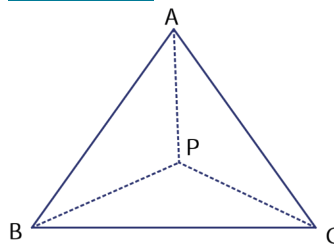
ÇÖZÜM



|AD| nun en çok olabilmesi için A noktası ile D noktası [BC] nın farklı tarafında olmalıdır. Bu durumda şekil yandaki gibi çizilirse |AD| en çok

$|AD| = |AF| + |FD| = 6 + 15 = 21$ birim olur.

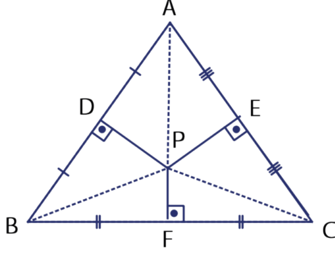
ÖRNEK 29



Şekildeki P noktası $\widehat{ABC}$ nin kenar orta dikmelerinin kesiştiği noktadır.

$|PA| = |PB| = |PC|$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM



P noktasından $\widehat{ABC}$ nin kenarlarına dikme indirilir. P noktası kenar orta dikmelerin kesim noktası olduğundan |AD| = |DB|, |AE| = |EC| ve |BF| = |FC| olur.

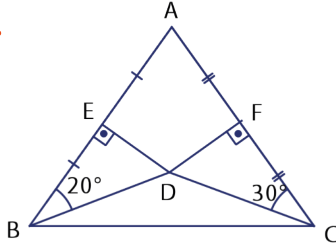
$\widehat{APC}$ için [PE], hem yükseklik hem kenarortay olduğundan $\widehat{APC}$, ikizkenar üçgendir ve |AP| = |PC| olur.

$\widehat{APB}$ için [PD], hem yükseklik hem kenarortay olduğundan $\widehat{APB}$ ikizkenar üçgendir ve |AP| = |PB| olur.

$\widehat{PBC}$ için [PF], hem yükseklik hem kenarortay olduğundan $\widehat{PBC}$, ikizkenar üçgendir ve |BP| = |PC| olur. Bu durumda |PA| = |PB| = |PC| olur.

ALIŞTIRMALAR

1.

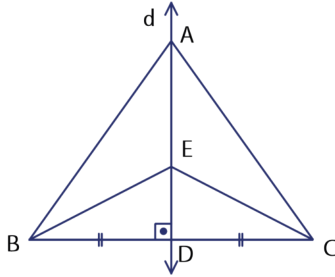


Yandaki şekilde [DE] ⊥ [AB], [DF] ⊥ [AC];

|AF| = |FC|, |AE| = |EB|; m($\widehat{ABD}$) = 20° ve

m($\widehat{ACD}$) = 30° ise m($\widehat{BDC}$) nü bulunuz.

2.

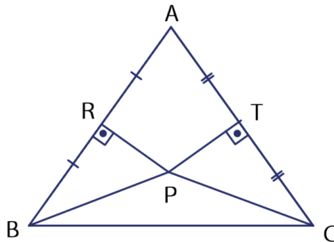


Yandaki şekilde [AD], [BC] nın kenar orta dikme doğrusu üstündedir.

|EC| = 6 birim ve |BA| = 11 birim ise

|AC| + |BE| değerini bulunuz.

3.



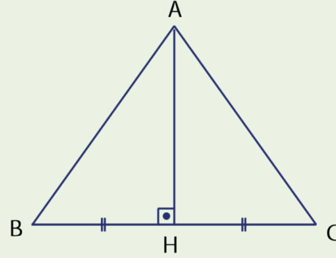
Yandaki şekilde P noktası, kenar orta dikmelerin kesim noktasıdır.

|PC| = 10 birim ve |AR| = 8 birim ise

|RP| nu bulunuz.

9.4.3.4. Üçgenin Çeşidine Göre Yüksekliklerin Kesiştiği Noktanın Konumu

Bir üçgende herhangi bir köşeden karşı kenara veya karşı kenarın uzantısına dik olarak indirilen doğru parçasına o kenara ait **yükseklik** denir.



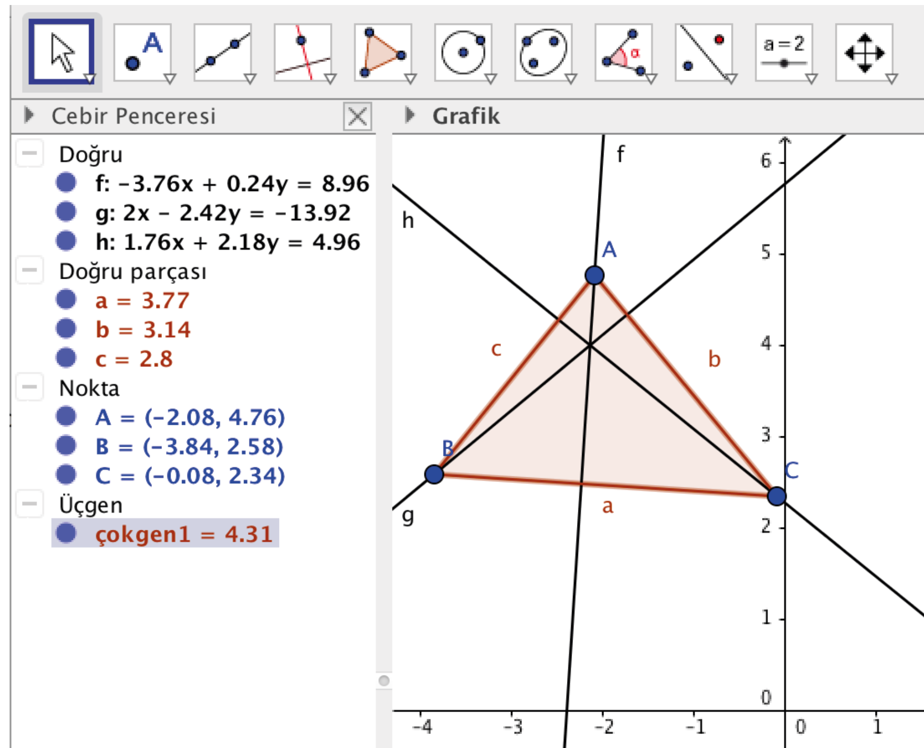
- Şekilde [AH], [BC] nın yüksekliğidir.
- H noktasına dikme ayağı denir.
- $|AH| = h_a$ ile gösterilir.

Üçgenin yükseklikleri bir noktada kesişir. Bu noktaya **diklik merkezi** denir.

Yüksekliklerin bir noktada kesiştiğinin GeoGebra programı ile gösterimi aşağıdaki gibidir.

1. Dar açılı üçgende yüksekliklerin kesiştiği nokta

Araç çubuğundaki 5. kutuya ve ardından açılan "Çokgen" sekmesine tıklanarak grafik penceresinde dar açılı bir üçgen çizilir. Daha sonra araç çubuğundaki 4. kutuya ve ardından açılan "Dik doğru" sekmesine tıklanır. Çizilmiş olan dar açılı $\widehat{ABC}$ nin A köşesine ve karşı kenarına, B köşesine ve karşı kenarına, C köşesine ve karşı kenarına tıklanarak yükseklikler çizilmiş olur.

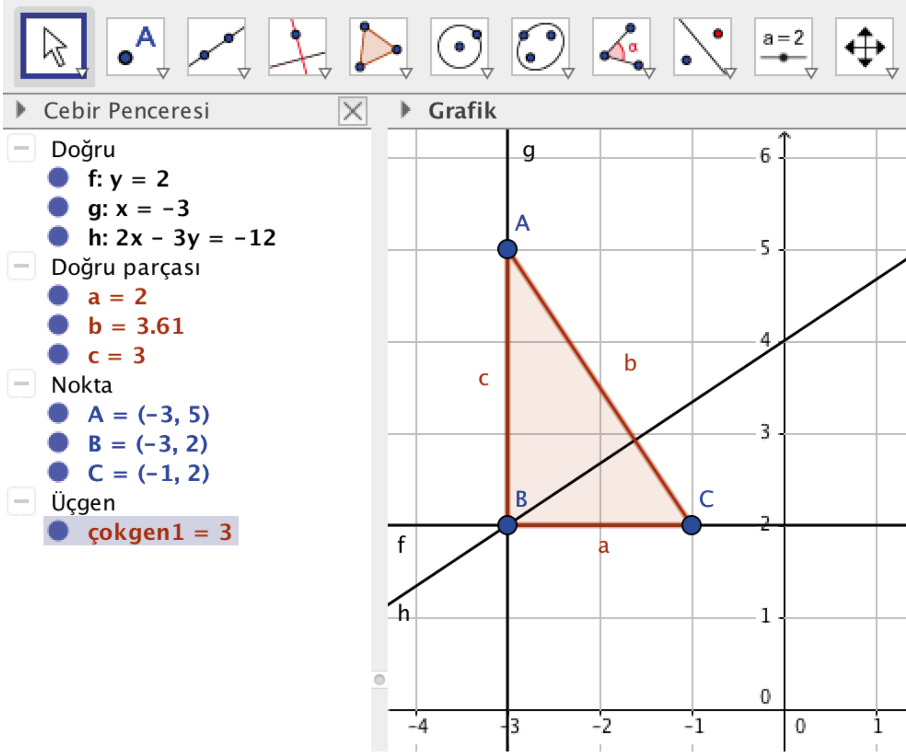


Görsele bakıldığında dar açılı üçgenin yüksekliklerinin üçgenin iç bölgesinde kesiştiği görülür.



2. Dik açılı üçgende yüksekliklerin kesiştiği nokta aşağıdaki gibi gösterilir.

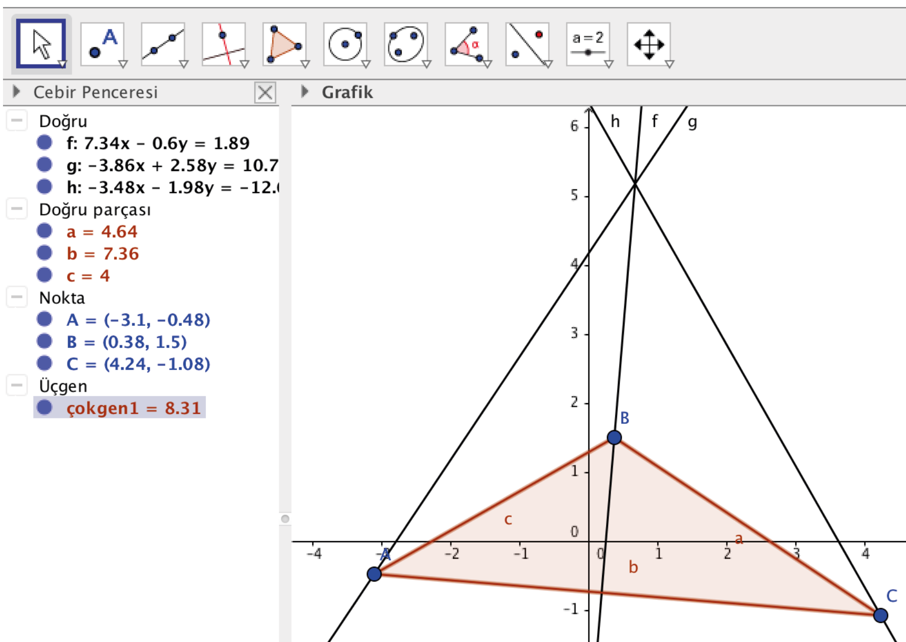
Araç çubuğundaki 5. kutuya ve ardından açılan "Çokgen" sekmesine tıklanarak grafik penceresinde bir dik üçgen çizilir. Grafik penceresine sağ tıklayarak açılan pencerede "Grid" sekmesi seçilirse dik üçgen daha kolay çizilebilir. Daha sonra araç çubuğundaki 4. kutuya ve ardından açılan "Dik doğru" sekmesine tıklanır. Çizilmiş olan $\widehat{ABC}$ nin A köşesine ve karşı kenarına, B köşesine ve karşı kenarına, C köşesine ve karşı kenarına tıklanarak yükseklikler çizilmiş olur.



Görsele bakıldığında dik açılı üçgenin yüksekliklerinin dik açının olduğu köşede kesiştiği görülür.

3. Geniş açılı üçgende yüksekliklerin kesiştiği nokta aşağıdaki gibi gösterilir.

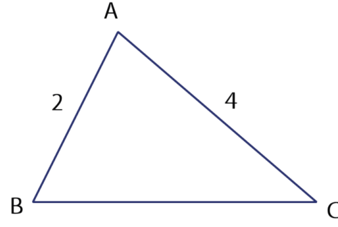
Önceki adımlarda öğrenilenlerle geniş açılı $\widehat{ABC}$ ve bu üçgenin her bir köşesine ait yükseklikler çizilir.



Görsele bakıldığında geniş açılı üçgenin yüksekliklerinin üçgenin dış bölgesinde ve geniş açının ters tarafında kesiştiği görülür.

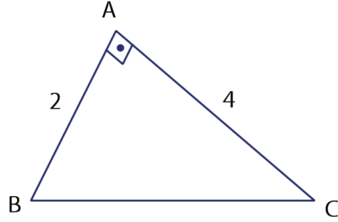


ÖRNEK 30



Yandaki $\overset{\frown}{ABC}$ nin diklik merkezi A köşesi ise |BC| nu bulunuz.

ÇÖZÜM



Sadece dik üçgende diklik merkezi, 90º lik açının olduğu köşededir. O hâlde

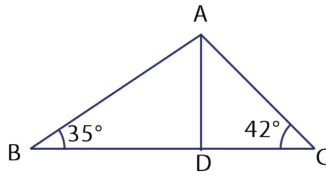
$m(\widehat{A}) = 90^\circ$ ve Pisagor teoremi ile

$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 \Rightarrow |BC|^2 = 2^2 + 4^2$

$\Rightarrow |BC|^2 = 20$

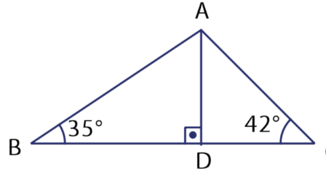
$\Rightarrow |BC| = 2\sqrt{5}$ birimdir.

ÖRNEK 31



D noktası $\overset{\frown}{ABC}$ nin [BC] na ait dikme ayağı ise $m(\widehat{BAD}) - m(\widehat{CAD})$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



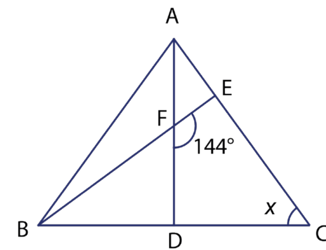
D noktası dikme ayağı olduğundan $[AD] \perp [BC]$ olur.

Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamından

$m(\widehat{BAD}) = 55^\circ$ ve $m(\widehat{CAD}) = 48^\circ$ bulunur.

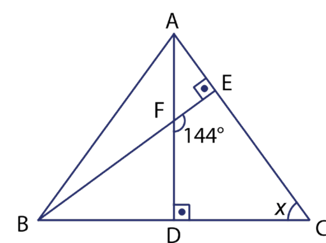
Bu durumda $m(\widehat{BAD}) - m(\widehat{CAD}) = 55^\circ - 48^\circ = 7^\circ$ olur.

ÖRNEK 32



Şekilde $\overset{\frown}{ABC}$ nde $m(\widehat{EFD}) = 144^\circ$ dir. F noktası $\overset{\frown}{ABC}$ nin diklik merkezi ise $m(\widehat{C}) = x$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



F noktası diklik merkezi ise

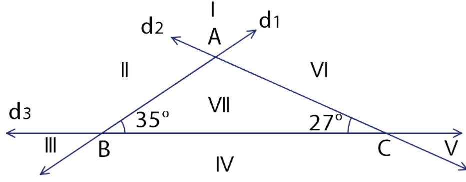
$[AD] \perp [BC]$ ve $[BE] \perp [AC]$ olur. FECD dörtgeninin iç açıları toplamı 360° olduğundan

$144^\circ + 90^\circ + 90^\circ + x = 360^\circ$

$324^\circ + x = 360^\circ$

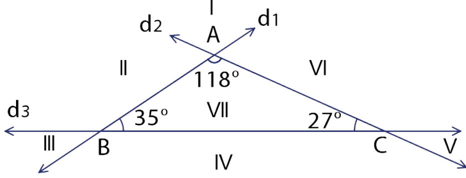
$x = 36^\circ$ olur.

ÖRNEK 33

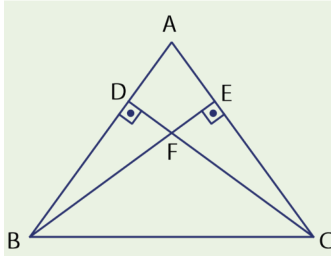


Şekildeki d_1, d_2 ve d_3 doğrularının kesişimi ile oluşturulan $\widehat{ABC}$ nin diklik merkezinin hangi bölgede olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



$\widehat{ABC}$ geniş açılı üçgen olduğundan diklik merkezi, dış bölgede ve geniş açının ters tarafındadır. O hâlde $\widehat{ABC}$ nin diklik merkezi I nolu bölgede olur.



Şekildeki ABC ikizkenar üçgeninde
$[BE] \cap [CD] = \{F\}$

$|AB| = |AC|$ ve F noktası diklik merkezi ise

$|FB| = |FC|$,

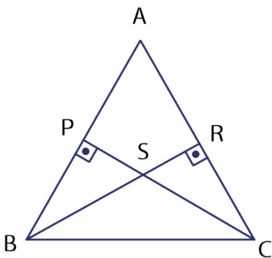
$|FD| = |FE|$,

$|BD| = |CE|$,

$|BE| = |CD|$,

$|AD| = |AE|$ eşitlikleri vardır..

ÖRNEK 34



Şekilde $\widehat{ABC}$ ikizkenar üçgen ve

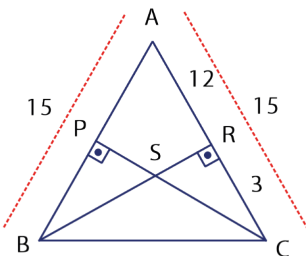
$|AB| = |AC|$ tir.

$[BR] \perp [AC]$,

$[CP] \perp [AB]$,

$|AB|= 15$ birim ve $|RC| = 3$ birim ise $|BR|$ nu bulunuz.

ÇÖZÜM



$|AB| = |AC| \Rightarrow |AB| = |AR| + |RC|$

$\Rightarrow 15 = |AR| + 3$

$\Rightarrow 12 = |AR|$ olur.

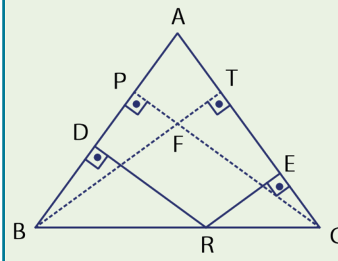
$\widehat{ABR}$ dik üçgen olduğundan Pisagor teoremi ile

$|AB|^2 = |AR|^2 + |BR|^2 \Rightarrow 15^2 = 12^2 + |BR|^2$

$\Rightarrow 225 = 144 + |BR|^2$

$\Rightarrow 81 = |BR|^2$

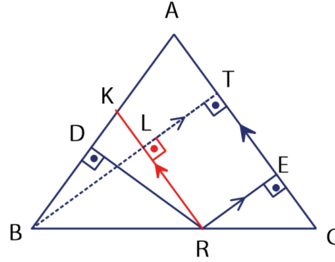
$\Rightarrow |BR| = 9$ birimdir.



İkizkenar üçgenin tabanında alınan bir noktadan diğer kenarlara çizilen dikmelerin uzunlukları toplamı, üçgenin eş olan kenarlarına ait yüksekliklerinin uzunluklarına eşittir. |AB| = |AC| olan şekildeki ikizkenar üçgen için

|RD| + |RE| = |BT| = |CP| olur.

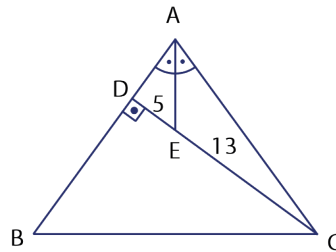
Bu özelliğin doğruluğu aşağıdaki gibi yapılabilir.



[BT] ⊥ [RK] çizilerek kesiştikleri noktaya L denilir. Bu durumda [CA] ⫽ [RK] dır ve $\widehat{RKB}$ ikizkenar üçgendir. O hâlde |RD| = |BL| olur.
Ayrıca [BT] ⫽ [RE] olduğundan RLTE dikdörtgen olur ve |RE| = |LT| olur.

Bu durumda |RD| + |RE| = |BL| + |LT| = |BT| bulunur (|RD| yerine |BL|, |RE| yerine |LT| yazılmıştır.). Aynı ölçüdeki açıya ait yükseklikler eşit olduğundan |BT| = |CP| olur.
Sonuç olarak |RD| + |RE| = |BT| = |CP| olur.

ÖRNEK 35



Şekilde $\widehat{ABC}$ için

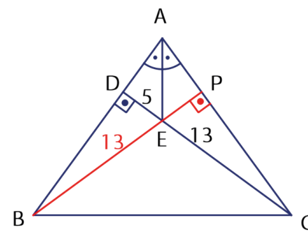
|AB| = |AC|,

m($\widehat{BAE}$) = m($\widehat{CAE}$),

|DE| = 5 birim,

|EC| = 13 birim ise |DB| nu bulunuz.

ÇÖZÜM



|AB| = |AC| ise m($\widehat{B}$)=m($\widehat{C}$) olur. Bu durumda B ve C köşelerinden indirilen yükseklikler eşittir. Bunun için [BP] ⊥ [AC] olacak şekilde B köşesinden yükseklik indirilirse |BE| = |CE| = 13 birim olur.

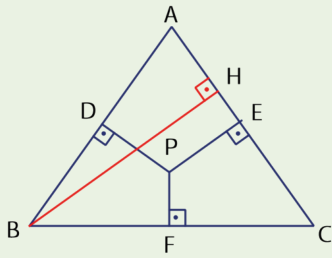
$\widehat{BDE}$ dik üçgen olduğundan $|BE|^2 = |DE|^2 + |DB|^2 \Rightarrow 13^2 = 5^2 + |DB|^2$

$\Rightarrow 169 = 25 + |DB|^2$

$\Rightarrow 144 = |DB|^2$

$\Rightarrow |DB| = 12$ birim olur.



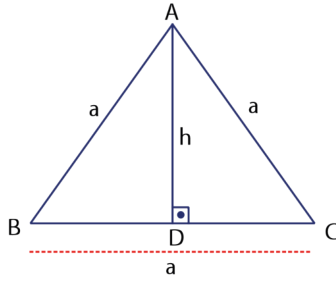


Eşkenar üçgen içinde alınan bir noktadan kenarlara indirilen dikmelerin uzunlukları toplamı, eşkenar üçgenin yüksekliğine eşittir.

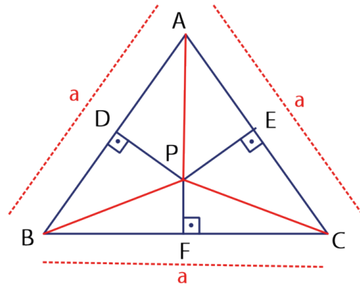
Şekilde eşkenar üçgen olan $\widehat{ABC}$ nde

$|PD| + |PE| + |PF| = |BH|$ olur.

Bu özelliğin doğruluğu aşağıdaki gibi yapılabilir.



$$A(\widehat{ABC}) = \frac{a \cdot h}{2}$$

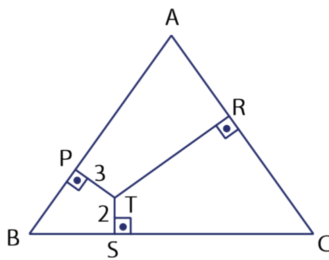


$$A(\widehat{ABC}) = A(\widehat{APC}) + A(\widehat{APB}) + A(\widehat{BPC})$$
$$= a \cdot \frac{|PE|}{2} + a \cdot \frac{|PD|}{2} + a \cdot \frac{|PF|}{2}$$
$$= \frac{a}{2} \cdot (|PE| + |PD| + |PF|)$$

Her iki üçgen de eş olduğundan alanları eşittir. Bu durumda

$\frac{a}{2} \cdot (|PE| + |PD| + |PF|) = \frac{a \cdot h}{2} \Rightarrow |PE| + |PD| + |PF| = h$ olur.

ÖRNEK 36



Şekilde ABC eşkenar üçgeninin yüksekliği 12 birimdir.

$|PT| = 3$ birim,

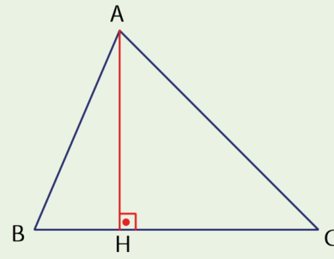
$|ST| = 2$ birim ise $|RT|$ nu bulunuz.

ÇÖZÜM

Eşkenar üçgen içindeki T noktasından kenarlara dikmeler indirilmiştir. Bu durumda $|PT| + |ST| + |RT| = 12 \Rightarrow 3 + 2 + |RT| = 12$

$\Rightarrow |RT| = 7$ birimdir.

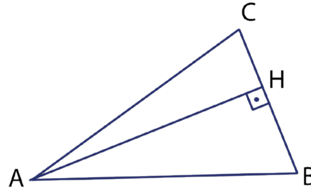




Üçgenin bir köşesinden karşı kenara veya karşı kenarın uzantısına indirilen dikme ayağı, diğer köşelerdeki büyük açıya daha yakındır.

Şekilde $m(\widehat{B}) > m(\widehat{C}) \Rightarrow |HB| < |HC|$ olur.

ÖRNEK 37



Şekildeki üçgende H noktası, A köşesinin [BC] üzerindeki dikme ayağıdır.

$|AC| = 9$ birim,

$|BC| = 4$ birim,

$|BH| > |HC|$ ise $|AB|$ nun alabileceği değerlerin aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Üçgen eşitsizliği ile $9 - 4 < |AB| < 9 + 4 \Rightarrow 5 < |AB| < 13$ olur.

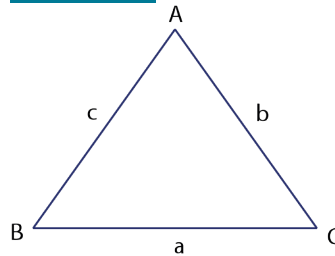
Dikme ayağı büyük açıya daha yakındır. $|BH| > |HC|$ olduğundan ($|HC|$ daha kısa olduğundan) $m(\widehat{C}) > m(\widehat{B})$ olur. Büyük açı karşısında büyük kenar bulunduğundan $c > b$ yani $|AB| > 9$ olur.

Bu durumda istenen aralık $9 < |AB| < 13$ olur.

Herhangi bir üçgende kenar uzunlukları arasındaki sıralama ile bu kenara ait yükseklikler arasındaki sıralama ters orantılıdır. Büyük kenara ait yükseklik, küçük kenara ait yükseklikten daha küçüktür.

Bir $\overset{\frown}{ABC}$ için $a \leq b \leq c \Rightarrow h_a \geq h_b \geq h_c$ olur.

ÖRNEK 38



Şekildeki $\overset{\frown}{ABC}$ için

$a + b = 26$,

$a + c = 20$,

$b + c = 22$ ise h_a, h_b ve h_c değerlerini sıralayınız.

ÇÖZÜM

$$\begin{array}{r} a+b=26 \\ a+c=20 \\ +\quad b+c=22 \\ \hline 2a+2b+2c=68 \\ a+b+c=34 \text{ olur.} \end{array}$$

$a+b+c=34$ ve $a+b=26 \Rightarrow c=8$ birim olur.

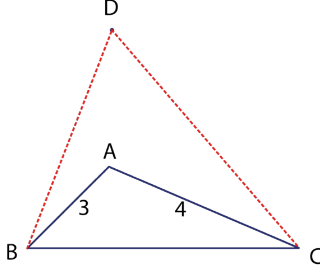
$a+b+c=34$ ve $a+c=20 \Rightarrow b=14$ birim olur.

$a+b+c=34$ ve $b+c=22 \Rightarrow a=12$ birim olur.

Kenar uzunlukları ile bu kenarlara ait yükseklikleri ters orantılı olduğundan

$b > a > c \Rightarrow h_b < h_a < h_c$ olur.

ÖRNEK 39



Şekildeki $\widehat{ABC}$ nin diklik merkezi D noktasıdır.

$|AB| = 3$ birim ve $|AC| = 4$ birim ise $|BC|$ nun **en geniş** değer aralığını bulunuz.

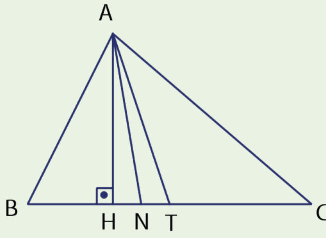
ÇÖZÜM

Üçgen eşitsizliği ile $4 - 3 < |BC| < 4 + 3 \Rightarrow 1 < |BC| < 7$ olur.

Geniş açılı üçgenlerde diklik merkezi, dışarıda ve geniş açının ters tarafında olduğundan $m(\widehat{A}) > 90°$ olur.

Bu durumda $|BC|^2 > 3^2 + 4^2 \Rightarrow |BC|^2 > 25 \Rightarrow |BC| > 5$ olur.

$1 < |BC| < 7$ ve $|BC| > 5$ olduğundan $|BC|$ nun en geniş değer aralığı $5 < |BC| < 7$ olur.



Bir üçgenin herhangi bir köşesine ait olan yükseklik, açıortay ve kenarortay uzunlukları arasında $h \le n \le V$ bağıntısı vardır.

Şekildeki $\widehat{ABC}$ için

$h_a = |AH|$, $n_A = |AN|$ ve $V_a = |AT|$ olmak üzere $h_a \le n_A \le V_a$ olur.

- $\widehat{ABC}$ çeşitkenar üçgen ise $h_a < n_A < V_a$ olur.
- $\widehat{ABC}$ için $|AB| = |AC|$ ise $h_a = n_A = V_a$ olur.

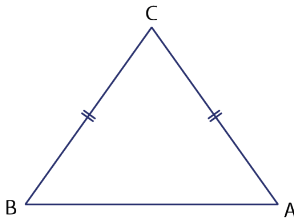
ÖRNEK 40

I. $h_a = 4$ birim ve $n_A = 4$ birim ise $V_a = 4$ birimdir.

II. $|BC| = |CA|$ ise $h_c = n_C = V_c$ olur.

Herhangi bir $\widehat{ABC}$ için yukarıda verilenlerin doğruluğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



I. $h_a = 4$ birim ve $n_A = 4$ birim $\Rightarrow h_a = n_A$

$\Rightarrow h_a = n_A = V_a$

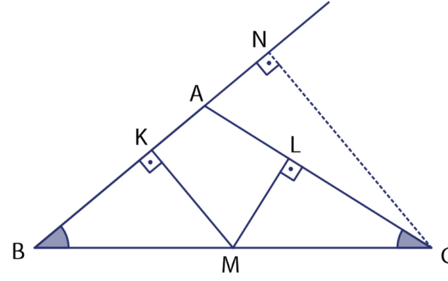
$\Rightarrow V_a = 4$ birimdir.

Bu durumda I. doğrudur.

II. $|BC| = |CA|$ ise $\widehat{ABC}$ ikizkenar üçgendir. Eşit kenarların kesiştiği nokta C noktası olduğu için $h_c = n_C = V_c$ olur.

Bu durumda II. doğrudur.

ÖRNEK 41



Şekilde $|AB| = |AC|$ olan $\widehat{ABC}$ nin [AB] na ait yüksekliği [CN] dır.

$|KM| + |ML| = 4$ birim ve $|AN| = 3$ birim olmak üzere $|AC|$ nu bulunuz.

ÇÖZÜM

İkizkenar üçgende tabanda alınan bir noktadan kenarlara çizilen dikmelerin uzunlukları toplamı, eş olan kenarlardan birine ait yüksekliğe eşittir.

O hâlde $|KM| + |ML| = |CN| \Rightarrow 4 = |CN|$ olur.

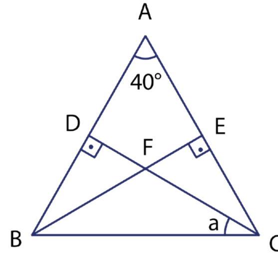
$\widehat{ANC}$ için Pisagor teoremi ile $|AC|^2 = |AN|^2 + |NC|^2 \Rightarrow |AC|^2 = 3^2 + 4^2$

$\Rightarrow |AC|^2 = 25$

$\Rightarrow |AC| = 5$ birimdir.

ALIŞTIRMALAR

1.



Şekilde

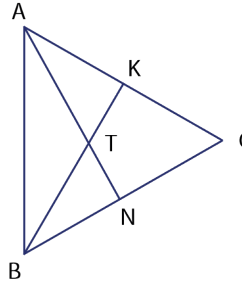
$|AB| = |AC|$,

$m(\widehat{BAC}) = 40°$,

$[AB] \perp [DC]$ ve $[BE] \perp [AC]$ ise

$m(\widehat{DCB})$ nü bulunuz.

2.



$\widehat{ABC}$ nin diklik merkezi T noktasıdır.

$m(\widehat{NBT}) = 25°$ ve $m(\widehat{BAK}) = 55°$ ise

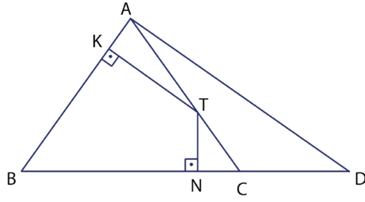
$m(\widehat{BAT})$ nü bulunuz.

3. $\widehat{ABC}$ için kenar uzunlukları a = 10 birim, b = 11 birim ve c = 7 birim ise h_a, h_b ve h_c değerlerini sıralayınız.

4. ABC eşkenar üçgeninin iç bölgesinde alınan bir noktadan kenarlara çizilen dikmelerin toplamı $6\sqrt{3}$ birim ise bu üçgenin her bir kenarına ait yüksekliklerin toplamını bulunuz.

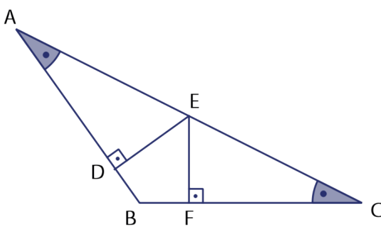


5.



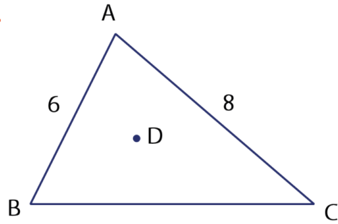
$\widehat{ABD}$ nde
$|AB| = |BC|$,
$|KT| = 5$ birim,
$|TN| = 3$ birim,
$|CD| = 4$ birim ve $|AD| = 10$ birim ise
$|AB|$ nu bulunuz.

6.



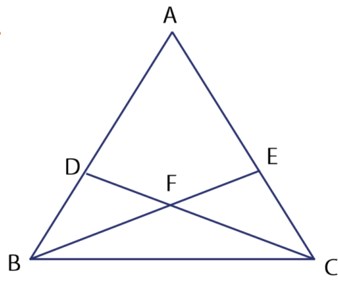
$\widehat{ABC}$ için m($\widehat{BAC}$) = m($\widehat{BCA}$) tir.
$|DE| + |EF| = 8$ birim ve
$|BC| = 10$ birim ise
$|AC|$ nu bulunuz.

7.



D noktası, $\widehat{ABC}$ nin diklik merkezi ise $|BC|$ nun alabileceği tam sayı değerleri toplamını bulunuz.

8.



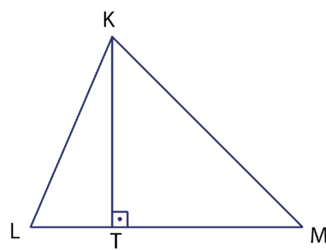
$\widehat{ABC}$ nin diklik merkezi F noktasıdır.

$|AB| = |AC|$,

$|DB| = 4$ birim,

$|AE| = 6$ birim ise $|DF|$ nu bulunuz.

9.



Şekildeki $\widehat{KLM}$ nde $|TL| < |TM|$ tür.
$|KL| = 8$ birim ve $|LM| = 12$ birim ise $|KM|$ nun alabileceği değer aralığını bulunuz.

10. Çeşitkenar olan $\widehat{ABC}$ için $h_a = (x - 2)$ birim, $n_A = (2x - 3)$ birim ve $V_a = (x + 2)$ birim ise x in alabileceği **en küçük** tam sayı ile **en büyük** tam sayı değerleri toplamını bulunuz.





Terimler ve Kavramlar

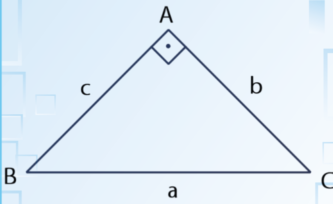
- Pisagor Teoremi
- Öklid Teoremi
- Trigonometrik Oran



Sembol ve Gösterimler

sinx, cosx
tanx, cotx





Bir açısı 90° olan üçgene **dik üçgen** denir.
90° nin karşısındaki kenara **hipotenüs**, diğer kenarlara **dik kenarlar** denir.
Hipotenüs uzunluğu dik kenar uzunluklarından daha büyüktür.
$a > b$
$a > c$

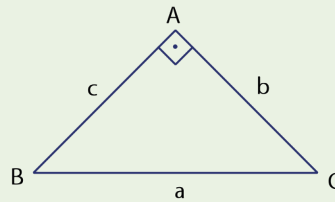
9.4.4. Dik Üçgen ve Trigonometri

Neler Öğreneceksiniz?

- Dik üçgende Pisagor teoremini elde etmeyi,
- Öklid teoremini elde etmeyi,
- Dik üçgende dar açıların trigonometrik oranlarını hesaplamayı,
- Birim çemberi tanımlamayı ve trigonometrik oranları birim çemberin üzerindeki noktaların koordinatları ile ilişkilendirmeyi öğreneceksiniz.

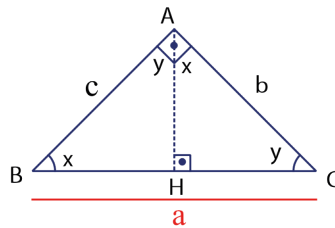
9.4.4.1. Dik Üçgende Pisagor Teoremi

- Pisagor, Dünya'nın Güneş etrafında hareket ettiğini keşfetmiştir.
- Pisagor, geometri alanında aksiyomları ve postulatları kullanarak bu alandaki ilk verileri elde etmiştir. Matematik alanına aksiyomatik ve ispat fikrini kazandırmıştır.
- Pisagor, çarpma cetvelini bulmuş ve geometri alanında uygulamıştır.
- Doğadaki her şeyin matematiksel olarak yorumlanabileceğini öne süren Pisagor, aynı zamanda yaşayış ve inanışın da matematik ile yorumlanabileceğini ortaya atmıştır.
- Telin uzunluğuna göre müzik notalarının değişkenlik gösterdiğini ifade etmiş ve notaların sayılarla yorumlanması üzerinde çalışmıştır.
- Pisagor teoremi adı verilen teoremi matematik alanına kazandırmıştır. Pisagor teoreminde rasyonel sayılarla ölçümü yapılamayan uzunlukların var olduğunu ispatlamıştır.



Bir dik üçgende dik kenarların uzunluklarının karelerinin toplamı, hipotenüs uzunluğunun karesine eşittir. Şekildeki $\widehat{ABC}$ için $m(\widehat{A}) = 90°$ olduğundan $a^2 = b^2 + c^2$ olur.

Bu özelliğin doğruluğu aşağıdaki gibi yapılabilir.



A köşesinden BC kenarına indirilen dikme ayağının $[BC]$ ile kesiştiği nokta H olarak adlandırılarak açılar şekildeki gibi yerleştirilsin. A. A. benzerlik kuralı ile $\widehat{CAH} \sim \widehat{CBA}$ ve $\widehat{BAH} \sim \widehat{BCA}$ olur.

$$\widehat{CAH} \sim \widehat{CBA} \Rightarrow \frac{|CA|}{|CB|} = \frac{|CH|}{|CA|} \Rightarrow |CH| = \frac{|CA|^2}{|CB|} \text{ olur.}$$

$$\widehat{BAH} \sim \widehat{BCA} \Rightarrow \frac{|BA|}{|BC|} = \frac{|BH|}{|BA|} \Rightarrow |BH| = \frac{|BA|^2}{|BC|} \text{ olur.}$$

$$|BC| = |BH| + |HC| \Rightarrow |BC| = \frac{|BA|^2}{|BC|} + \frac{|CA|^2}{|CB|} \Rightarrow |BC| = \frac{|BA|^2 + |CA|^2}{|BC|}$$

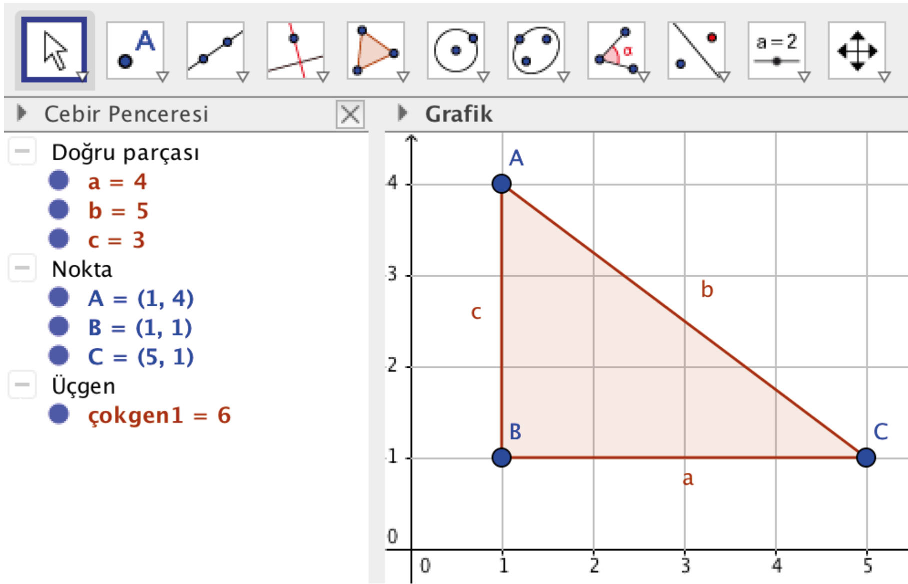
$$\Rightarrow |BC|^2 = |BA|^2 + |CA|^2$$

$$\Rightarrow \quad a^2 = b^2 + c^2 \text{ olur.}$$



Pisagor teoreminin GeoGebra programı kullanılarak gösterimi

Araç çubuğundaki 5. kutuya ve ardından açılan "Çokgen" sekmesine tıklanır. Sonra grafik penceresinde bir dik üçgen çizilir (Grafik penceresinde boşluğa tıklanarak "Grid" sekmesi seçilirse dik üçgen daha kolay çizilebilir.).

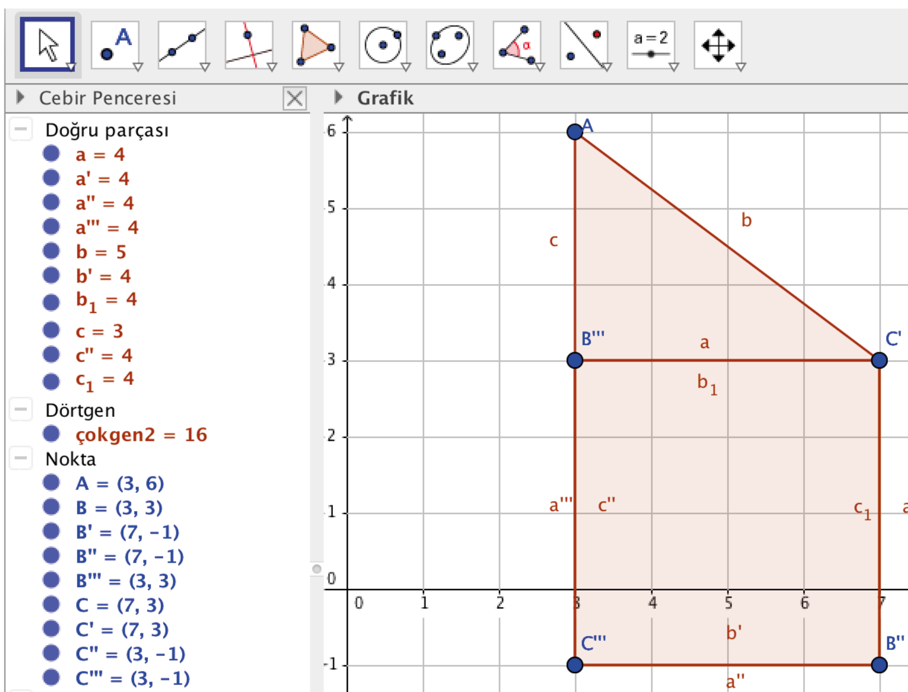


Araç çubuğundaki 9. kutuya ve ardından açılan "Nesneyi nokta etrafında döndür" sekmesine tıklanır. Sonra aşağıdaki adımlar uygulanır.

Önce [BC] na, ardından C noktasına tıklanır ve açılan pencerede 90° yazılır. "Saatin tersi yönünde" seçeneği ile "Tamam" butonuna basılır.

Yeni oluşan kenara ve ardından B' noktasına tıklanarak bir önceki adımda yapılanlar tekrarlanır. Kenarlardan biri [BC] olan kare oluşana kadar bu işlemlere devam edilir.

Araç çubuğundaki 5. kutuya ve ardından açılan "Çokgen" sekmesine tıklanıp [BC] na ait kare oluşturulur.

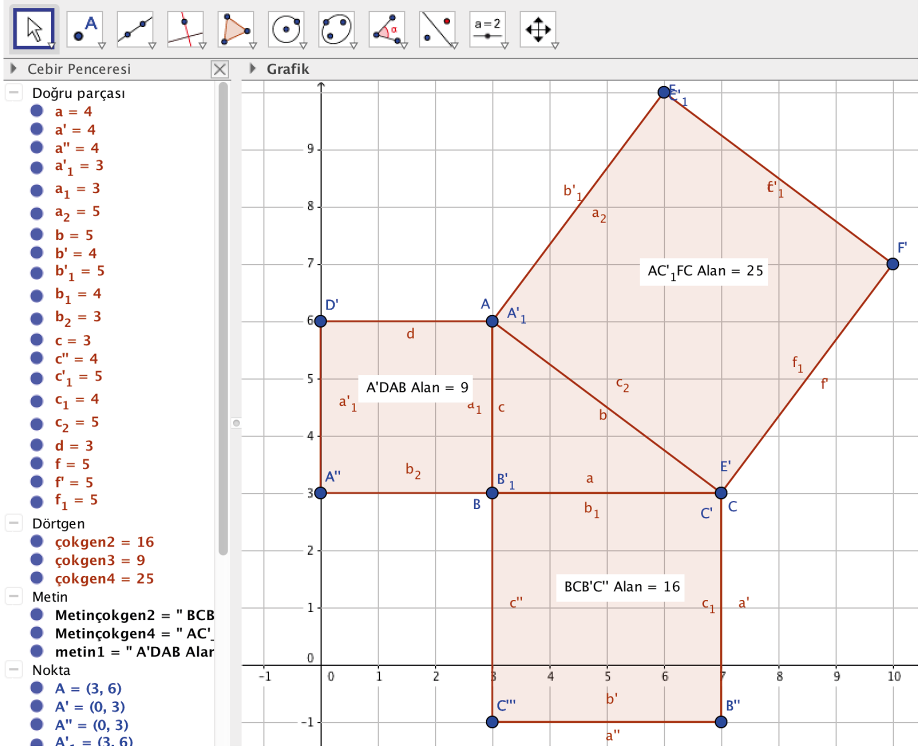




Tüm bu işlemler [AB] ve [AC] içinde yapılarak aşağıdaki gibi bir görsel elde edilir.

Araç çubuğundaki 8. kutuya, ardından açılan "Alan" sekmesine ve sonra oluşan karelerin iç bölgesine tıklanırsa her bir karenin alanı bulunmuştur.

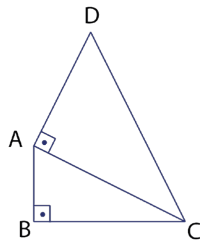
Tüm bu işlemler sonunda dik kenarlara ait karelerin alanları toplamının hipotenüse ait karenin alanına eşit olduğu görülür.



Çizilen kareler Pisagor teoremini anlatmaktadır.

GeoGebrada yapılan bu işlemlerde her kenarın üzerine kare kurulmuştu. Aslında sadece kare değil, her kenar üzerine kurulan düzgün çokgenler için de bu işlemler geçerlidir. Siz de GeoGebra'da bu durumu uygulayabilirsiniz.

ÖRNEK 1



$[AB] \perp [BC]$ ve $[AC] \perp [AD]$ olmak üzere $|AB| = 1$ birim, $|BC| = 2$ birim ve $|AD| = \sqrt{11}$ birimdir.

Şekilde verilenlere göre $|DC|$ nu bulunuz.

ÇÖZÜM

$\widehat{ABC}$ için $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$

$|AC|^2 = 1^2 + 2^2$

$|AC|^2 = 5$

$|AC| = \sqrt{5}$ birim olur.

$\widehat{ADC}$ için $|DC|^2 = |AD|^2 + |AC|^2$

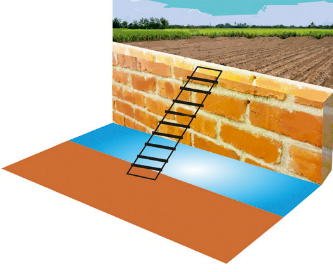
$|DC|^2 = (\sqrt{11})^2 + (\sqrt{5})^2$

$|DC|^2 = 11 + 5$

$|DC|^2 = 16$

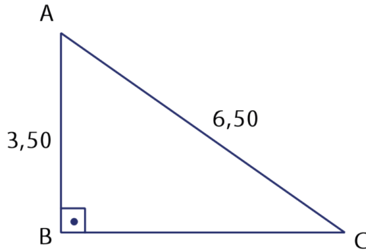
$|DC| = 4$ birim olur.

ÖRNEK 2



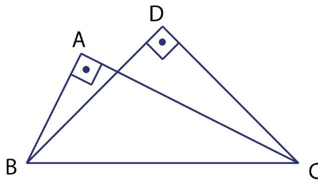
Bir arsanın etrafına 3,50 m yüksekliğinde duvar örülmüştür. Duvarın dibinden su yolu geçmektedir. Duvarın üstüne dikenli tel çekmek isteyen arsa sahibinin kullanacağı merdivenin bir ucu duvarın en tepesinde diğer ucu ise su yolunun duvar dibinde olmayan tarafındadır. Merdivenin boyu 6,50 m ise su yolunun eninin kaç metre olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$$
$$(6,50)^2 = (3,50)^2 + x^2$$
$$(6,50)^2 - (3,50)^2 = x^2$$
$$(6,50 - 3,50)\cdot(6,50 + 3,50) = x^2$$
$$3 \cdot 10 = x^2$$
$$30 = x^2$$
$$x = \sqrt{30} \text{ metredir.}$$

ÖRNEK 3



Şekilde [AB] ⊥ [AC] ve [BD] ⊥ [DC] tir.

|AB| = 2 birim, |DC| = 4 birim ve

$|BC| = 2\sqrt{10}$ birim ise |AC| + |DB| toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

[BC], hem $\widehat{ABC}$ nin hem de $\widehat{DBC}$ nin hipotenüsüdür. Bu durumda;

$\widehat{ABC}$ için $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 \Rightarrow (2\sqrt{10})^2 = 2^2 + |AC|^2$

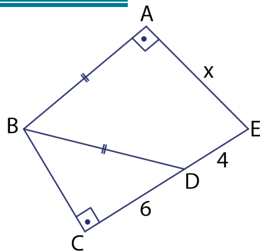
$40 = 4 + |AC|^2 \Rightarrow 36 = |AC|^2 \Rightarrow \sqrt{36} = |AC| \Rightarrow 6 = |AC|$ olur.

$\widehat{DBC}$ için $|BC|^2 = |DB|^2 + |DC|^2 \Rightarrow (2\sqrt{10})^2 = |DB|^2 + 4^2 \Rightarrow 40 = |DB|^2 + 16$

$24 = |DB|^2 \Rightarrow \sqrt{24} = |DB| \Rightarrow 2\sqrt{6} = |DB|$ olur.

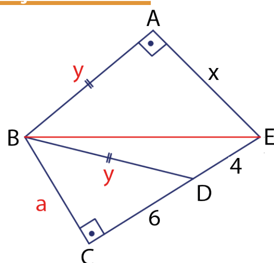
Bu durumda $|AC| + |DB| = 6 + 2\sqrt{6}$ birimdir.

ÖRNEK 4



Şekilde [AB] ⊥ [AE], [BC] ⊥ [CE] ve |AB| = |BD| tir. |CD| = 6 birim, |DE| = 4 birim ise |AE| = x in kaç birim olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Yanda verilen şekildeki gibi B ve E noktaları birleştirilsin.

ABE üçgeninde $|BE|^2 = x^2 + y^2$ ...I

BCE üçgeninde $|BE|^2 = a^2 + 10^2$ ...II

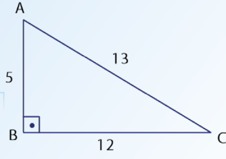
BCD üçgeninde $y^2 = a^2 + 6^2$ ...III

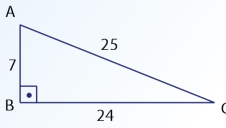
I ve II den $x^2 + y^2 = a^2 + 10^2$ eşitliğinde III yerine yazılırsa $x^2 + a^2 + 6^2 = a^2 + 10^2$ olur.

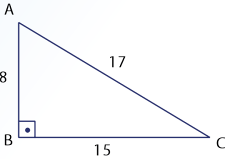
Buradan $x^2 = 64$ bulunur ve $x = 8$ olur.



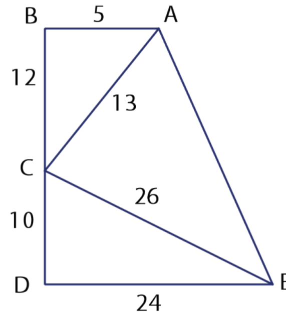
Aşağıda bazı dik üçgenler verilmiştir. İnceleyiniz.





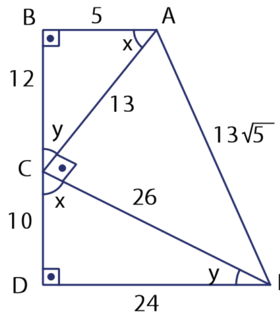


ÖRNEK 5



Şekilde |AB| = 5 birim, |BC| =12 birim, |AC| = 13 birim, |CD| = 10 birim, |DE| = 24 birim ve |CE| = 26 birimdir. B, C, D noktalaları doğrusal ise |AE| nu bulunuz.

ÇÖZÜM



$\overset{\frown}{ABC}$ için $13^2 = 5^2+12^2$ olduğundan m($\hat{B}$)= 90° olur.

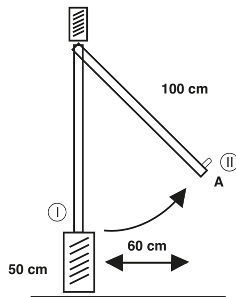
$\overset{\frown}{CDE}$ için $26^2=24^2+10^2$ olduğundan m($\hat{D}$)= 90° olur.

Ayrıca K. K. K. benzerlik kuralı ile $\overset{\frown}{ABC} \sim \overset{\frown}{CDE}$ ve

$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|AC|}{|CE|} = \frac{|BC|}{|DE|} = \frac{1}{2}$ olur.

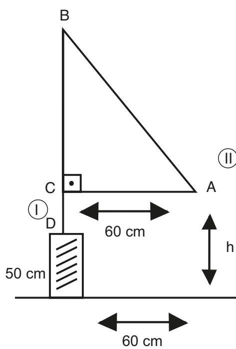
Bu durumda m($\widehat{BAC}$)=m($\widehat{DCE}$), m($\widehat{BCA}$)=m($\widehat{DEC}$) ve şekilde x + y = 90° olduğundan m($\widehat{ACE}$) = 90° olur. $\overset{\frown}{ACE}$ içinse dik kenarlar yarı yarıya olduğundan hipotenüs, küçük dik kenar uzunluğunun $\sqrt{5}$ katı (|AE|= $13\sqrt{5}$ birim) olur.

ÖRNEK 6



Yandaki şekilde yerden yüksekliği 50 cm olan duvarın üstündeki pencerenin yandan görünümü verilmiştir. I nolu konumdaki pencere II nolu konuma getirildiğinde A noktası yatayda 60 cm yol alıyor. Buna göre A noktasının II nolu konumda iken yerden yüksekliğinin kaç cm olacağını bulunuz.

ÇÖZÜM



Şekildeki pencere I nolu konumdan II nolu konuma geldiğinde ABC dik üçgeni yardımı ile

$|AB|^2 = |BC|^2 + |AC|^2$ olur.

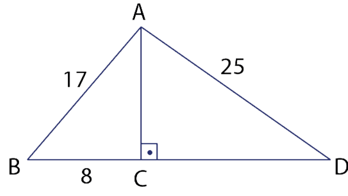
$100^2 = |BC|^2 + 60^2$

|BC| = 80 cm bulunur.

|CD| = 100 − 80 = 20 cm olur.

h = 50 + 20 = 70 cm olur.

ÖRNEK 7



Şekildeki ABD üçgeninde [BD] na ait dikme ayağı C noktasıdır.

|AB| = 17 birim, |BC| = 8 birim ve

|AD| = 25 birim ise |CD| nu bulunuz.

ÇÖZÜM

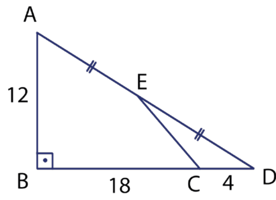
ACB dik üçgeni için $|AB|^2 = |BC|^2 + |AC|^2 \Rightarrow |AB|^2 - |BC|^2 = |AC|^2$ olur.

ACD dik üçgeni için $|AD|^2 = |CD|^2 + |AC|^2 \Rightarrow |AD|^2 - |CD|^2 = |AC|^2$ olur.

Her iki denklemde eşitliğin sağ tarafları eşit olduğundan eşitliğin sol tarafları da eşittir. Bu durumda

$$|AB|^2 - |BC|^2 = |AD|^2 - |CD|^2$$
$$17^2 - 8^2 = 25^2 - |CD|^2$$
$$225 = 625 - |CD|^2$$
$$400 = |CD|^2$$
$$|CD| = 20 \text{ birim olur.}$$

ÖRNEK 8



Şekildeki ABD dik üçgeni için |AE| = |ED| dur.

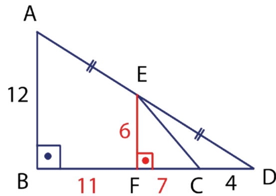
|AB| = 12 birim,

|BC| = 18 birim,

|CD| = 4 birim ise |EC| nu bulunuz.

ÇÖZÜM

[BD] üzerinde bir F noktası ile [AB] ∥ [EF] çizilir.



Bu durumda [EF], $\widehat{ABD}$ nin orta tabanı olur.

Buradan $|EF| = \frac{|AB|}{2} = \frac{12}{2} = 6$ birim olur.

[EF] ∥ [AB] olduğundan $m(\widehat{EFC}) = 90°$ olur.

|AE| = |ED| ise |BF| = |FD| olur. Bu durumda

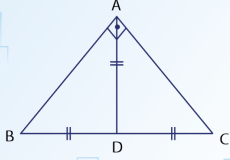
|BF| = 11 birim ve |FC| = 7 birim olur.

EFC dik üçgeninde Pisagor teoremi ile

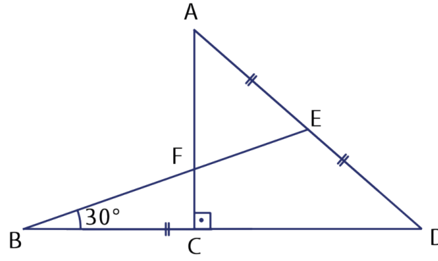
$$|EC|^2 = |EF|^2 + |FC|^2$$
$$|EC|^2 = 6^2 + 7^2$$
$$|EC|^2 = 85$$
$$|EC| = \sqrt{85} \text{ birim olur.}$$



Bir dik üçgende dik açının olduğu köşeden hipotenüse çizilen kenarortayın uzunluğunun, hipotenüs uzunluğunun yarısı olduğunu hatırlayınız.

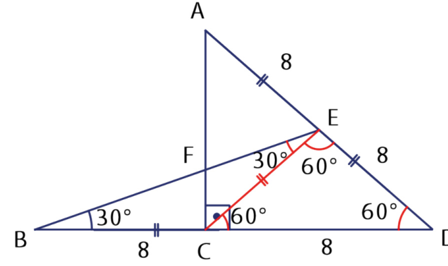


ÖRNEK 9



ACD dik üçgeninin hipotenüs uzunluğu 16 birimdir.
$|AE| = |ED| = |BC|$ ve $m(\widehat{EBC}) = 30^\circ$ ise $|CD|$ nu bulunuz.

ÇÖZÜM



ACD dik üçgeninde C köşesinden [AD] na ait kenarortay çizilirse

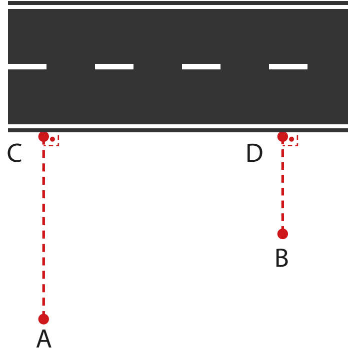
$|CE| = \dfrac{|AD|}{2} = 8$ birim olur.

$\widehat{BCE}$ ikizkenar üçgen olur ve

$m(\widehat{EBC}) = m(\widehat{BEC}) = 30^\circ$ olur.

Bir dış açı, kendisine komşu olmayan iki iç açının toplamına eşit olduğundan $\widehat{BCE}$ için C köşesine ait dış açı $m(\widehat{ECD}) = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$ olur.
Bu durumda $\widehat{CED}$ eşkenar üçgen olur ve $|CD| = 8$ birim olur.

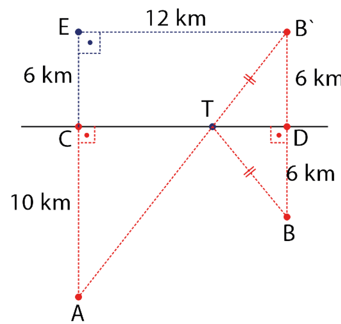
ÖRNEK 10



A ve B belediye merkezlerinin düz bir otoyola dik uzaklıkları sırasıyla 10 km ve 6 km dir. Otoyol bağlantılı olacak şekilde A ve B belediye merkezlerini birbirine bağlayan asfalt yol yapılacaktır. $|CD|=12$ km ve bu yol için dökülecek asfalt yolun 1 km lik uzunluğunun maliyeti 20 000 Türk lirası ise **en az** kaç Türk lirası masraf edileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

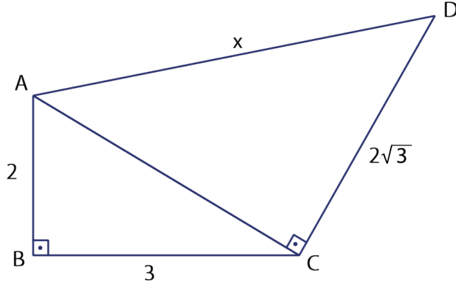
B noktasının [CD] na göre simetrisini alınırsa $|B'D| = 6$ km olur. [AC] uzantısında ve $[EB'] \mathbin{/\!/} [CD]$ olacak şekilde bir E noktası alınırsa $\widehat{AEB'}$ dik üçgen olur.



Bu durumda 12 — 16 — 20 dik üçgeni ile $|AB'| = 20$ km olur.
$|TB'| = |TB|$ olduğundan
$|AT| + |TB| = |AB'| = 20$ km olur. Asfalt yolun bir kilometresinin maliyeti ₺ 20 000 ise yapılacak yolun masrafı **en az** $20 \cdot 20\,000 = 400\,000$ Türk lirası bulunur.

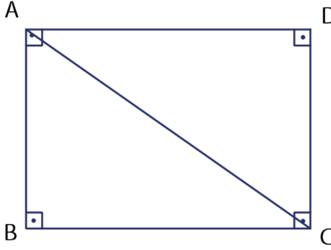
ALIŞTIRMALAR

1.



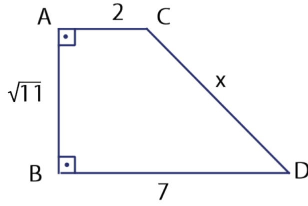
Yandaki şekilde [AB] ⊥ [BC] ve [AC] ⊥ [CD] olmak üzere |AB| = 2 birim, |BC| = 3 birim ve |DC| = $2\sqrt{3}$ birimdir. Verilenlere göre |AD| = x değerini bulunuz.

2.



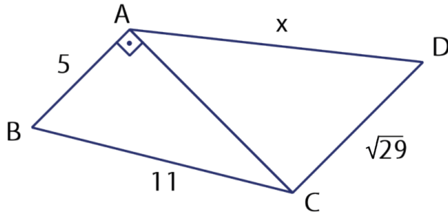
Yanda verilen ABCD dikdörtgeni şeklindeki tarlanın kısa kenarı 50 m dir. A noktasından C noktasına en kısa yoldan giden tarla sahibi eğer A, B, C güzergahını izleseydi 40 m daha fazla yol gitmiş olacaktı. Buna göre tarlanın çevresinin kaç metre olduğunu bulunuz.

3.



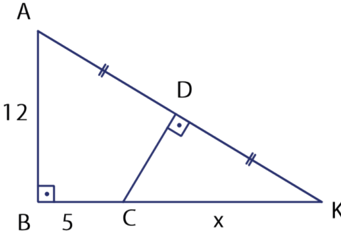
Yandaki şekilde [AC] ⊥ [AB] ve [AB] ⊥ [BD] dir. |AC| = 2 birim, |AB| = $\sqrt{11}$ birim ve |BD| = 7 birim ise |CD| = x değerini bulunuz.

4.



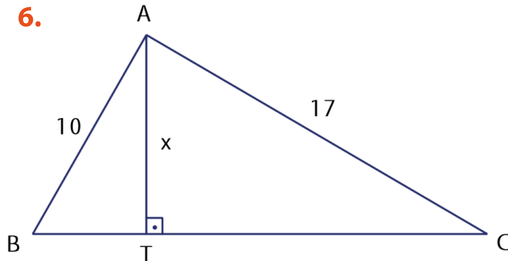
Yandaki şekilde [AB] ⊥ [AC] ve [AB] // [CD] dir. |AB| = 5 birim, |BC| = 11 birim ve |DC| = $\sqrt{29}$ birim ise |AD| = x değerini bulunuz.

5.



Yandaki $\widehat{ABK}$ de [AB] ⊥ [BK], |AD| = |DK|, [CD] ⊥ [AK], |AB| = 12 birim ve |BC| = 5 birim olduğuna göre |CK| = x değerini bulunuz.

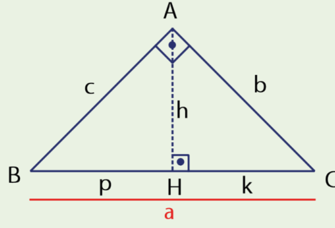
6.



Yandaki $\widehat{ABC}$ nde [AT] ⊥ [BC], |AB|=10 birim, |AC| = 17 birim ve |BC| = 21 birim ise |AT| = x değerini bulunuz.

9.4.4.2. Öklid Teoremi

Bir dik üçgende dik açının olduğu köşeden karşı kenara indirilen dikme için



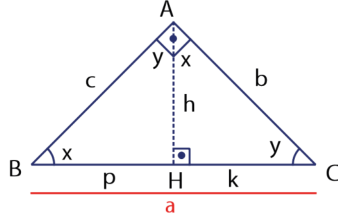
1) $h^2 = p \cdot k$

2) $c^2 = p \cdot a$

3) $b^2 = k \cdot a$

Bu eşitliklere **Öklid teoremi** denir.

Bu özelliğin doğruluğu aşağıdaki gibi yapılabilir.



A. A. benzerliği ile $\widehat{HBA} \sim \widehat{HAC}$ olur.

Bu durumda,

$\frac{|HB|}{|HA|} = \frac{|HA|}{|HC|} \Rightarrow \frac{p}{h} = \frac{h}{k} \Rightarrow h^2 = p \cdot k$ olur.

A. A. benzerliği ile $\widehat{ABC} \sim \widehat{HBA}$ olur.

Bu durumda $\frac{|AB|}{|HB|} = \frac{|BC|}{|BA|} \Rightarrow \frac{c}{p} = \frac{a}{c} \Rightarrow c^2 = p \cdot a$ olur.

A. A. benzerliği ile $\widehat{ABC} \sim \widehat{HAC}$ ve $\frac{|AC|}{|HC|} = \frac{|BC|}{|AC|} \Rightarrow \frac{b}{k} = \frac{a}{b} \Rightarrow b^2 = k \cdot a$ olur.

Öklid'in Çalışmaları

Öklid geometri dünyasındaki seçkin yerini kendisinin büyük bir matematikçi olmasından çok geometrinin başlangıcından kendi zamanına kadar bilinenleri "Ögeler" adını verdiği kitabında toplaması nedeni ile elde etmiştir. Ögeler; dilden dile çevrilmiş, yüzlerce kez kopya edilmiş, matbaanın icadından sonra da binlerce kez gözden geçirilerek yeniden basılmıştır. Öklid, derlemesinin tutarlı bir bütün olmasını sağlamak için kanıt gerektirmeyen apaçık gerçekler olarak 5 aksiyom ortaya koymuş. Diğer bütün önermeleri bu aksiyomlardan çıkarmıştır. Bu aksiyomlar şunlardır .

1. İki noktadan bir ve yalnız bir doğru geçer.
2. Bir doğru parçası iki yöne de sınırsız bir şekilde uzatılabilir.
3. Merkezi ve üzerinde bir noktası verilen bir çember çizilebilir.
4. Bütün dik açılar eşittir.
5. Bir doğruya bu doğrunun dışında alınan bir noktadan bir ve yalnız bir paralel doğru çizilir.

"Ögeler", 13 ciltten oluşmaktadır. Bunlar sırasıyla

I. Benzerlikler, Paraleller, Pisagor teoremi

II. Özdeşlikler, Alan Hesabı, Altın Kesim

III. Daireler

IV. Dairelerin İçine ve Dışına Çizilen Çokgenler

V. Oran ve Orantı Kavramı

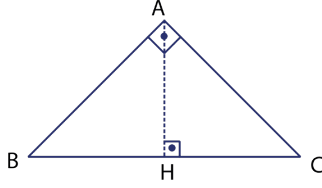
VI. Çokgenlerin Benzerlikleri

VII ve VIII ve IX. Aritmetik, Eski Sayılar Teorisi

X Ortak Ölçüsü Olmayan Büyüklükler

XI, XII ve XIII. Uzay Geometrisi' dir.

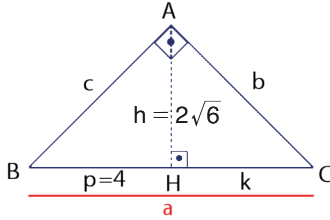
ÖRNEK 11



Şekildeki ABC dik üçgeni için $m(\widehat{BAC}) = 90^\circ$ ve $[AH] \perp [BC]$ dır.

$|AH| = 2\sqrt{6}$ birim ve $|BH| = 4$ birim ise $|HC|$ ve $|AC|$ nu bulunuz.

ÇÖZÜM



$h^2 = p \cdot k \Rightarrow (2\sqrt{6})^2 = 4 \cdot k$

$\Rightarrow 24 = 4 \cdot k$

$\Rightarrow |HC| = k = 6$ birim olur.

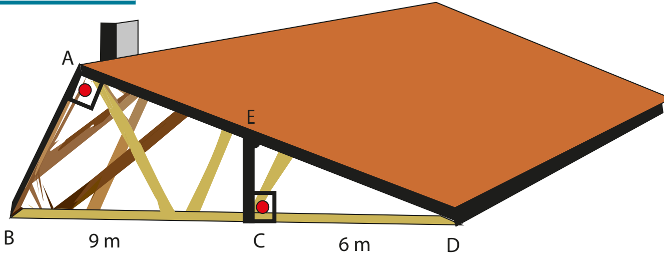
$b^2 = k \cdot a \Rightarrow b^2 = 6 \cdot 10$

$\Rightarrow b^2 = 60$

$\Rightarrow b = \sqrt{60}$

$\Rightarrow |AC| = b = 2\sqrt{15}$ birim olur.

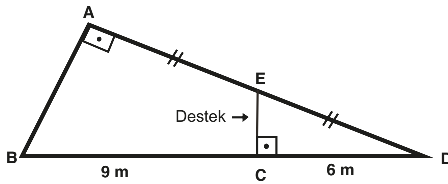
ÖRNEK 12



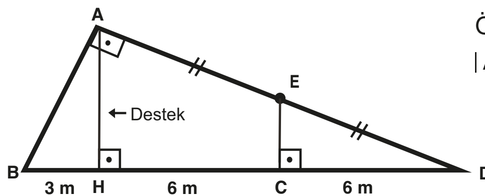
Bir evin çatısı şekildeki gibi modellenmiştir. Çatıya atılan $[EC]$ desteğinin yeterli olmadığı düşünüldüğünden bu desteğe paralel olacak şekilde A köşesinden bir destek daha atılacaktır.

$\overset{\frown}{ABD}$ için $m(\widehat{A}) = 90^\circ$, $|AE| = |ED|$, $|BC| = 9$ m ve $|CD| = 6$ m veriliyor. $[EC] \perp [BD]$ ise $|AB|$ nu bulunuz.

ÇÖZÜM



ABD üçgeninde Öklid teoremi için $[AH] \perp [BD]$ olacak şekilde H noktası seçilirse AHD üçgeninde [EC], orta taban olduğundan $|HC| = |CD| = 6$ m olur. Bu durumda $|BH| = 3$ m olur.



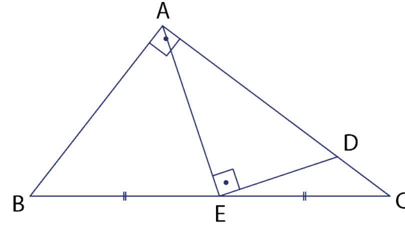
Öklid teoremi ile

$|AB|^2 = |BH| \cdot |BD| \Rightarrow |AB|^2 = 3 \cdot 15$

$\Rightarrow |AB| = \sqrt{3 \cdot 15}$

$\Rightarrow |AB| = 3\sqrt{5}$ m olur.

ÖRNEK 13



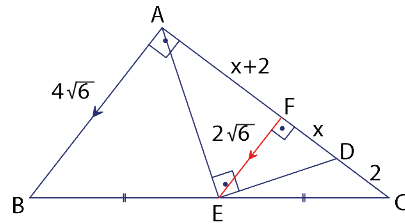
Şekildeki $\widehat{ABC}$ için

$[AB] \perp [AC]$ ve $[AE] \perp [ED]$ dır.

$|AB| = 4\sqrt{6}$ birim $|DC| = 2$ birim ve

$|BE| = |EC|$ ise $|AD|$ nu bulunuz.

ÇÖZÜM



[AC] üzerinde, $[EF] \parallel [AB]$ olacak şekilde bir F noktası seçilirse |BE| = |EC| olduğundan [EF], ABC üçgeninin orta tabanı olur ve

$|EF| = \dfrac{|AB|}{2} = \dfrac{4\sqrt{6}}{2} = 2\sqrt{6}$ birim olur.

Ayrıca $[EF] \parallel [AB]$ ve |BE| = |EC| olduğundan |AF| = |FC| olur. Bu durumda

|FD| = x denirse |AF| = |FC| = x + 2 olur.

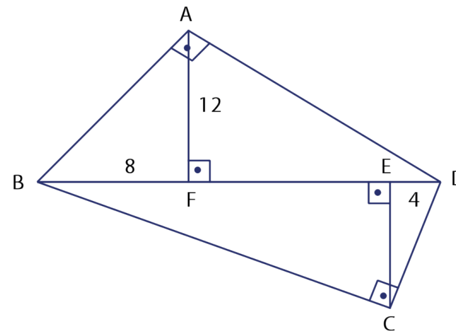
AED üçgeninde Öklid teoremi ile

$(2\sqrt{6})^2 = (x+2) \cdot x \Rightarrow 24 = (x+2) \cdot x$

$\Rightarrow$ Bu eşitliği sağlayan x değeri 4 olur.

$\Rightarrow |AD| = |AF| + |FD| = x + 2 + x = 4 + 2 + 4 = 10$ birim olur.

ÖRNEK 14



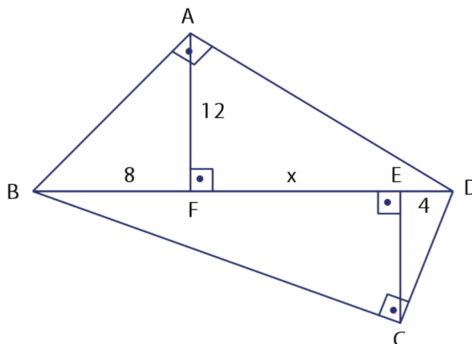
Şekilde $[AB] \perp [AD]$, $[AF] \perp [BD]$, $[CE] \perp [BD]$ ve $[CB] \perp [DC]$ dır.

|AF| = 12 birim

|BF| = 8 birim

|ED| = 4 birim ise |CE| nu bulunuz.

ÇÖZÜM



|FE| = x denirse

ABD üçgeninde Öklid teoremi ile

$12^2 = 8 \cdot (x+4) \Rightarrow 144 = 8 \cdot (x+4)$

$\Rightarrow 18 = x + 4$

$\Rightarrow x = 14$ olur.

CDB dik üçgeninde Öklid teoremi ile

$|CE|^2 = (8+x) \cdot 4$

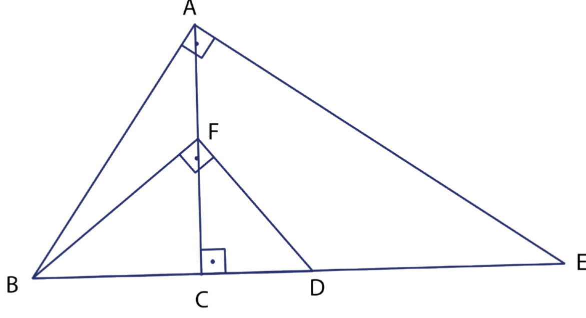
$|CE|^2 = (8+14) \cdot 4$

$|CE|^2 = 88$

$|CE| = \sqrt{88}$

$|CE| = 2\sqrt{22}$ birim olur.

ÖRNEK 15



Şekilde $[AB] \perp [AE]$, $[BF] \perp [FD]$ ve $[AC] \perp [BE]$ dır.

$\frac{|CE|}{|CD|} = 4$ ise $\frac{|AF|}{|CF|}$ oranını bulunuz.

ÇÖZÜM

ABE dik üçgeninde Öklid teoremiyle $|AC|^2 = |BC| \cdot |CE|$ olur.

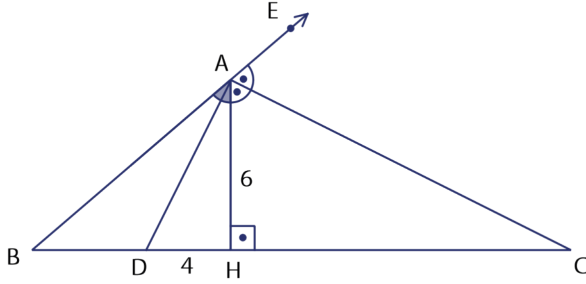
BFD dik üçgeninde Öklid teoremiyle $|CF|^2 = |BC| \cdot |CD|$ olur.

Bu iki eşitliği taraf tarafa oranlarsak

$\frac{|AC|^2}{|CF|^2} = \frac{|BC| \cdot |CE|}{|BC| \cdot |CD|} \Rightarrow \frac{|AC|^2}{|CF|^2} = 4 \Rightarrow \frac{|AC|}{|CF|} = 2$ bulunur.

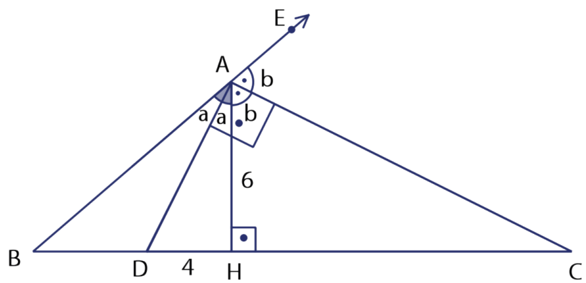
Buradan $\frac{|AF|}{|CF|} = 1$ olur.

ÖRNEK 16



Yukarıdaki şekilde B, A, E doğrusaldır $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{HAD})$, $m(\widehat{CAE}) = m(\widehat{CAH})$, $|AH| = 6$ birim, $|DH| = 4$ birim ise $|HC|$ nu bulunuz.

ÇÖZÜM



B, A, E doğrusal olduğundan $2a + 2b = 180^\circ \Rightarrow a + b = 90^\circ$ olur.

Bu durumda $m(\widehat{DAC}) = 90^\circ$ olur.

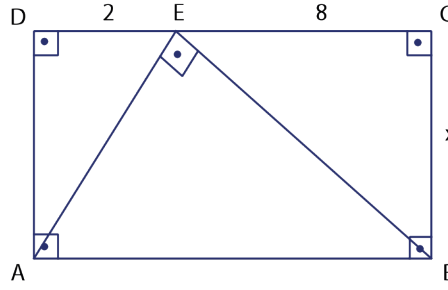
$\widehat{ADC}$ dik üçgeninde Öklid teoremi ile

$|AH|^2 = |DH| \cdot |HC| \Rightarrow 36 = 4 \cdot |HC|$

$\Rightarrow |HC| = 9$ birimdir.

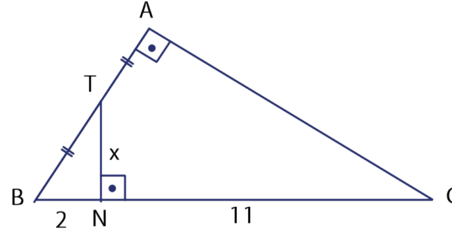
ALIŞTIRMALAR

1.



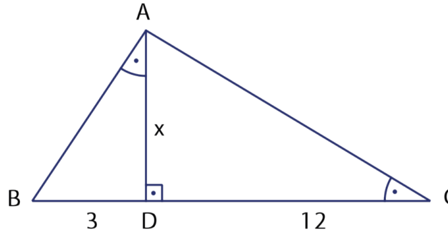
Yandaki ABCD dikdörtgeninde $[AE] \perp [EB]$ ve $|DE| = 2$ birim, $|EC| = 8$ birim ise $|BC| = x$ değerini bulunuz.

2.



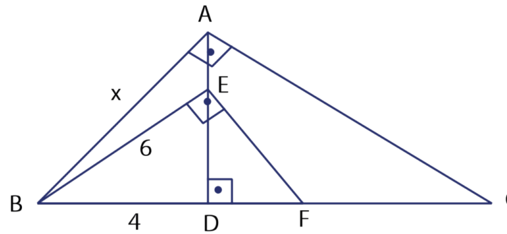
Yandaki $\widehat{ABC}$ nde $[AB] \perp [AC]$, $[TN] \perp [BC]$ ve $|AT| = |TB|$ dur. $|BN| = 2$ birim ve $|NC| = 11$ birim ise $|TN| = x$ değerini bulunuz.

3.



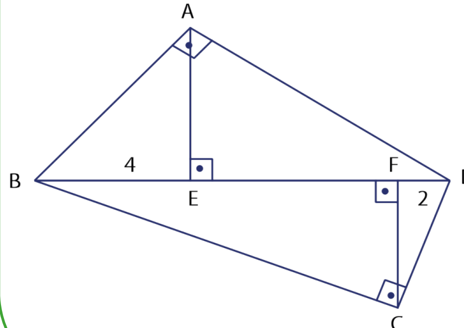
Yandaki $\widehat{ABC}$ nde $[AD] \perp [BC]$ ve $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{ACD})$ dür. $|BD| = 3$ birim, $|DC| = 12$ birim ise $|AD| = x$ değerini bulunuz.

4.



Yandaki $\widehat{ABC}$ nde $[AB] \perp [AC]$, $[BE] \perp [EF]$, $|BF| = |FC|$ dur. $|BE| = 6$ birim, $|BD| = 4$ birim ise $|AB| = x$ değerini bulunuz.

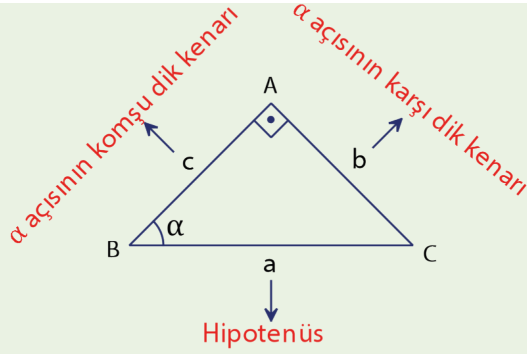
5.



Yandaki şekilde $[AB] \perp [AD]$, $[BC] \perp [CD]$, $[AE] \perp [BD]$ ve $[BD] \perp [FC]$ dur. $|BE| = 4$ birim ve $|FD| = 2$ birim ise $\frac{|AB|}{|DC|}$ değerini bulunuz.



9.4.4.3. Dik Üçgende Dar Açıların Trigonometrik Oranları



Şekildeki ABC dik üçgeninde $m(\widehat{A}) = 90°$ ve $m(\widehat{ABC}) = \alpha$ olsun.

- α açısının sinüsü sin α ile gösterilir.

$$\sin\alpha = \frac{\alpha \text{ açısının karşı dik kenar uzunluğu}}{\text{Hipotenüs uzunluğu}} = \frac{b}{a} \text{ olur.}$$

- α açısının kosinüsü cos α ile gösterilir.

$$\cos\alpha = \frac{\alpha \text{ açısının komşu dik kenar uzunluğu}}{\text{Hipotenüs uzunluğu}} = \frac{c}{a} \text{ olur.}$$

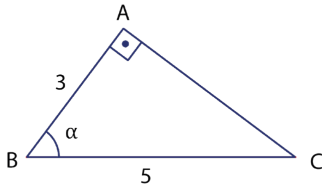
- α açısının tanjantı tan α ile gösterilir.

$$\tan\alpha = \frac{\alpha \text{ açısının karşı dik kenar uzunluğu}}{\alpha \text{ açısının komşu dik kenar uzunluğu}} = \frac{b}{c} \text{ olur.}$$

- α açısının kotanjantı cot α ile gösterilir.

$$\cot\alpha = \frac{\alpha \text{ açısının komşu dik kenar uzunluğu}}{\alpha \text{ açısının karşı dik kenar uzunluğu}} = \frac{c}{b} \text{ olur.}$$

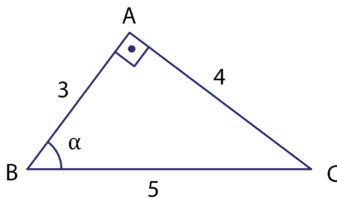
ÖRNEK 17



Şekilde $\widehat{ABC}$ için $m(\widehat{A}) = 90°$ ve $m(\widehat{ABC}) = \alpha$ veriliyor.

$|AB| = 3$ birim ve $|BC| = 5$ birim ise $\widehat{ABC}$ nde $m(\widehat{ABC}) = \alpha$ ya ait trigonometrik oranları bulunuz.

ÇÖZÜM



3k - 4k - 5k dik üçgeninden $|AC| = 4$ birim olur.

$$\sin\alpha = \frac{\alpha \text{ açısının karşı dik kenar uzunluğu}}{\text{Hipotenüs uzunluğu}} = \frac{4}{5}$$

$$\cos\alpha = \frac{\alpha \text{ açısının komşu dik kenar uzunluğu}}{\text{Hipotenüs uzunluğu}} = \frac{3}{5}$$

$$\tan\alpha = \frac{\alpha \text{ açısının karşı dik kenar uzunluğu}}{\alpha \text{ açısının komşu dik kenar uzunluğu}} = \frac{4}{3}$$

$$\cot\alpha = \frac{\alpha \text{ açısının komşu dik kenar uzunluğu}}{\alpha \text{ açısının karşı dik kenar uzunluğu}} = \frac{3}{4}$$

Çözüm incelendiğinde

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$ olur.

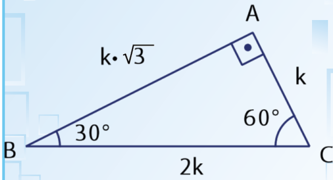




Trigonometrik oranlar bulunurken dik üçgen kullanılması gerekir.
Eğer verilenler arasında dik üçgen yoksa trigonometrik oranı istenen açıyı kapsayacak şekilde uygun bir dik üçgen oluşturulur.



$30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ dik üçgeninde,

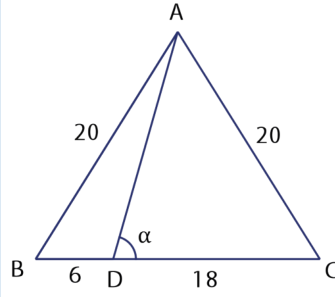


Hipotenüs uzunluğu 30° nin karşısındaki kenar uzunluğunun 2 katıdır.
60° nin karşısındaki kenar uzunluğu ise 30° nin karşısındaki kenar uzunluğunun $\sqrt{3}$ katıdır.



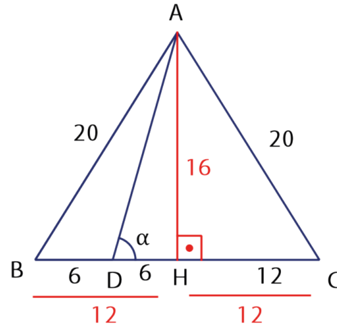
a ve b açıları tümler açılar ise
sina = cosb
sinb = cosa
tana = cotb
tanb = cota olur.

ÖRNEK 18



Şekildeki $\widehat{ABC}$ için $|AB| = |AC| = 20$ birim $|BD| = 6$ birim ve $|DC| = 18$ birim dir.
$m(\widehat{ADC}) = \alpha$ ise $\tan\alpha$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



ABC üçgeni ikizkenar üçgendir. İkizkenar üçgenin tepe açısından indirilen dikme aynı zamanda kenarortay olduğundan |BH| = |HC| = 12 birim olur.

Bu durumda |DH| = 6 birim ve |HC| = 12 birim olur.

AHC dik üçgeninde 12-16-20 dik üçgeninden

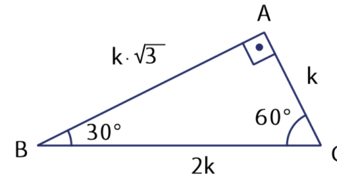
|AH| = 16 birim olur. O hâlde $\tan\alpha = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$ olur.

Siz de α açısının diğer trigonometrik oranlarını bulunuz.

ÖRNEK 19

30º ve 60º nin trigonometrik oranlarını bulunuz.

ÇÖZÜM



Açıları $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ olan dik üçgenin kenar uzunlukları arasında yandaki gibi bir bağıntı vardır.

$\sin 30^\circ = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\cos 60^\circ = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}$

$\cos 30^\circ = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{k\cdot\sqrt{3}}{2k} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $\sin 60^\circ = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{k\cdot\sqrt{3}}{2k} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 30^\circ = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{k}{k\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad$ $\cot 60^\circ = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{k}{k\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\cot 30^\circ = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{k\cdot\sqrt{3}}{k} = \sqrt{3}$ $\quad$ $\tan 60^\circ = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{k\cdot\sqrt{3}}{k} = \sqrt{3}$

Eğer bulunan sonuçlara bakılırsa

$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$,

$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ$,

$\tan 30^\circ = \cot 60^\circ$,

$\cot 30^\circ = \tan 60^\circ$

olduğu görülür. Bu durum "Birbirini 90° ye tamamlayan açılardan birinin sinüsü diğerinin kosinüsüne, birinin tanjantı diğerinin kotanjantına eşittir." sonucunu verir.

ÖRNEK 20

$x+y = 90^\circ$ olmak üzere x ile y açıları dar açılardır. $\sin x = \frac{2}{3}$ ise $\cos y$ değerini bulunuz.

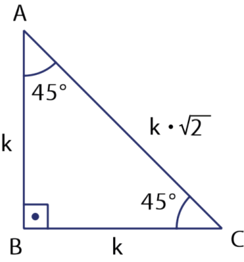
ÇÖZÜM

x ile y dar açılar ve $x+y = 90^\circ$ olduğundan $\sin x = \cos y = \frac{2}{3}$ olur.

ÖRNEK 21

45° nin trigonometrik oranlarını bulunuz.

ÇÖZÜM



$m(\widehat{B}) = 90^\circ$ olacak şekilde ABC dik üçgeni çizilirse kenar uzunlukları yandaki gibi olur.

$m(\widehat{ACB}) = 45^\circ$ olan açı kullanılırsa

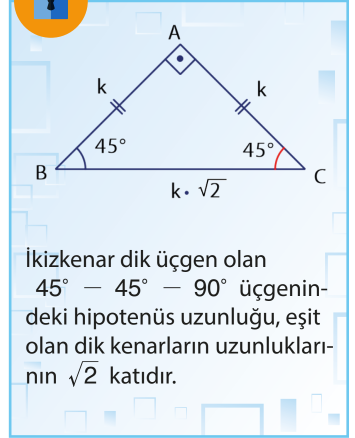
$\sin 45^\circ = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{k}{k \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ olur.

$\cos 45^\circ = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{k}{k \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ olur.

$\tan 45^\circ = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{k}{k} = 1$ olur.

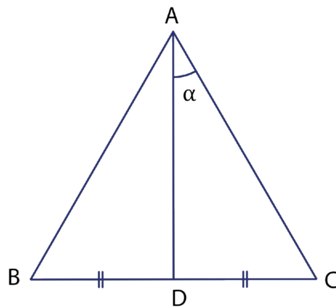
$\cot 45^\circ = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{k}{k} = 1$ olur.





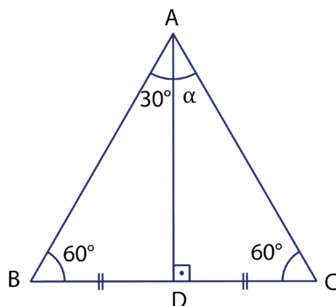
İkizkenar dik üçgen olan $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ üçgenindeki hipotenüs uzunluğu, eşit olan dik kenarların uzunluklarının $\sqrt{2}$ katıdır.

ÖRNEK 22



ABC eşkenar üçgen ve $|BD| = |DC|$ ise $m(\widehat{DAC}) = \alpha$ olmak üzere $\sin\alpha + \tan\alpha$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

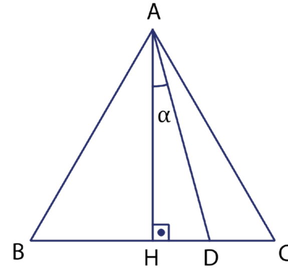


ABC eşkenar üçgen olduğundan A köşesinden indirilen kenarortay aynı zamanda yükseklik ve açıortaydır. Bu durumda, $m(\widehat{DAC}) = 30^\circ$ olur. Buradan

$\sin\alpha + \tan\alpha = \sin 30^\circ + \tan 30^\circ$

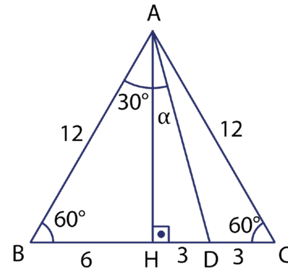
$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3+2\sqrt{3}}{6}$ olur.

ÖRNEK 23



ABC üçgeni, bir kenarı 12 birim olan eşkenar üçgen ve $[AH] \perp [BC]$ dır. $|HD| = 3$ birim ise $m(\widehat{HAD}) = \alpha$ için cotα değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



Eşkenar üçgende yükseklik aynı zamanda kenarortay ve açıortay olduğundan

$|BH| = |HC| = 6$ birim,

$|DC| = 3$ birim ve

$m(\widehat{BAH}) = m(\widehat{HAC}) = 30^\circ$ olur.

ABH üçgeni 30° - 60° - 90° dik üçgenidir. Bu üçgende 60° nin karşısındaki kenar uzunluğu, 30° nin karşısındaki kenar uzunluğunun $\sqrt{3}$ katı olduğundan $|AH| = |BH| \cdot \sqrt{3} \Rightarrow |AH| = 6 \cdot \sqrt{3}$ birim olur.

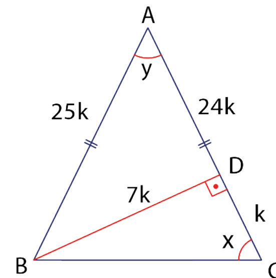
$\widehat{AHD}$ üçgeninde $\cot\alpha = \dfrac{|AH|}{|HD|} = \dfrac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$ olur.

Siz de α açısının diğer trigonometrik oranlarını bulunuz.

ÖRNEK 24

$|AB| = |AC|$ olan bir $\widehat{ABC}$ için $\tan(\widehat{CAB}) = \dfrac{7}{24}$ ise $\tan(\widehat{ACB})$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



$\widehat{ACB}$ ve $\widehat{CAB}$ dik üçgenin birer iç açısı olacak şekilde $D \in [AC]$ alınsın ve $[BD] \perp [AC]$ çizilsin.

$m(\widehat{ACB}) = x$ ve $m(\widehat{CAB}) = y$ olsun.

$\tan(\widehat{CAB}) = \tan y = \dfrac{|BD|}{|AD|} \Rightarrow \dfrac{7}{24} = \dfrac{|BD|}{|AD|}$

$\Rightarrow |BD| = 7k$ ve $|AD| = 24k$

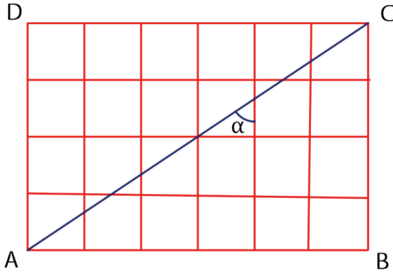
$\Rightarrow |AB| = 25k$ olur. (7 − 24 − 25 üçgeninden.)

$|AB| = |AC| \Rightarrow |AB| = |AD| + |DC| \Rightarrow 25k = 24k + |DC| \Rightarrow |DC| = k$ olur.

Bu durumda $\tan(\widehat{ACB}) = \tan x = \dfrac{|BD|}{|DC|} \Rightarrow \tan x = \dfrac{7k}{k}$

$\Rightarrow \tan x = 7$ olur.

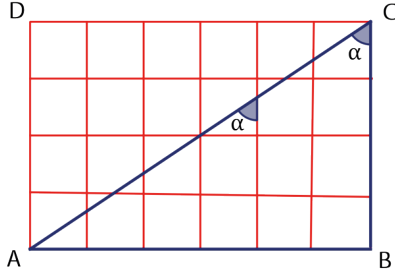
ÖRNEK 25



Şekilde verilen ABCD dikdörtgeni 24 birim kareye ayrılmıştır.

Verilenlere göre tanα değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



Bir açı, dik kenarları tam birim olan dik üçgen içinde olursa trigonometrik oranlarını bulmak daha kolaydır. α açısı dik kenarları tam birim olan bir dik üçgende olmadığından α açısı ile yöndeş olan ve dik kenarları tam birim olan bir açı seçilir. (Yöndeş açıların eşitliğinden). Bu durumda seçilen dik üçgen ABC dik üçgenidir.

Bu durumda $\tan\alpha = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ olur.

Trigonometrik oranların inşaat mühendisliğinde, coğrafyada, uzay biliminde, jeofizikte, ekonomide, elektrik mühendisliğinde, elektronikte, uçak mühendisliğinde, makine mühendisliğinde, meteorolojide, sismolojide, optikte, uydu yayınlarında etkin bir şekilde kullanıldığını biliyor muydunuz?

ÖRNEK 26

Bir dik üçgenin dar açılarından birinin ölçüsü diğerinin ölçüsünün 3 katından 10° eksiktir. Bu dik üçgenin **en küçük** açısının ölçüsünün sinüsünü bulunuz.

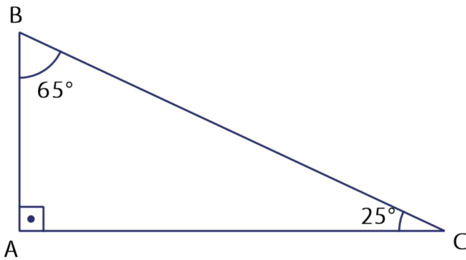
ÇÖZÜM

$m(\widehat{A}) = 90^\circ$ olan ABC dik üçgeni için $m(\widehat{B}) = 3 \cdot m(\widehat{C}) - 10^\circ$ denirse

$m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 90^\circ \Rightarrow 3 \cdot m(\widehat{C}) - 10^\circ + m(\widehat{C}) = 90^\circ$

$4 \cdot m(\widehat{C}) = 100^\circ$

$m(\widehat{C}) = 25^\circ$ olur.



Bu durumda ABC dik üçgeni şekildeki gibidir. Bu üçgenin en küçük açısı 25° olduğundan istenen değer $\sin 25^\circ$ dir.

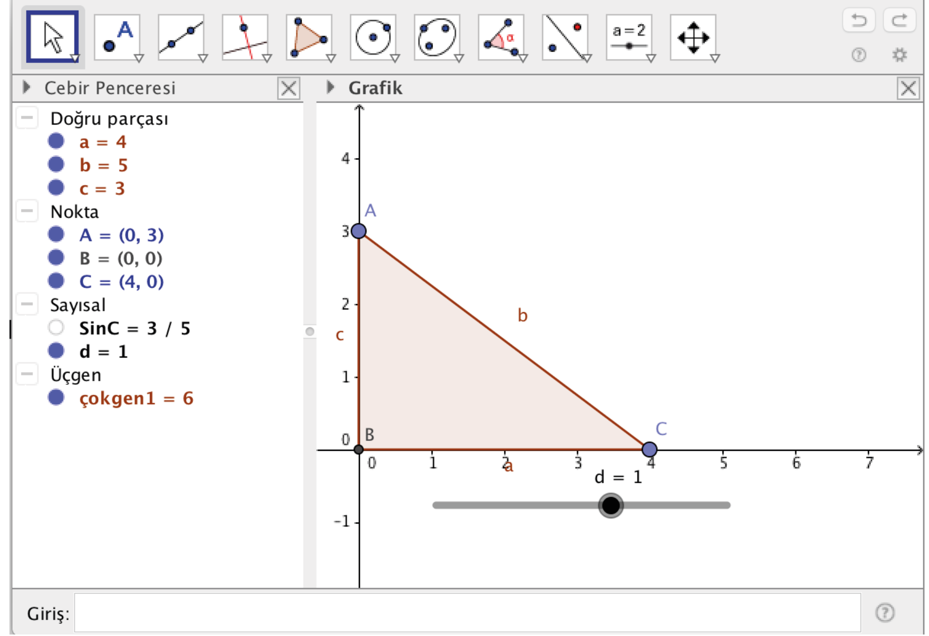
Bilgisayar, tablet veya cep telefonunun hesap makinesindeki "bilimsel" bölümünü tıklayarak $\sin 25^\circ$ yazılırsa $\sin 25^\circ \approx 0,4226$ dır.

ÖRNEK 27

GeoGebra programı yardımıyla kenarları belirli bir oranda büyütülen dik üçgenlerde trigonometrik değerlerin değişimini inceleyiniz.

ÇÖZÜM

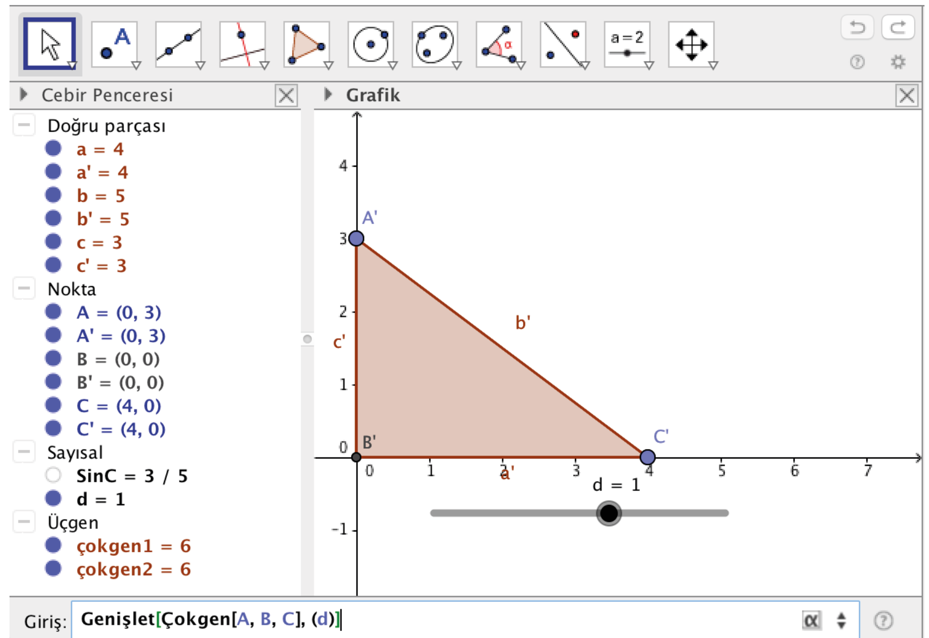
Araç çubuğundaki 5. kutuya ve ardından açılan "Çokgen" sekmesine tıklayarak Grafik penceresinde dik köşesi orijin ve dik kenarları eksenler üzerinde olan bir ABC dik üçgeni oluşturulur.



Daha sonra araç çubuğundaki 10. kutuya ve ardından açılan "Sürgü" sekmesine tıklanır. Grafik penceresinde boşluğa tıklanınca açılan pencerede d sürgüsü oluşturulur.

Ekranın sol altındaki "Giriş" kısmına SinC = c/b yazılırsa C açısının sinüs değeri Cebir penceresinde görülür.

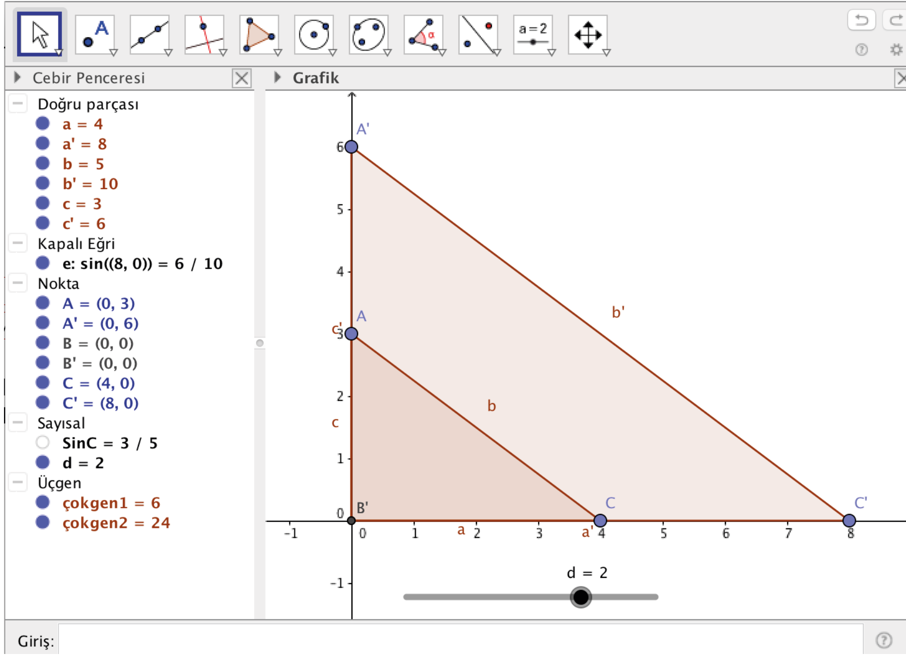
Ekranın sol altındaki "Giriş" kısmına "Genişlet[Çokgen[A, B, C], (d)]" yazılır ve ENTER tuşuna basılır.





d sürgüsü sağa doğru sürüklenirse şeklin belirli bir oranda büyüdüğü görülür (Görselde sürgü d = 2 olarak alınmıştır.).

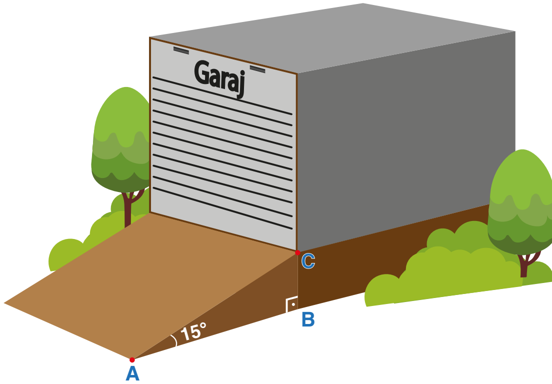
"Giriş" kısmına SinC′ = c′/b′ yazılırsa C′ açısının sinüs değeri Cebir penceresinde görülür. Cebir penceresine bakıldığında C′ açısının sinüs değeri ile daha önce bulunan C açısının sinüs değerinin eşit olduğu anlaşılır.



Sonuç olarak genişletilen üçgenlerin karşılıklı kenarlarının uzunlukları oranı değişmediği için açılarının sinüs değerleri aynı kalmaktadır.

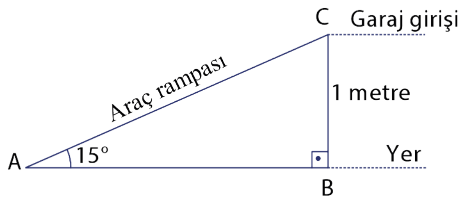
Siz de bu şekilde diğer trigonometrik oranların değişip değişmediğini inceleyiniz.

ÖRNEK 28



Bir deponun girişinin yerden yüksekliği 1 m dir.Araçlar rampa kullanılarak depoya alınmakta ve dik üçgen şeklinde olan bu rampanın yer ile 15° açı yaptığı bilinmekte dir. Buna göre araçların yer düzleminden depoya kadar kaç metre yol aldığını bulunuz. ($\sin 15° \approx 0,2588$)

ÇÖZÜM



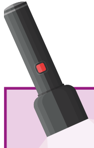
Rampanın uzunluğu $|AC|$ olmak üzere

$$\sin 15° = \frac{|BC|}{|AC|} \Rightarrow 0,2588 = \frac{1}{|AC|}$$

$$\Rightarrow \quad |AC| = \frac{1}{0,2588}$$

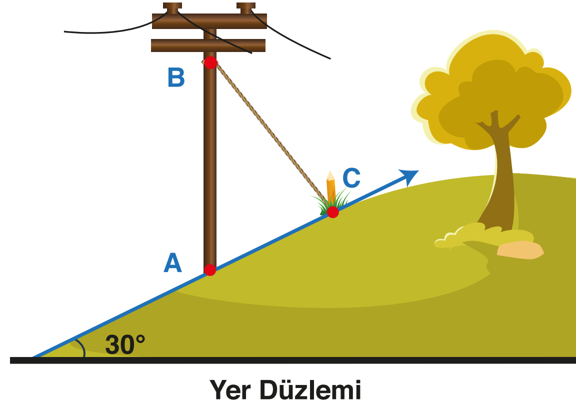
$$\Rightarrow \quad |AC| \approx 3,8639 \text{ m olur.}$$





"Evren her an gözlemlerimize açıktır; ama onun dilini ve bu dilin yazıldığı harfleri öğrenmeden ve kavramadan anlaşılamaz. Evren matematik diliyle yazılmıştır; harfleri üçgenler, daireler ve diğer geometrik biçimlerdir Bunlar olmadan tek sözcüğü bile anlaşılamaz; bunlarsız ancak karanlık bir labirentte dolanılır."
Galileo (Galile)

ÖRNEK 29



Yer Düzlemi

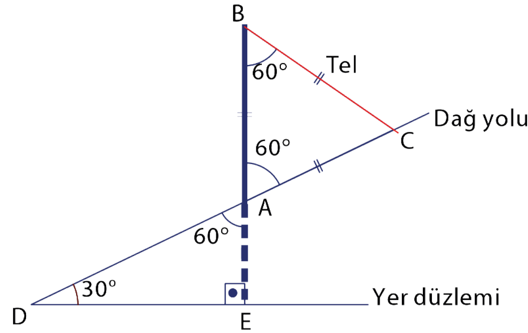
Şekildeki gibi modellenen bir dağ yoluna dikilecek elektrik direkleri yer düzlemine dik olacaktır. Direği destekleyecek tel, direğin uzunluğundadır. Rampanın yer ile yaptığı açı ise 30° dir.

Verilenlere göre

a) $\tan(\widehat{ABC})$ değerini bulunuz.

b) G noktası ABC üçgeninin ağırlık merkezi ise $\sin(\widehat{BAG})$ değerini bulunuz.

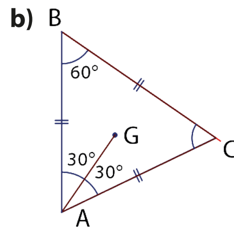
ÇÖZÜM



Verilenler şekildeki gibi uygulanırsa DAE dik üçgeninde iç açıların ölçüsü toplamından $m(\widehat{EAD}) = 60^\circ$ dir. Ters açılardan $m(\widehat{BAC}) = 60^\circ$ olur.
Tel ile direğin uzunluğu eşit olduğundan |BA| = |BC| olur. Bu durumda ABC üçgeni eşkenar üçgen olur.

a) $m(\widehat{ABC}) = 60^\circ$ olduğundan $\tan(\widehat{ABC}) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$ olur.

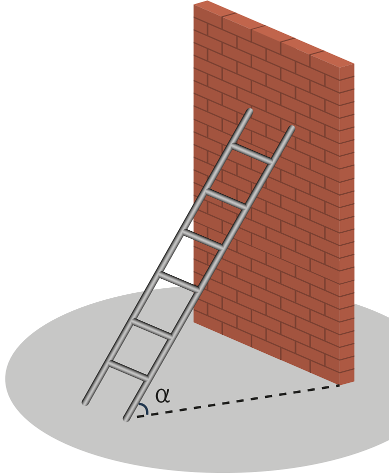
b)



ABC üçgeni eşkenar üçgen olduğu için $m(\widehat{BAG}) = 30^\circ$ olur.

Bu durumda $\sin(\widehat{BAG}) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ olur.

ÖRNEK 30



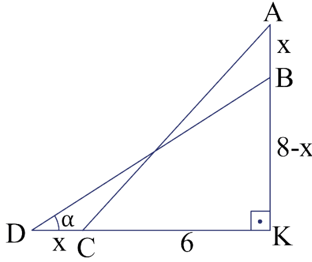
10 metrelik merdivenin duvara uzaklığı 6 metredir.

Merdivenin duvara dayalı kısmı bir miktar aşağı indirilirse yer düzlemindeki kısmı da aynı miktarda geri gitmektedir.

Şekilde merdivenin son durumu çizilmiştir. Verilenlere göre $\sin\alpha$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Merdivenin ilk durumuna [AC], ikinci durumuna ise [BD] denilsin.



AKC dik üçgeninde $|AC| = 10$ m ve $|KC| = 6$ m olduğundan $(6-8-10$ dik üçgeninden$)$ $|AK| = 8$ m olur.
Bu durumda $|AB| = x$ ve $|BK| = 8 - x$ denirse $|CD| = x$ olur.
Ayrıca merdivenin boyu değişmediği için $|BD| = 10$ m olur.

BKD dik üçgen olduğundan Pisagor teoremi ile

$|BD|^2 = |BK|^2 + |KD|^2 \Rightarrow 10^2 = (8-x)^2 + (6+x)^2$

$\Rightarrow 100 = 64 - 16x + x^2 + 36 + 12x + x^2$

$\Rightarrow 0 = 2x^2 - 4x$

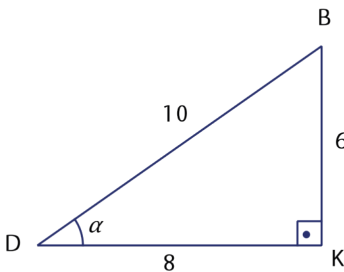
$\Rightarrow 0 = x^2 - 2x$

$\Rightarrow 0 = x \cdot (x-2)$

$\Rightarrow x = 0$ veya $x - 2 = 0$

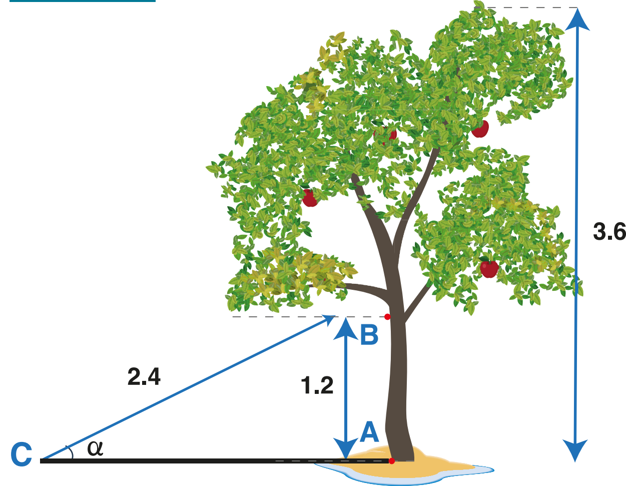
$\Rightarrow x = 0$ veya $x = 2$ olur.

Merdivenin A ucunun B noktasına x br indirildiği belirtildiğinden $x \neq 0$ dır.
Bu durumda $x = 2$ alınırsa BKD dik üçgeni çizilir.



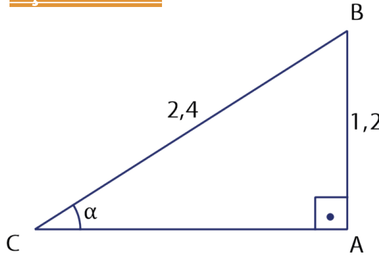
$\sin\alpha = \frac{|BK|}{|BD|} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ olur.

ÖRNEK 31



Şekildeki ağaca aşılama yapılması için ağaç, yerden 1,2 metre yüksekliğindeki B noktasından kesiliyor. Ağacın kesilen kısmı devrildiğinde uç noktası C noktasına gelerek bir dik üçgen oluşturuyor. Buna göre tanα değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



Aşılama için B noktasından kesilen ağacın yere düşmesi şekildeki dik üçgen ile modellenirse,

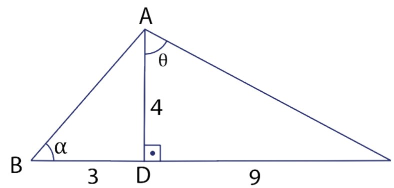
Ağaç yerden 1,2 metre yükseklikten kesileceğine göre |AB| = 1,2 metre olur.

Ağacın boyu 3,6 metre ise ağacın yıkılan kısmı olan |CB| = 3,6 − 1,2 = 2,4 metre olur.

Bu durumda ABC üçgeninin hipotenüs uzunluğu, dik kenarlardan birinin 2 katı olan dik üçgendir. Bu ise $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ olan dik üçgendir ve $\alpha = 30^\circ$ dir. O hâlde $\tan\alpha = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ olur.

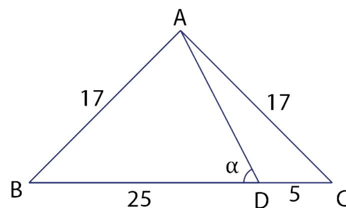
ALIŞTIRMALAR

1.



$\widehat{ABC}$ nde $[AD] \perp [BC]$,
$m(\widehat{ABD}) = \alpha$ ve $m(\widehat{DAC}) = \theta$
olmak üzere
$|BD| = 3$ birim, $|AD| = 4$ birim
ve $|DC| = 9$ birim ise
a) $\sin\alpha + \cos\alpha$
b) $\tan\theta + \cot\theta$
değerlerini bulunuz.

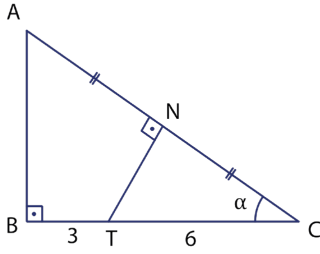
2.



$\widehat{ABC}$ nde $|AB| = |AC| = 17$ birim,
$|BD| = 5 \cdot |DC| = 25$ birim
ve $m(\widehat{ADB}) = \alpha$ olmak üzere
$\cot\alpha$ değerini bulunuz.



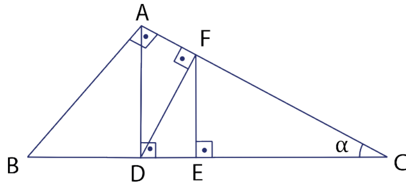
3.



$\overset{\frown}{ABC}$ nde
$[AB] \perp [BC]$, $[TN] \perp [AC]$
ve $|AN| = |NC|$ dur.
$|BT| = 3$ birim, $|TC| = 6$ birim
ise $\tan\alpha$ değerini bulunuz.

4. $\overset{\frown}{ABC}$ nde $|AB| = |AC| = 13$ birim ve $\sin(\widehat{A}) = \frac{12}{13}$ ise $\tan(\widehat{C})$ değerini bulunuz.

5.

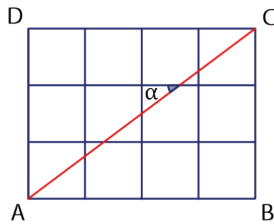


$\overset{\frown}{ABC}$ nde $[AB] \perp [AC]$, $[AD] \perp [BC]$, $[DF] \perp [AC]$ ve $[EF] \perp [DC]$ tir.
$4 \cdot |AF| = 3 \cdot |DF|$ ve $m(\widehat{ACB}) = \alpha$ olmak üzere $\cos\alpha$ değerini bulunuz.

6. $\dfrac{\sin 30^\circ + \cos 60^\circ}{\tan 45^\circ + \cot 45^\circ}$ değerini bulunuz.

7. a ve b dar açı olmak üzere $a + b = 90^\circ$ ise $\dfrac{\sin a \cdot \tan b}{\cot a \cdot \cos b}$ değerini bulunuz.

8. ABCD dikdörtgeni 12 birim kareye ayrılmıştır.



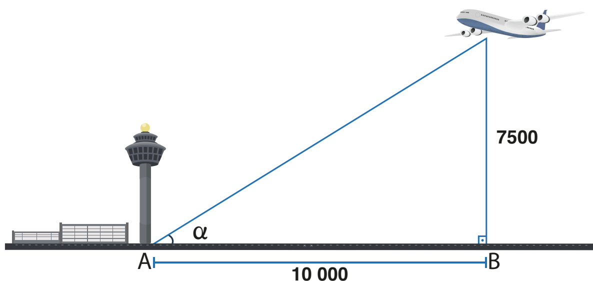
a) $\sin\alpha \cdot \cot\alpha$

b) $\cos\alpha \cdot \tan\alpha$

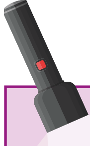
değerlerini bulunuz.

9. Duvara dayalı bir merdivenin taban düzlemi ile yaptığı açı 37° dir. Merdivenin uzunluğu 2 m ise merdivenin dayandığı noktaya kadar olan duvarın yüksekliğini bulunuz (37° nin sinüs değerini hesap makinesi kullanarak bulunuz.).

10. Şekildeki konuma sahip uçak, yerden 7500 m yükseklikte ve $|AB| = 10\,000$ m ise şekle göre α açısının sinüs değerini bulunuz.







GIYASEDDİN CEMŞİD

(1380 - 1429)

Matematik ve astronomi ile ilgilenmiştir. 2π yi 60 tabanında virgülden sonra 9 basamağını, 10 tabanında virgülden sonra 16 basamağını doğru olarak hesaplamıştır.

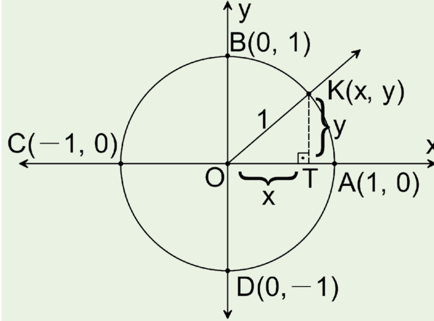
60 lık sistem ve ondalık sistem arasındaki benzerlikleri ortaya çıkarmıştır. Ondalık kesirleri, cebirsel olmayan sayıları (π , e vb.) hesaplamakta döneminin en etkin kullanıcılarından olmuştur. $\sin 1^\circ$ değerini, π ile aynı hassaslıkta hesaplamıştır.

Gıyaseddin Cemşid'in trigonometrik tabloları ise "Zij-i Khagani" adlı eserinde yer almıştır. Bu çalışmada her sinüs fonksiyonunun değerini 60 lık tabanda virgülden sonra 4 basamağını veren ve gök cisimleri üzerindeki farklı koordinat sistemleri arasında dönüşüm sağlayan tablolar bulunur.

Düzenlenmiştir.

9.4.4.4. Birim Çemberi Tanımlama ve Trigonometrik Oranları Birim Çemberin Üzerindeki Noktaların Koordinatlarıyla İlişkilendirme

Merkezi orijinde olan ve yarıçapı 1 birim olan çembere **birim çember** denir.



Yukarıda verilen birim çember üzerindeki K(x, y) noktası için TOK dik üçgeninde Pisagor teoremiyle $x^2+y^2=1$ olur.

ÖRNEK 32

$K(\frac{4}{5}, y)$ noktası birim çember üzerinde olduğuna göre y ifadesinin alabileceği değerleri bulunuz.

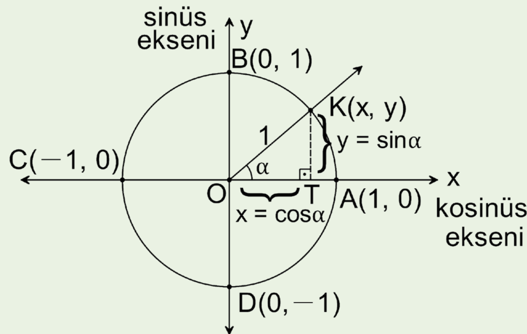
ÇÖZÜM

K noktası birim çember üzerinde olduğundan apsisi ile ordinatının kareleri toplamı 1 olur. Bu durumda

$$(\frac{4}{5})^2+y^2=1 \Rightarrow \frac{16}{25}+y^2=1 \Rightarrow y^2=1-\frac{16}{25} \Rightarrow y^2=\frac{9}{25}$$

$$\Rightarrow y=\frac{3}{5} \text{ veya } y=-\frac{3}{5} \text{ olur.}$$

Birim çember üzerindeki $[OK$ nın x ekseni ile yaptığı açı aşağıda verilen şekildeki gibi $\widehat{AOK}$ olsun.



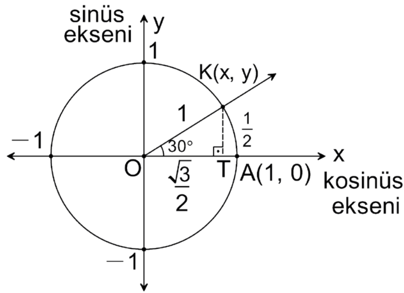
K(x, y) olmak üzere K noktasının apsisine α açısının kosinüsü, ordinatına α açısının sinüsü denir ve $x=\cos\alpha$, $y=\sin\alpha$ ile gösterilir. TOK dik üçgeninde Pisagor teoremiyle $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ elde edilir.



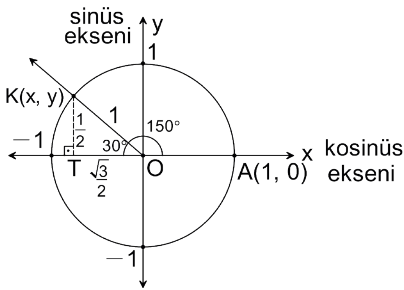
ÖRNEK 33

30° ve 150° nin sinüs ve kosinüslerini birim çember yardımıyla hesaplayınız.

ÇÖZÜM



$m(\widehat{AOK}) = 30^\circ$ olan yandaki birim çemberde KOT dik üçgeni $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ üçgeni olduğundan $|OT| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ birim ve $|KT| = \frac{1}{2}$ olur. Buradan $x = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ve $y = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ bulunur.



$m(\widehat{AOK}) = 150^\circ$ olan yandaki birim çemberde KOT dik üçgeni $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ özel üçgeni olduğundan $|OT| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ birim ve $|KT| = \frac{1}{2}$ olur.

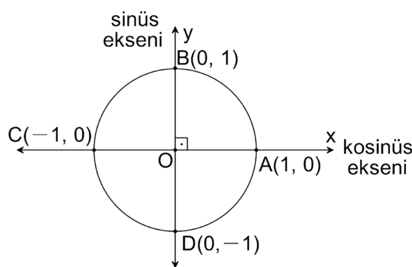
K noktası analitik düzlemin ikinci bölgesinde olduğundan $x < 0$ ve $y > 0$ olur.

Buradan $x = \cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ve $y = \sin 150^\circ = \frac{1}{2}$ bulunur.

ÖRNEK 34

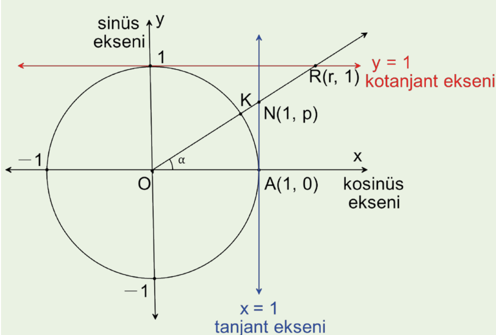
90° nin sinüs ve kosinüsünü birim çember yardımıyla hesaplayınız.

ÇÖZÜM



$m(\widehat{AOB}) = 90^\circ$ olmak üzere B noktasının apsisi 0 olduğundan $\cos 90^\circ = 0$ ve B noktasının ordinatı 1 olduğundan $\sin 90^\circ = 1$ bulunur.

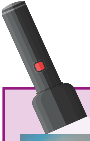
$x = 1$ doğrusuna tanjant ekseni, $y = 1$ doğrusuna kotanjant ekseni denir.



K(x, y) noktası birim çember üzerinde bir nokta ve $m(\widehat{AOK}) = \alpha$ olmak üzere

- [OK nın tanjant eksenini kestiği nokta olan N(1, p) için $p = \tan\alpha$ olur.
- [OK nın kotanjant eksenini kestiği nokta olan R(r, 1) için $r = \cot\alpha$ olur.







Temsilî Ebu'l-Vefa (940-998)

Ebu'l-Vefa tanjant fonksiyonunu ilk kullanan ve sinüs tanjant tablolarını ilk derleyen kişi olarak bilinir. Bu çalışmalarının bir kısmını Ay'ın yörüngesi ile ilgili araştırması oluşturmakta olup bunlar "Ay'ın Teorileri" adlı çalışmasında yer almıştır. Ayrıca sekant ve kosekant tanımlarını yapmıştır. Altı trigonometrik fonksiyonun bir yay ile arasındaki ilişkiyi açıklamıştır.

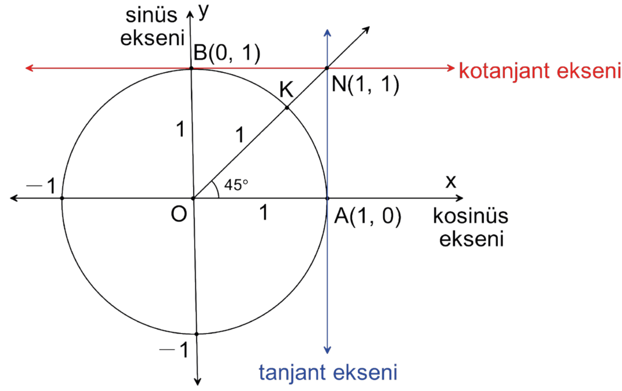
Ebu'l-Vefa bir açının yarısının sinüsünü virgülden sonra 9 basamağa kadar doğru veren sinüs tablolarını hesaplamak için bir yöntem keşfetmiştir. Ebu'l-Vefa $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$ eşitliğini biliyor ve kullanıyordu.

Düzenlenmiştir.

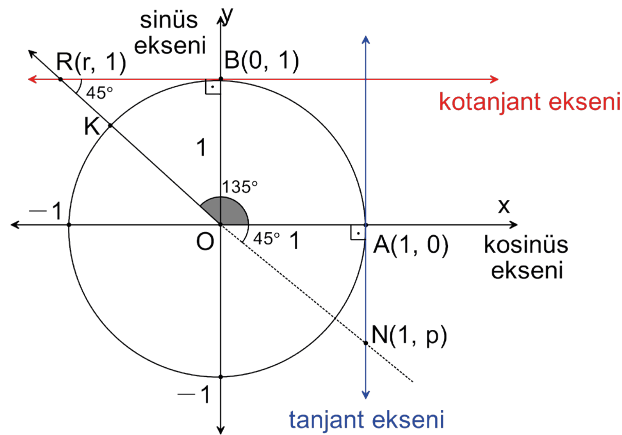
ÖRNEK 35

45° ve 135° nin tanjant ve kotanjant değerlerini birim çember yardımıyla bulunuz.

ÇÖZÜM



[OK nı hem tanjant hem de kotanjant eksenini aynı noktada keser. Bu nokta N olmak üzere AOBN dörtgeni kare olduğundan N(1,1) olur. Buradan $\tan 45^\circ = 1$ ve $\cot 45^\circ = 1$ bulunur.



$m(\widehat{AOK}) = 135^\circ$ olmak üzere

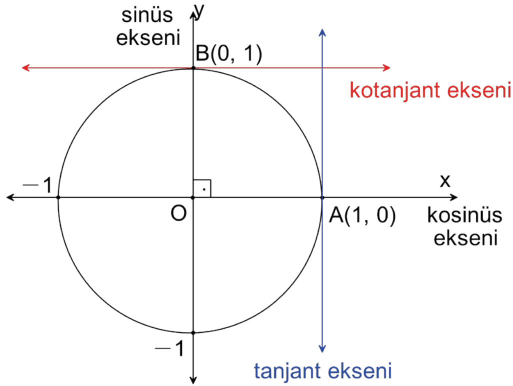
- [OK nın kotanjant eksenini kestiği nokta R(r, 1) olsun. BOR üçgeni $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ özel dik üçgeni olduğundan $|BR| = 1$ birim olur. R(r, 1) noktası analitik düzlemin 2. bölgesinde olduğundan $r < 0$ olmalıdır. Buradan $r = \cot 135^\circ = -1$ bulunur.
- [OK nın uzantısının tanjant eksenini kestiği nokta N(1, p) olsun. AON üçgeni $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ özel dik üçgeni olduğundan $|AN| = 1$ birim olur. N(1, p) noktası analitik düzlemin 4. bölgesinde olduğundan $p < 0$ olmalıdır. Buradan $p = \tan 135^\circ = -1$ bulunur.



ÖRNEK 36

90° nin tanjant ve kotanjant değerlerini birim çember yardımıyla hesaplayınız.

ÇÖZÜM



$m(\widehat{AOB}) = 90^\circ$ olmak üzere $[OB$ nın kotanjant eksenini kestiği nokta B(0, 1) noktasıdır. Buradan $\cot 90^\circ = 0$ bulunur.

$[OB$ tanjant eksenini kesmediği için $\tan 90^\circ$ tanımsızdır.

ALIŞTIRMALAR

1. $K\left(x, \frac{3}{5}\right)$ noktası birim çember üzerinde olduğuna göre x ifadesinin alabileceği değerleri bulunuz.

2. $45^\circ, 60^\circ, 120^\circ$ ve 135° nin sinüs ve kosinüs değerlerini birim çember yardımıyla hesaplayınız.

3. $30^\circ, 60^\circ, 120^\circ$ ve 150° nin tanjant ve kotanjant değerlerini birim çember yardımıyla hesaplayınız.





Terimler ve Kavramlar
- Taban
- Yükseklik
- Alan



Sembol ve Gösterimler

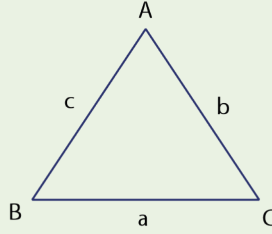
$A(\widehat{ABC})$

9.4.5. Üçgenin Alanı

Neler Öğreneceksiniz?

- Üçgenin alanı ile ilgili problem çözebilmeyi öğreneceksiniz.

9.4.5.1. Üçgenin Alanı ile İlgili Problemler

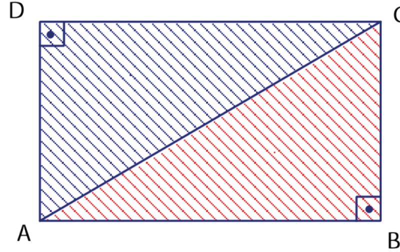


Üçgenin alanı, herhangi bir kenar uzunluğu ile bu kenara ait yüksekliğinin çarpımının yarısıdır.

Kenar uzunlukları a birim, b birim ve c birim olan $\widehat{ABC}$ nin alanı $A(\widehat{ABC})$ ile gösterilir ve $A(\widehat{ABC}) = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$ olur.

Bu özelliğin doğruluğu aşağıdaki gibi yapılabilir.

1. Dik Açılı Üçgenin Alanı



ABCD dikdörtgeni çizilirse

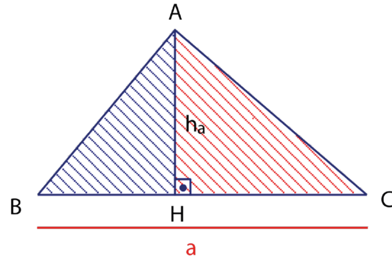
[AC] köşegeni dikdörtgenin alanını

ikiye böler. Bu durumda

$A(\widehat{ABC}) = \frac{A(ABCD)}{2} = \frac{|AB| \cdot |BC|}{2}$ olur.

Sonuç olarak dik üçgenin alanı dik kenarlar çarpımının yarısıdır ([AB] ve [BC] dik kenarlardır.).

2. Dar Açılı Üçgenin Alanı



Dar açılı bir üçgenin bir köşesinden yükseklik indirildiğinde şekildeki gibi iki tane dik üçgenin alanları toplamı $\widehat{ABC}$ nin alanını verir.

$$A(\widehat{ABC}) = A(\widehat{ABH}) + A(\widehat{AHC}) \Rightarrow A(\widehat{ABC}) = \frac{|BH| \cdot |AH|}{2} + \frac{|HC| \cdot |AH|}{2}$$

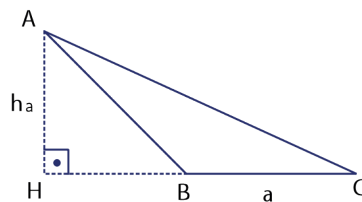
$$\Rightarrow A(\widehat{ABC}) = \frac{|AH|}{2} \cdot (|BH| + |HC|)$$

$$\Rightarrow A(\widehat{ABC}) = \frac{|AH| \cdot |BC|}{2} = \frac{a \cdot h_a}{2} \text{ olur.}$$

Siz de b ve c kenarları için ispat yapabilirsiniz.

3. Geniş Açılı Üçgenin Alanı

Geniş açılı olan $\widehat{ABC}$ nin diklik merkezi üçgenin dışındadır. Bu durumda



$$A(\widehat{ABC}) = A(\widehat{AHC}) - A(\widehat{AHB})$$

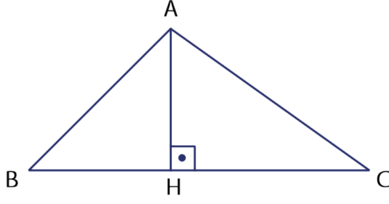
$$= \frac{|AH| \cdot |HC|}{2} - \frac{|AH| \cdot |HB|}{2}$$

$$= \frac{|AH|}{2} \cdot (|HC| - |HB|)$$

$$= a \cdot \frac{h_a}{2} \text{ olur.}$$

Siz de b ve c kenarları için ispat yapabilirsiniz.

ÖRNEK 1



Şekilde $\widehat{ABC}$ için

$|BC| = 18$ birim ,

$|AH| = 12$ birim ise

$A(\widehat{ABC})$ nın kaç birimkare olduğunu bulunuz.

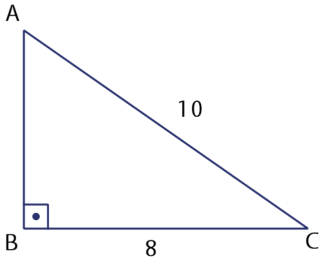
ÇÖZÜM

Üçgenin alanı, bir kenarı ile o kenara ait yüksekliğin çarpımının yarısı olduğundan

$A(\widehat{ABC}) = \dfrac{|BC| \cdot |AH|}{2} = \dfrac{18 \cdot 12}{2} = 108$ birimkare olur.

($A(\widehat{ABC})$ değerinin birimkare olduğuna dikkat ediniz.)

ÖRNEK 2



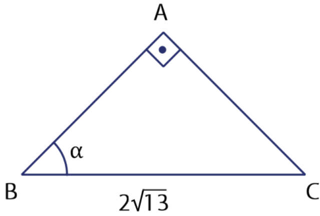
Şekildeki $\widehat{ABC}$ için $|BC| = 8$ birim, $|AC| = 10$ birim ise $A(\widehat{ABC})$ nın kaç birimkare olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

6 — 8 —10 dik üçgeni ile $|AB| = 6$ birim olur. O hâlde

$A(\widehat{ABC}) = \dfrac{|AB| \cdot |BC|}{2} = \dfrac{6 \cdot 8}{2} = 24$ birimkare olur.

ÖRNEK 3

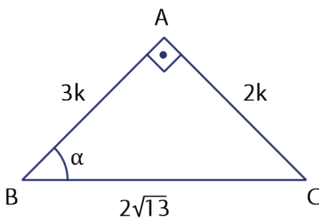


Şekildeki ABC dik üçgeni için

$\tan\alpha = \dfrac{2}{3}$ ve $|BC| = 2\sqrt{13}$ birim

ise $A(\widehat{ABC})$ nı bulunuz.

ÇÖZÜM



$\tan\alpha = \dfrac{|AC|}{|AB|} = \dfrac{2}{3}$ ise $|AC| = 2k$ ve $|AB| = 3k$

denir $(k \in \mathbb{R}^{+})$.

Pisagor teoremi ile

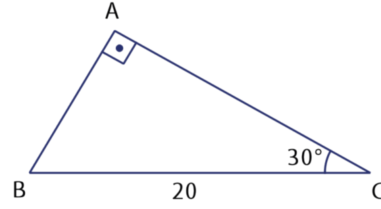
$(2\sqrt{13})^2 = (3k)^2 + (2k)^2 \Rightarrow 52 = 9k^2 + 4k^2$

$\Rightarrow 52 = 13k^2$

$\Rightarrow k^2 = 4$ olur.

Bu durumda $A(\widehat{ABC}) = \dfrac{|AB| \cdot |AC|}{2} = \dfrac{3k \cdot 2k}{2} = 3k^2 = 3 \cdot 4 = 12$ birimkare olur.

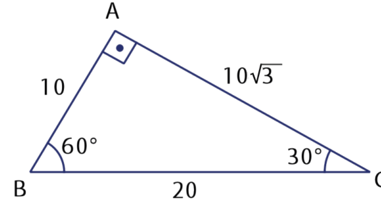
ÖRNEK 4



Şekildeki $\widehat{ABC}$ için [AB] ⊥ [AC], m($\widehat{ACB}$) = 30° ve |BC| = 20 birim olarak veriliyor.

A($\widehat{ABC}$) nın kaç birimkare olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



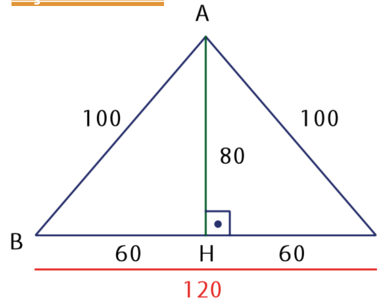
30° - 60° - 90° üçgeni yardımıyla |AB| = 10 birim ve |AC| = $10\sqrt{3}$ birimdir. Bu durumda

$A(\widehat{ABC}) = \dfrac{10 \cdot 10\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}$ birimkare olur.

ÖRNEK 5

Üçgen şeklindeki bir tarlanın iki kenarı 100 er metre diğer kenarı ise 120 metredir. Bu tarlanın metrekare fiyatı 100 Türk lirası ise tarlanın değerinin kaç Türk lirası olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Tarla yandaki gibi modellensin.

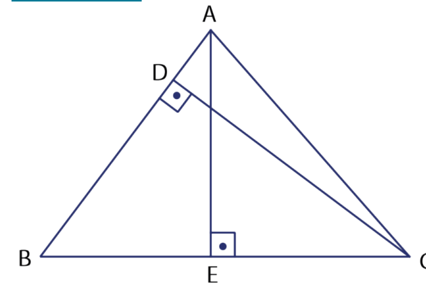
Tarla ikizkenar üçgen şeklinde olduğundan tepe açısından karşı kenara dikme indirilir. Bu indirilen dikme, tarlanın 120 metrelik kenarını iki eşit uzunluğa ayırır.

$\widehat{AHC}$, 3 - 4 - 5 dik üçgeninin kenar uzunluklarının 20 katı olan 60 — 80 — 100 üçgeni olduğundan |AH| = 80 m olur.

Bu durumda tarlanın alanı $\dfrac{120 \cdot 80}{2} = 4800\ m^2$ olur.

Tarlanın değeri ise 4800 · 100 Türk lirası = 480 000 Türk lirası olur.

ÖRNEK 6



Şekildeki $\widehat{ABC}$ için

|AB| = 12 birim,

|BC| = 15 birim,

|DC| = 10 birim ise |AE| nu bulunuz.

ÇÖZÜM

[DC] yüksekliği kullanılarak

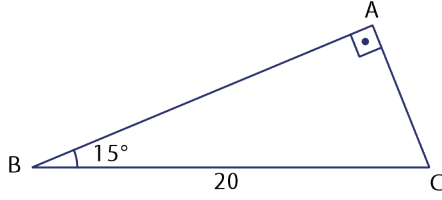
$A(\widehat{ABC}) = \dfrac{|AB| \cdot |DC|}{2} = \dfrac{12 \cdot 10}{2} = 60$ birimkare olur.

[AE] yüksekliği kullanılarak $A(\widehat{ABC}) = \dfrac{|BC| \cdot |AE|}{2} = \dfrac{15 \cdot |AE|}{2}$ olur.

Her iki sonuç da $\widehat{ABC}$ nin alanını verdiğinden birbirlerine eşittir. O hâlde

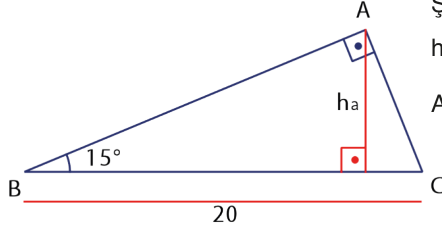
$60 = \dfrac{15 \cdot |AE|}{2} \Rightarrow |AE| = \dfrac{60 \cdot 2}{15} \Rightarrow |AE| = 8$ birim olur.

ÖRNEK 7



Şekildeki ABC dik üçgeninde $m(\widehat{ABC}) = 15^\circ$ ve $[BA] \perp [AC]$ tir. $|BC| = 20$ birim ise $A(\widehat{ABC})$ nın kaç birimkare olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

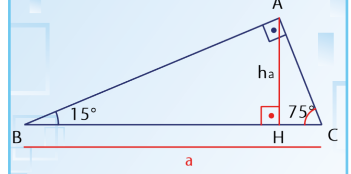


Şekilde $15^\circ - 75^\circ - 90^\circ$ dik üçgeninde

$h_a = \dfrac{20}{4} = 5$ birim olur. Bu durumda

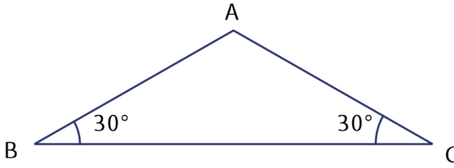
$A(\widehat{ABC}) = \dfrac{a \cdot h_a}{2} = \dfrac{20 \cdot 5}{2} = 50$ birimkare olur.





Şekilde $15^\circ - 75^\circ - 90^\circ$ üçgeninde dik açıdan indirilen $\widehat{ABC}$ nin yüksekliği, hipotenüs uzunluğunun $\dfrac{1}{4}$ i olur. Şekilde $h_a = \dfrac{a}{4}$ olur.

ÖRNEK 8



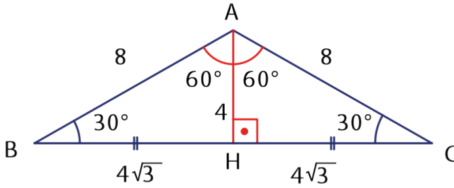
Şekildeki $\widehat{ABC}$ için

$m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = 30^\circ$ ve

$|AC| = 8$ birim ise $A(\widehat{ABC})$ nın kaç birimkare olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$\widehat{ABC}$, ikizkenar üçgen olduğundan tepe açısı olan A açısından dikme indirildiğinde $|BH| = |HC|$ olur. Ayrıca $|AC| = |AB| = 8$ birim olur.



$\widehat{ABH}$ için 30° — 60° — 90° üçgeni yardımıyla

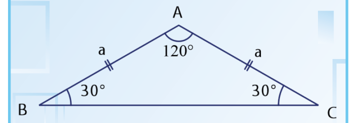
$|AH| = 4$ birim ve $|BH| = 4\sqrt{3}$ birim olur.

$|BH| = |HC|$ olduğundan

$|HC| = 4\sqrt{3}$ birim olur.

O hâlde $A(\widehat{ABC}) = \dfrac{|AH| \cdot |BC|}{2} = \dfrac{4 \cdot 8\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}$ birimkare olur.





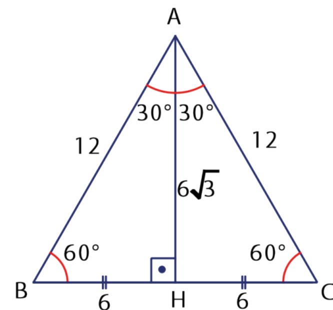
$30^\circ - 30^\circ - 120^\circ$ üçgeni olan şekildeki $\widehat{ABC}$ için

$A(\widehat{ABC}) = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ olur.

ÖRNEK 9

Kenar uzunlukları 12 birim olan bir ABC eşkenar üçgeninin alanını bulunuz.

ÇÖZÜM



A köşesinden [BC] üzerindeki H noktasına dikme indirilirse $|BH| = |HC| = 6$ birim ve

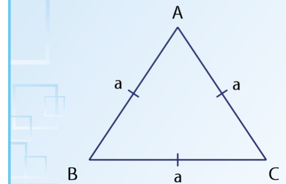
$m(\widehat{BAH}) = m(\widehat{CAH}) = 30^\circ$ olur.

$\widehat{ABH}$ için 30° — 60° — 90° üçgeni yardımıyla

$|AH| = 6\sqrt{3}$ birim olur.

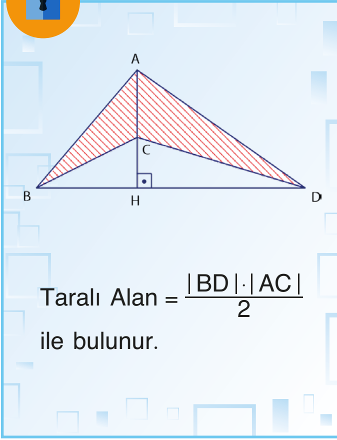
Bu durumda $A(\widehat{ABC}) = \dfrac{|AH| \cdot |BC|}{2} = \dfrac{6\sqrt{3} \cdot 12}{2} = 36\sqrt{3}$ birimkare olur.



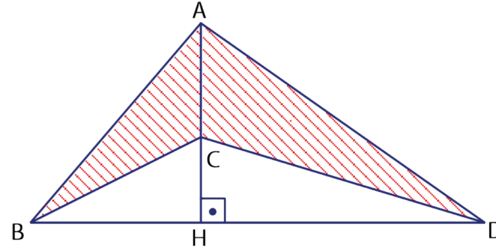


Bir kenarı a birim olan eşkenar üçgenin alanı $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ birimkare olur.



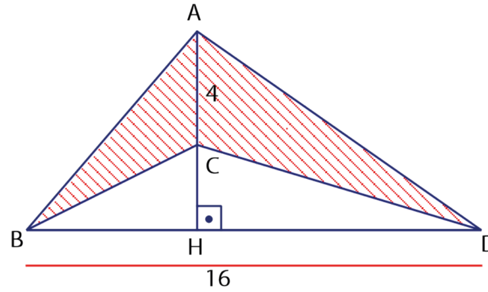


ÖRNEK 10



Şekildeki $\widehat{ABD}$ için A, C, H doğrusal ve [AH] ⊥ [BD] tir. |BD| = 16 birim ve |AC| = 4 birim ise taralı bölgenin alanını bulunuz.

ÇÖZÜM



Şekle bakılırsa $\widehat{ABD}$ nin alanından $\widehat{CBD}$ nin alanı çıkarılınca taralı bölgenin alanı elde edilir.

$$\text{Taralı Alan} = A(\widehat{ABD}) - A(\widehat{CBD}) = \frac{|BD| \cdot |AH|}{2} - \frac{|BD| \cdot |CH|}{2}$$

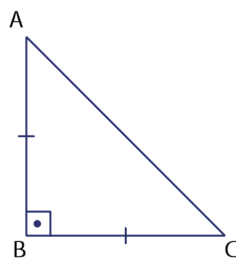
$$= \frac{|BD|}{2} \cdot (|AH| - |CH|)$$

$$= \frac{|BD|}{2} \cdot |AC|$$

$$= \frac{16}{2} \cdot 4$$

$$= 32 \text{ birimkare olur.}$$

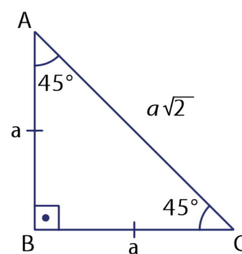
ÖRNEK 11



Şekildeki $\widehat{ABC}$ için |AB| = |BC| ve m($\widehat{ABC}$) = 90° olarak veriliyor. $\widehat{ABC}$ nin alanını |AC| türünden yazınız.

ÇÖZÜM

$\widehat{ABC}$ ikizkenar dik üçgendir. Buna göre



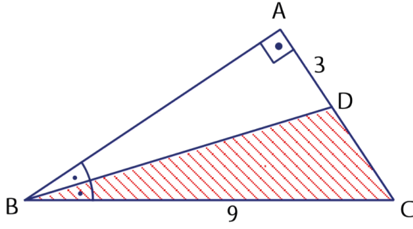
$$A(\widehat{ABC}) = \frac{|AB| \cdot |BC|}{2} = \frac{a \cdot a}{2} = \frac{a^2}{2} \text{ birimkare olur.}$$

$$|AC| = a\sqrt{2} \Rightarrow |AC|^2 = 2a^2 \Rightarrow \frac{|AC|^2}{2} = a^2 \text{ olur.}$$

$A(\widehat{ABC})$ değerinde a^2 yerine $\frac{|AC|^2}{2}$ yazılırsa

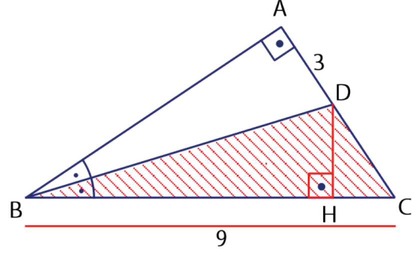
$$A(\widehat{ABC}) = \frac{a^2}{2} = \frac{\frac{|AC|^2}{2}}{2} = \frac{|AC|^2}{4} = \left(\frac{|AC|}{2}\right)^2 \text{ olur.}$$

ÖRNEK 12



Şekilde [AB] ⊥ [AC] olmak üzere $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{DBC})$, $|AD| = 3$ birim ve $|BC| = 9$ birim ise taralı bölgenin alanını bulunuz.

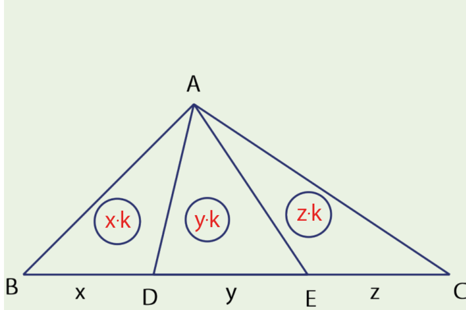
ÇÖZÜM



B köşesine ait açıortay, [BD] dır. Açıortay doğrusu üzerinden açının kollarına indirilen dikmeler eşit uzunlukta olduğundan $|AD| = |DH| = 3$ birim olur.

Bu durumda taralı bölgenin alanı

$$\frac{|BC| \cdot |DH|}{2} = \frac{9 \cdot 3}{2} = \frac{27}{2} \text{ birimkare olur.}$$

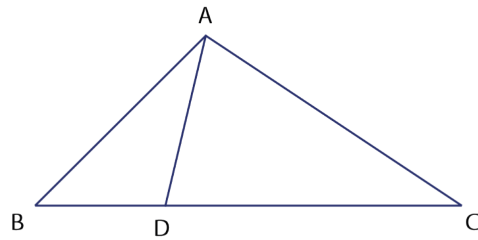


Yükseklikleri eşit olan üçgenlerin alanları oranı, yüksekliğin indirildiği tabanların uzunlukları oranına eşittir.

Şekildeki $\widehat{ABC}$, $\widehat{ABD}$, $\widehat{ADE}$ ve $\widehat{AEC}$ nin yükseklikleri birbirine eşittir.
Bu durumda

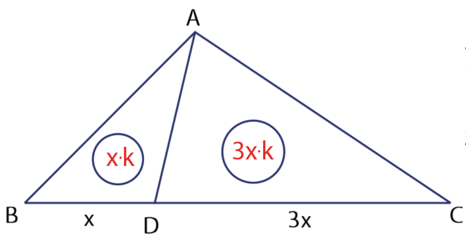
$A(\widehat{ABD}) = x \cdot k$ birimkare
$A(\widehat{ADE}) = y \cdot k$ birimkare
$A(\widehat{AEC}) = z \cdot k$ birimkare yazılabilir.

ÖRNEK 13



Şekildeki $\widehat{ABC}$ için $|DC| = 3 \cdot |BD|$ ise $\dfrac{A(\widehat{ABD})}{A(\widehat{ADC})}$ ve $\dfrac{A(\widehat{ABD})}{A(\widehat{ABC})}$ oranlarını bulunuz.

ÇÖZÜM



$|DC| = 3 \cdot |BD|$ ise $|BD| = x$ ve $|DC| = 3x$ yazılır.

$\widehat{ABD}$ ile $\widehat{ADC}$ nin yükseklikleri, aynı zamanda $\widehat{ABC}$ nin yükseklikleri olur.

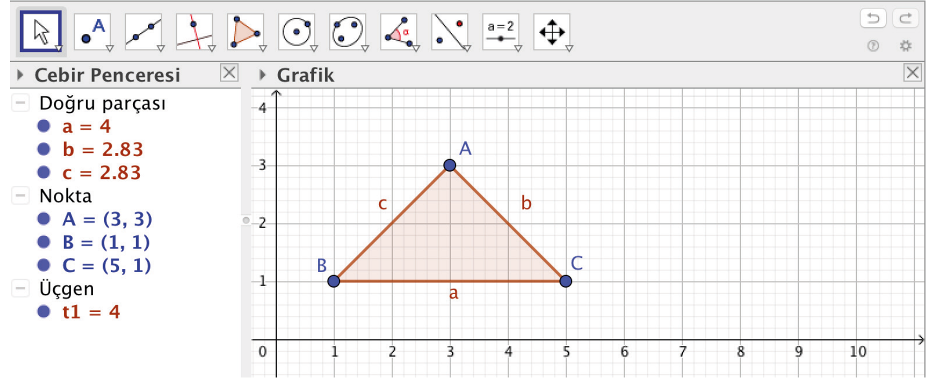
Bu durumda $\dfrac{A(\widehat{ABD})}{A(\widehat{ADC})} = \dfrac{x \cdot k}{3x \cdot k} = \dfrac{1}{3}$ ve $\dfrac{A(\widehat{ABD})}{A(\widehat{ABC})} = \dfrac{x \cdot k}{4x \cdot k} = \dfrac{1}{4}$ olur.

ÖRNEK 14

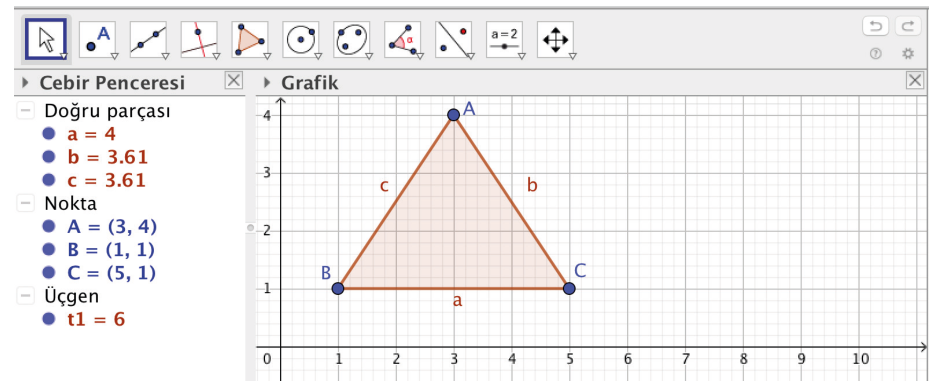
GeoGebra programı yardımıyla taban ve yüksekliği değiştirilen bir üçgenin alanındaki değişimi inceleyiniz.

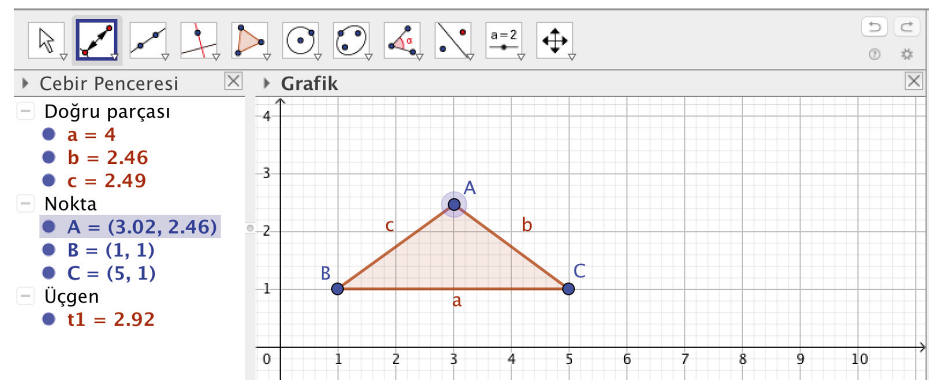
ÇÖZÜM

GeoGebra programını açarak A(3, 3), B(1, 1) ve C(5, 1) noktaları ile bir üçgen çiziniz. Aşağıdaki görselde çizilen üçgenin alanı cebir penceresinde t1 = 4 olarak görülmektedir.



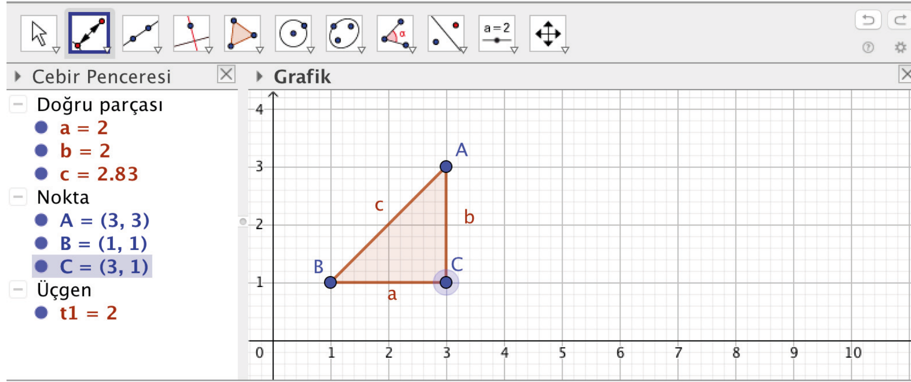
Araç çubuğundaki 2. kutuya ve ardından açılan "Noktayı Bağla / Ayır" sekmesine tıklanır. Daha sonra A köşesi yukarı aşağı oynatılır. Bu durumda üçgenin yüksekliği A köşesi yukarı oynatıldığında artacak, A köşesi aşağı oynatıldığında azalacaktır. Yükseklik arttıkça alanın arttığı yükseklik azaldıkça alanın azaldığı görülecektir.

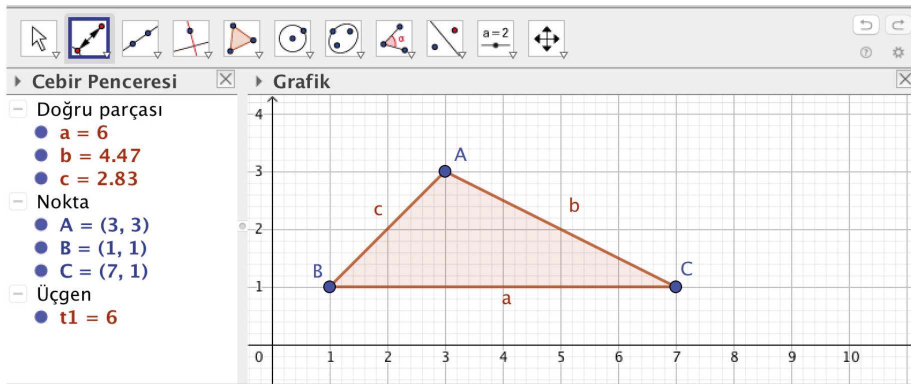




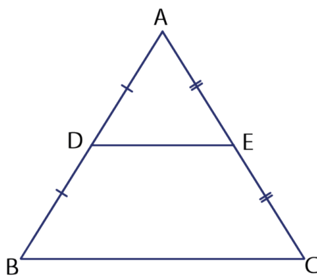


Yükseklik sabit olacak şekilde [BC] tabanının C köşesini tutarak uzatıp kısaltınız. Yükseklik sabit iken taban uzunluğu arttıkça alanın arttığı taban uzunluğu azaldıkça alanın azaldığı görülür.





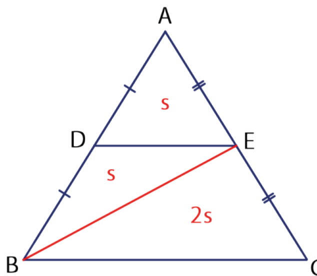
ÖRNEK 15



Şekildeki $\widehat{ABC}$ için |AD| = |DB| ve |AE| = |EC| tir.

$\dfrac{A(\widehat{ADE})}{A(DBCE)}$ oranını bulunuz.

ÇÖZÜM



B ve E noktaları birleştirildiğinde $\widehat{ADE}$ ile $\widehat{DBE}$ nin taban uzunlukları ve yükseklikleri eşit olduğundan her ikisinin alanı da şekildeki gibi S olsun.

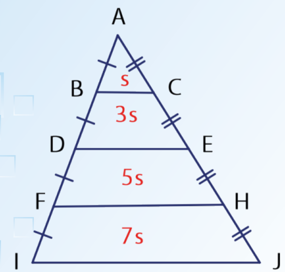
$\widehat{ABE}$ ile $\widehat{EBC}$ nin taban uzunlukları ve

yükseklikleri eşit olduğundan

$A(\widehat{ABE}) = A(\widehat{EBC}) = 2S$ olur.

Bu durumda $\dfrac{A(\widehat{ADE})}{A(DBCE)} = \dfrac{S}{3S} = \dfrac{1}{3}$ olur.

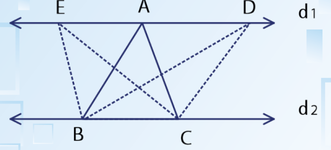




Birbirine paralel olan ve kestikleri kenarları kendi aralarında eşit uzunluklara bölen doğrular, üçgeni şekildeki gibi alanlara ayırır.



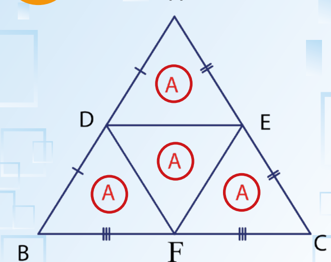




$A(\widehat{ABC}) = A(\widehat{EBC}) = A(\widehat{DBC})$

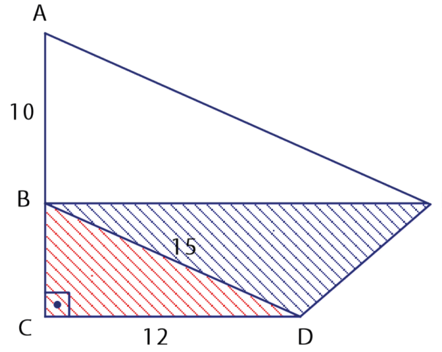
Paralel iki doğru arasındaki uzaklık, köşeleri bu doğrular üzerinde olacak şekilde çizilen tüm üçgenlerin yüksekliğidir. Bu durumda şekildeki A noktası (üzerinde tek nokta bulunduran köşe) d_1 doğrusu üzerinde nereye taşınırsa taşınsın taban olan [BC] hiç değişmediği ve yükseklik hep aynı kaldığı için oluşan üçgenlerin alanları eşittir.





Yukarıdaki üçgende D, E ve F noktaları sırasıyla [AB], [AC] ve [BC] nın orta noktaları ise alanlar şekildeki gibi olur.

ÖRNEK 16



Şekilde A, B, C doğrusal olmak üzere

[AC] ⊥ [CD] ve [AE] // [BD] dır.

|AB| = 10 birim,

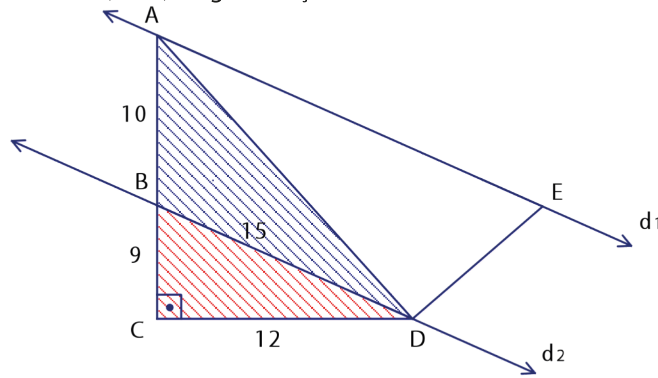
|BD| = 15 birim,

|DC| = 12 birim ise taralı alanlar toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

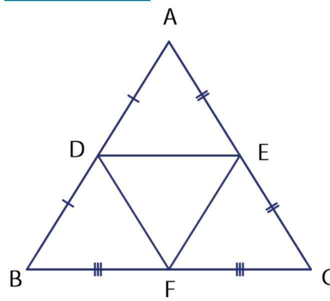
[AE] // [BD] olduğundan aşağıda verilen çizimdeki gibi d_1 doğrusu üzerindeki E köşesi A köşesine taşınarak ABD üçgeni elde edilir. Bu durumda yükseklik değişmediği ve taban olan [BD] sabit kaldığı için $A(\widehat{ABD}) = A(\widehat{EBD})$ olur.

BCD dik üçgeni 9-12-15 dik üçgenidir ve |BC| = 9 birim olur. Bu durumda taralı alanlar $A(\widehat{ACD})$ değerine eşittir.



O hâlde $A(\widehat{ACD}) = \frac{|AC| \cdot |CD|}{2} = \frac{19 \cdot 12}{2} = 114$ birimkare olur.

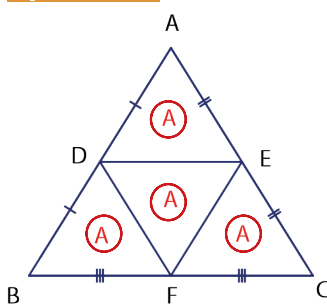
ÖRNEK 17



D, E ve F noktaları $\widehat{ABC}$ nde bulundukları kenarların orta noktalarıdır.

$A(\widehat{DEF}) = 8$ birimkare ise $A(\widehat{ABC})$ nın kaç birimkare olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



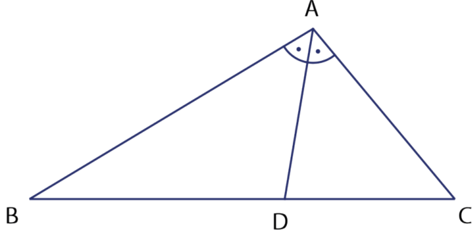
[DE], [DF] ve [EF] ayrı ayrı orta tabandır.

$A(\widehat{ADE}) = A$ denilsin. [DE] // [BC] olduğundan $\widehat{BDF}$, $\widehat{DEF}$ ve $\widehat{EFC}$ nin yükseklikleri eşittir. Yükseklikleri ve bu yüksekliklere ait taban uzunlukları eşit olan üçgenlerin alanları eşittir. Dolayısıyla

$A(\widehat{DEF}) = 8$ birimkare

ise $A(\widehat{ABC}) = 4 \cdot 8 = 32$ birimkare olur.

ÖRNEK 18



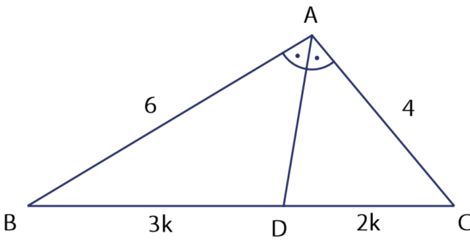
Şekildeki $\widehat{ABC}$ için

m($\widehat{BAD}$) = m($\widehat{CAD}$), |AB| = 6 birim ve |AC| = 4 birim olarak verilmiştir.

$A(\widehat{ABD}) = 30$ birimkare ise $A(\widehat{ADC})$ nın kaç birimkare olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

A köşesinden çizilen açıortay, [AD] olduğundan



$\frac{|DB|}{|DC|} = \frac{|BA|}{|CA|} \Rightarrow \frac{|DB|}{|DC|} = \frac{6}{4}$

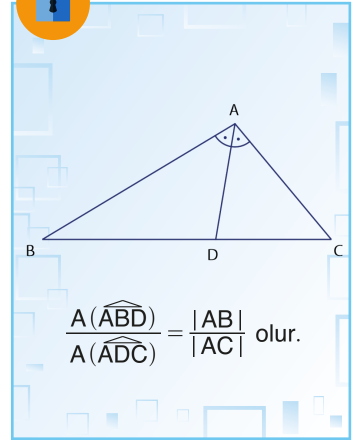
$|DB| = 3k$ ve $|DC| = 2k$ denebilir.

$A(\widehat{ABD}) = 3A$ ve $A(\widehat{ADC}) = 2A$ olur.

$A(\widehat{ABD}) = 3A \Rightarrow 30 = 3A \Rightarrow A = 10$ olur.

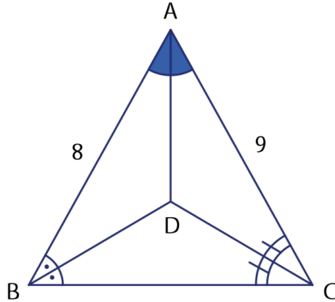
Bu durumda $A(\widehat{ADC}) = 2A = 2 \cdot 10 = 20$ birimkare olur.





$\frac{A(\widehat{ABD})}{A(\widehat{ADC})} = \frac{|AB|}{|AC|}$ olur.

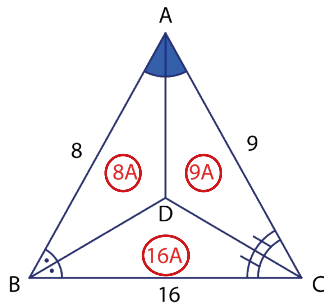
ÖRNEK 19



$\widehat{ABC}$ nin kenar uzunlukları tam sayıdır.

$\frac{A(\widehat{ABD})}{A(\widehat{BDC})}$ oranının **en az** kaç olabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

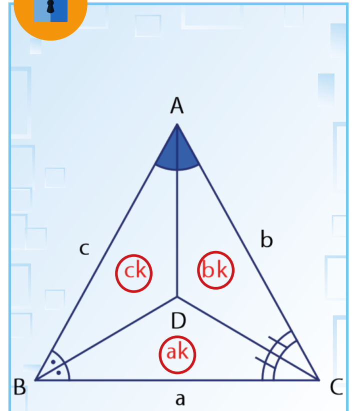


$9 - 8 < |BC| < 9 + 8 \Rightarrow 1 < |BC| < 17$ olur.

$\frac{A(\widehat{ABD})}{A(\widehat{BDC})}$ oranının en az olabilmesi için $A(\widehat{BDC})$ nın değerinin en çok olması gerekir. Açıortayların kesim noktası D ve üçgenin köşeleri ile oluşturulan üçgenlerin alanları, $\widehat{ABC}$ nin kenarlarıyla doğru orantılıdır. Buradan |BC| = 16 alınarak $A(\widehat{BDC})$ en çok olacak şekilde ayarlanabilir.

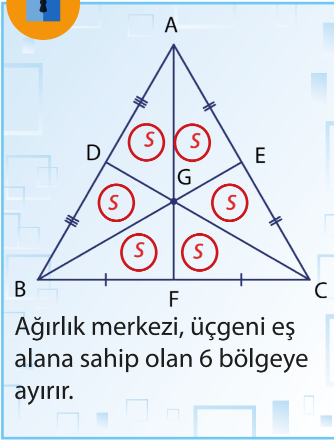
Bu durumda istenen oran en az $\frac{A(\widehat{ABD})}{A(\widehat{BDC})} = \frac{8A}{16A} = \frac{1}{2}$ olur.





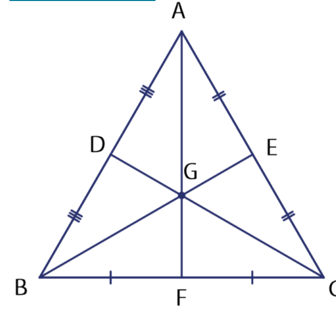
$\widehat{ABC}$ nin köşelerinin ve iç açıortaylarının kesim noktası ile oluşturulan üçgenlerin alanları, $\widehat{ABC}$ ile ortak olan kenarların uzunluklarıyla doğru orantılıdır.





Ağırlık merkezi, üçgeni eş alana sahip olan 6 bölgeye ayırır.

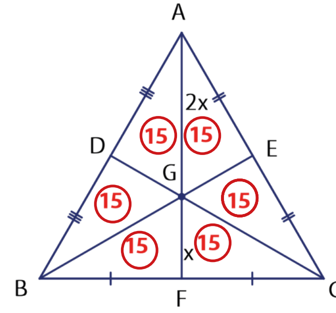
ÖRNEK 20



Şekildeki $\widehat{ABC}$ nin ağırlık merkezi G noktasıdır.

$A(\widehat{AGE}) = 15$ birimkare ise $A(\widehat{ABC})$ nın kaç birimkare olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



G noktası ağırlık merkezi olduğundan |GF| = x ve |AG|=2x denilsin.

$\widehat{AEG}$ ile $\widehat{GEC}$ nin taban uzunlukları ve yükseklikleri eşit olduğundan $A(\widehat{AGE}) = A(\widehat{GEC}) = 15$ birimkare olur.

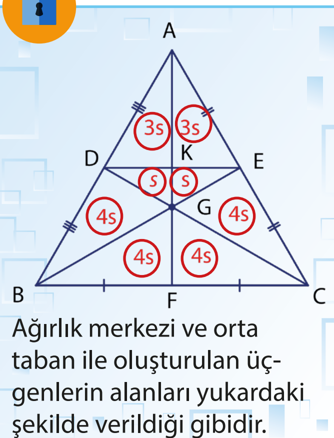
$\widehat{AGC}$ ile $\widehat{FGC}$ nin yükseklikleri eşittir. Bu üçgenlerin taban uzunlukları $|AG| = 2x$ ve $|GF| = x$ olduğundan

$A(\widehat{AGC}) = 30$ birimkare ise $A(\widehat{FGC}) = 15$ birimkare olur.

Aynı işlemler $\widehat{ABF}$ için de yapılırsa ağırlık merkezi ile oluşturulan şekildeki üçgenlerin alanlarının eşit olduğu görülür.

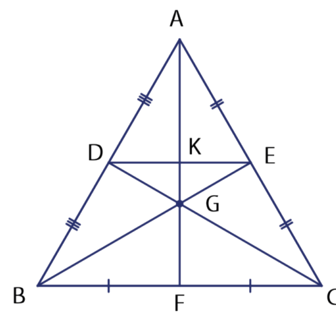
Bu durumda $A(\widehat{ABC}) = 6 \cdot A(\widehat{AGE}) = 6 \cdot 15 = 90$ birimkare olur.





Ağırlık merkezi ve orta taban ile oluşturulan üçgenlerin alanları yukardaki şekilde verildiği gibidir.

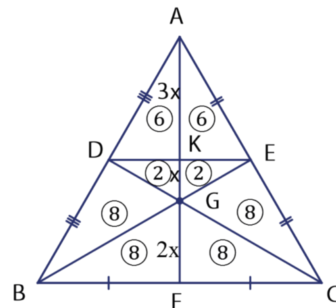
ÖRNEK 21



Şekildeki $\widehat{ABC}$ nin ağırlık merkezi G noktası ve D, E, F noktaları da bulundukları kenarların orta noktalarıdır.

$A(\widehat{KGE}) = 2$ birimkare ise $A(\widehat{ABC})$ nın kaç birimkare olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

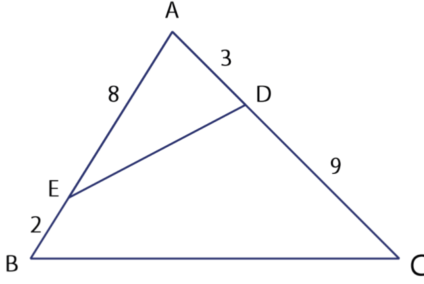


$\widehat{AKE}$ ve $\widehat{KGE}$ nin yükseklikleri eşittir. Taban uzunlukları $|AK| = 3x$ ve $|KG| = x$ olduğundan

$A(\widehat{KGE}) = 2$ birimkare ise $A(\widehat{AKE}) = 3 \cdot 2 = 6$ birimkare olur.

Ağırlık merkezi üçgeni eş alana sahip 6 bölgeye ayırdığından $A(\widehat{ABC}) = 6 \cdot A(\widehat{AGE}) = 6 \cdot 8 = 48$ birimkare olur.

ÖRNEK 22



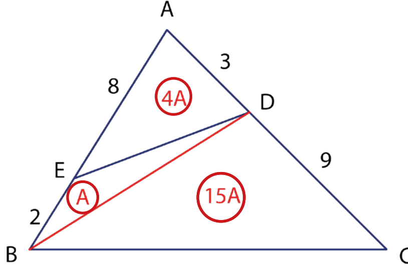
Şekildeki $\widehat{ABC}$ için

$|AE| = 8$ birim, $|EB| = 2$ birim,

$|AD| = 3$ birim, $|DC| = 9$ birim ise

$\dfrac{A(\widehat{AED})}{A(\widehat{ABC})}$ oranını bulunuz.

ÇÖZÜM



D ve B noktalarını birleştirilsin. $\widehat{AED}$ ve $\widehat{EDB}$ nin D köşesine göre yükseklikleri eşittir. Bu durumda alanları oranı, tabanları oranına eşit olduğundan

$\dfrac{A(\widehat{AED})}{A(\widehat{EDB})} = \dfrac{8}{2} = 4$ olur.

$A(\widehat{EDB}) = A$ ise $A(\widehat{AED}) = 4A$ olur.

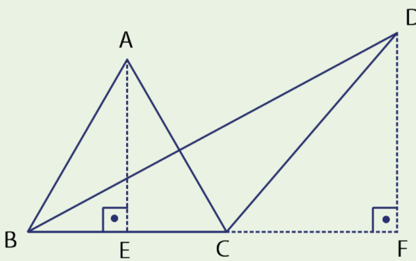
$\widehat{ABD}$ ile $\widehat{DBC}$ nin B köşesine göre yükseklikleri eşittir. Bu durumda alanları oranı, tabanları oranına eşit olduğundan

$\dfrac{A(\widehat{ABD})}{A(\widehat{DBC})} = \dfrac{3}{9} \Rightarrow \dfrac{5A}{A(\widehat{DBC})} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow A(\widehat{DBC}) = 15A$ olur.

O hâlde $\dfrac{A(\widehat{AED})}{A(\widehat{ABC})} = \dfrac{4A}{20A} = \dfrac{1}{5}$ olur.

Taban uzunlukları eşit olan üçgenlerin alanları oranı, eşit olan taban uzunluklarına ait yüksekliklerinin oranına eşittir.

Şekildeki $\widehat{ABC}$ ile $\widehat{DBC}$ nin ortak tabanları [BC] dır.

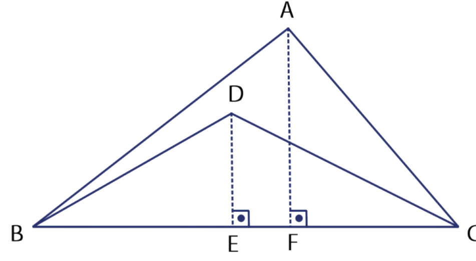


Bu durumda $\dfrac{A(\widehat{ABC})}{A(\widehat{DBC})} = \dfrac{|AE|}{|DF|}$ olur.

DÜŞÜNÜYORUM

Bir önceki kutuda anlatılan durumu GeoGebra programı ile göstererek sınıf ortamında arkadaşlarınıza sunum yapınız. A ve D noktasının yerlerinde yapılan değişikliklere göre alanlarda meydana gelen farklılıkları gözlemleyiniz.

ÖRNEK 23



Şekilde [AF] ⊥ [BC] ve [DE] ⊥ [BC] dır.

$\frac{A(\widehat{BDC})}{A(\widehat{BAC})} = \frac{2}{3}$ ise $\frac{|DE|}{|AF|}$ oranını bulunuz.

ÇÖZÜM

$\widehat{BAC}$ ile $\widehat{BDC}$ nin ortak tabanları [BC] olur. Bu durumda alanları oranı yükseklikleri oranına eşittir. $\frac{A(\widehat{BDC})}{A(\widehat{BAC})} = \frac{|DE|}{|AF|} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{|DE|}{|AF|}$ olur.

Benzer üçgenlerin alanları oranı, benzerlik oranının karesine eşittir.

ÖRNEK 24

Bir bahçenin üçgen şeklindeki bir bölümü, çim ekmek için benzerlik oranı $\frac{1}{50}$ i olacak şekilde modelleniyor. Modelin alanı, 16 cm^2 dir. Buna göre çim ekilecek olan bu toprak bölgenin alanının kaç m^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Modeldeki üçgene $\widehat{ABC}$, modellenen toprak bölgeye $\widehat{DEF}$ denir. Alanlar oranı benzerlik oranının karesine eşit olduğundan

$$\frac{A(\widehat{ABC})}{A(\widehat{DEF})} = \left(\frac{1}{50}\right)^2 \Rightarrow \frac{16}{A(\widehat{DEF})} = \frac{1}{2500} \Rightarrow A(\widehat{DEF}) = 40\,000\ cm^2 \text{ olur.}$$

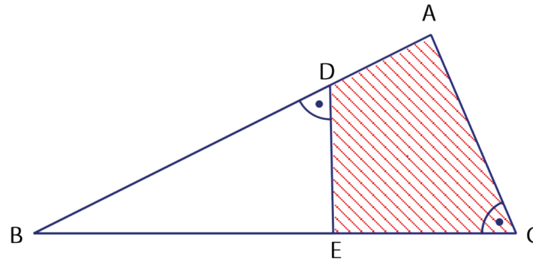
1 m^2 10 000 cm^2 ise

x m^2 40 000 cm^2 olur.

$x \cdot 10\,000 = 40\,000$

$x = 4$ m^2 olur. Bu durumda çim ekilecek alan 4 m^2 olarak bulunur.

ÖRNEK 25



Şekilde $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{EDB})$,

$\frac{|BE|}{|BA|} = \frac{2}{3}$ ve

$A(\widehat{BDE}) = 24$ birimkare ise

A(ADEC) nın kaç birimkare olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$m(\widehat{BDE}) = m(\widehat{ACB})$ ve $m(\widehat{DBE}) = m(\widehat{CBA})$ olduğundan A.A. benzerlik kuralından

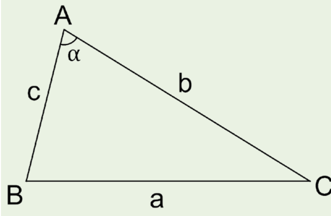
$\widehat{BDE} \sim \widehat{BCA}$ olup $\frac{|BD|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|CA|} = \frac{|BE|}{|BA|} = \frac{2}{3}$ olur.

Bu durumda benzerlik oranı $\frac{2}{3}$ olur.

$$\frac{A(\widehat{BDE})}{A(\widehat{BCA})} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow \frac{24}{A(\widehat{BCA})} = \frac{4}{9} \Rightarrow A(\widehat{BCA}) = 54 \text{ birimkare olur.}$$

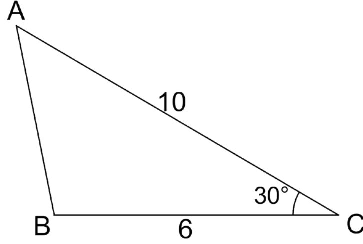
O hâlde $A(ADEC) = A(\widehat{BCA}) - A(\widehat{BDE}) = 54 - 24 = 30$ birimkare olur.





Yandaki gibi iki kenarı ve bu iki kenar arasındaki açısı bilinen üçgenin alanı $A(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha$ formülü ile bulunur.

ÖRNEK 26



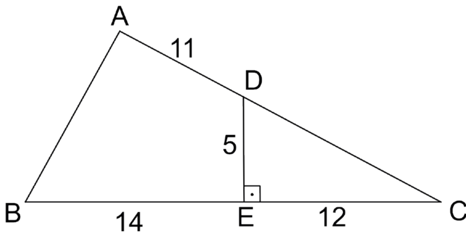
Yandaki ABC üçgeninde $|AC| = 10$ cm, $|BC| = 6$ cm ve $m(\widehat{ACB}) = 30°$ olarak verilmiştir.

Buna göre ABC üçgeninin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

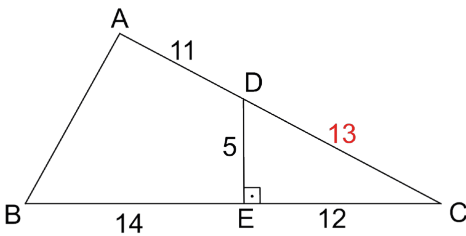
Verilen üçgenin iki kenar uzunluğu ve aralarında kalan iç açının ölçüsü bilindiğine göre $A(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BC| \cdot \sin\alpha = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{5}{\cancel{10}} \cdot 6 \cdot \sin 30° = 30 \cdot \frac{1}{2} = 15$ cm^2 olarak bulunur.

ÖRNEK 27



Şekildeki ABC üçgeninde $[DE] \perp [BC]$ A, D,C noktaları ve B, E, C noktaları doğrusal olmak üzere $|AD| = 11$ cm, $|DE| = 5$ cm, $|CE| = 12$ cm ve $|EB| = 14$ cm olarak verilmiştir. Verilenlere göre ABED dörtgeninin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



DEC üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa

$|DC|^2 = |DE|^2 + |EC|^2$
$|DC|^2 = 5^2 + 12^2$
$|DC|^2 = 169$
$|DC| = 13$ cm olur.

$m(\widehat{DCE}) = \alpha$ olmak üzere $\sin\alpha = \frac{|DE|}{|DC|} = \frac{5}{13}$ olacağından

$A(\widehat{ACB}) = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BC| \cdot \sin(\widehat{ACB}) = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{12}{\cancel{24}} \cdot 26 \cdot \sin\alpha = 12 \cdot \overset{2}{\cancel{26}} \cdot \frac{5}{\cancel{13}} = 120$ cm^2 elde edilir.

Bu durumda $A(ABED) = A(\widehat{ABC}) - A(\widehat{DEC})$

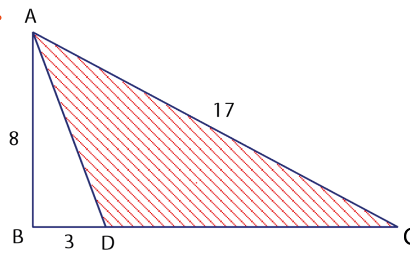
$= 120 - \frac{5 \cdot 12}{2}$

$= 120 - 30$

$= 90$ cm^2 olarak bulunur.

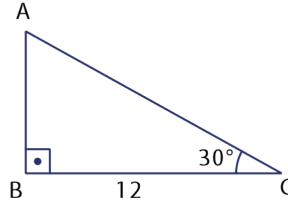


ALIŞTIRMALAR

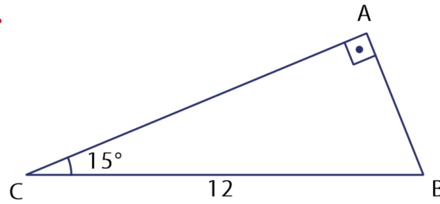
1. 

Yandaki $\widehat{ABC}$ nde $[AB] \perp [BC]$ dır.

$|AB| = 8$ birim, $|BD| = 3$ birim ve $|AC| = 17$ birim olduğuna göre $A(\widehat{ADC})$ nın kaç birimkare olduğunu bulunuz.

2. 

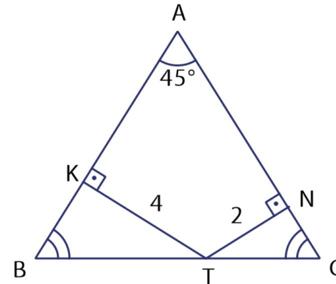
Yandaki $\widehat{ABC}$ nde $[AB] \perp [BC]$ ve $m(\widehat{ACB}) = 30^\circ$ dir. $|BC| = 12$ birim olduğuna göre $A(\widehat{ABC})$ nın kaç birimkare olduğunu bulunuz.

3. 

Yandaki $\widehat{ABC}$ nde $[AB] \perp [AC]$ ve $m(\widehat{ACB}) = 15^\circ$ dir. $|BC| = 12$ birim olduğuna göre $A(\widehat{ABC})$ nın kaç birimkare olduğunu bulunuz.

4. Herhangi bir kenarına ait yüksekliği $4\sqrt{3}$ birim olan eşkenar üçgenin alanını bulunuz.

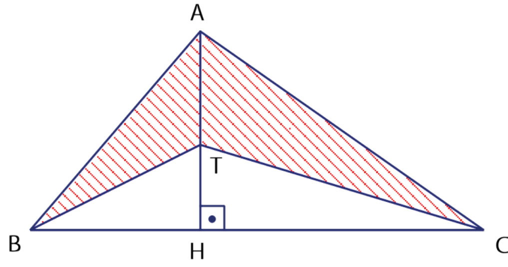
,

5. 

Yandaki $\widehat{ABC}$ de $|AB| = |AC|$, $[KT] \perp [AB]$, $[TN] \perp [AC]$ ve $m(\widehat{BAC}) = 45^\circ$ dir. $|KT| = 4$ birim ve $|TN| = 2$ birim olduğuna göre $A(\widehat{ABC})$ nın kaç birimkare olduğunu bulunuz.



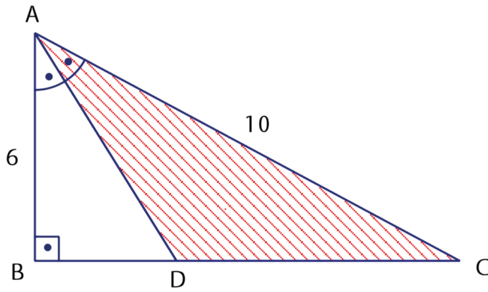
6.



Yandaki $\widehat{ABC}$ nde

[AH] ⊥ [BC] ve A, T, H ile B, H, C noktaları doğrusaldır.
|AT| = 5 birim ve |BC| = 12 birim ise
A(ABTC) nın kaç birimkare olduğunu bulunuz.

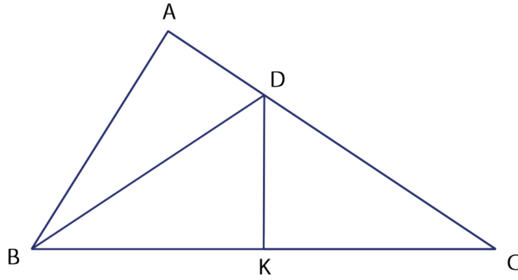
7.



Yandaki $\widehat{ABC}$ nde

[AB] ⊥ [BC] ve [AD], $\widehat{A}$ nın açıortayıdır.
|AB| = 6 birim ve
|AC| = 10 birim ise $A(\widehat{ADC})$ nın kaç birimkare olduğunu bulunuz.

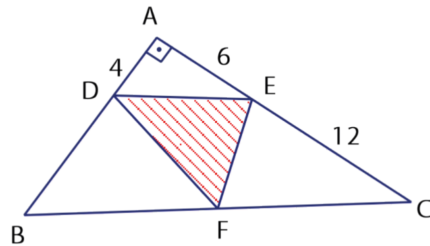
8.



Yandaki $\widehat{ABC}$ nde

|DC| = 2 · |AD| ve |BK| = |KC| dur.
$A(\widehat{ABC})$ =24 birimkare ise
$A(\widehat{BKD})$ nın kaç birimkare olduğunu bulunuz.

9.

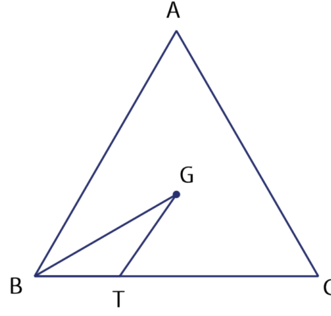


Yandaki $\widehat{ABC}$ nde

[DE] // [BC] ve [AB] ⊥ [AC] dır.
|AD| = 4 birim, |AE| = 6 birim
ve |EC| = 12 birim ise $A(\widehat{DEF})$ nın kaç birimkare olduğunu bulunuz.



10.



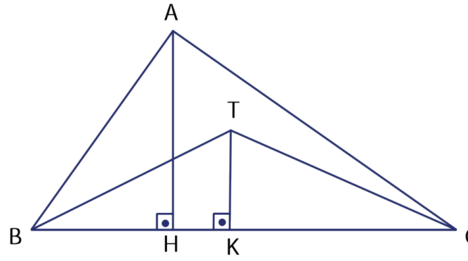
Yandaki şekilde

G noktası $\widehat{ABC}$ nin ağırlık merkezi ve $|TC| = 3 \cdot |BT|$ dir.

$A(\widehat{BGT}) = 2\ cm^2$ ise

$A(\widehat{ABC})$ nın kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

11.



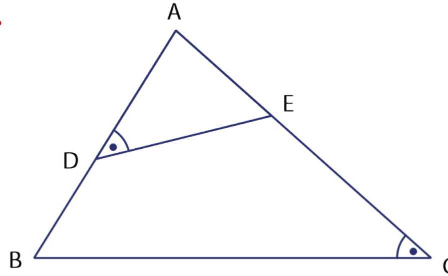
Yandaki $\widehat{ABC}$ nde

$[AH] \perp [BC]$ ve $[TK] \perp [BC]$ dır.

$3 \cdot |TK| = |AH|$ ve $A(\widehat{BTC}) = 5$ birimkare ise

A(ABTC) nın kaç birimkare olduğunu bulunuz.

12.



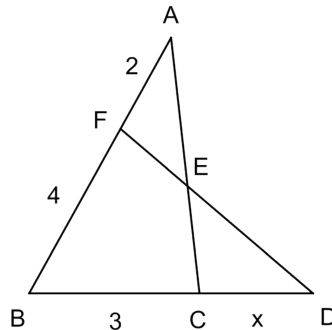
Yandaki $\widehat{ABC}$ nde

$m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{ACB})$, $\frac{|AE|}{|AB|} = \frac{1}{3}$

ve $A(\widehat{ADE}) = 6$ birimkare ise

A(BCED) nın kaç birimkare olduğunu bulunuz.

13.



Yandaki şekilde

ABC ve FBD birer üçgendir.

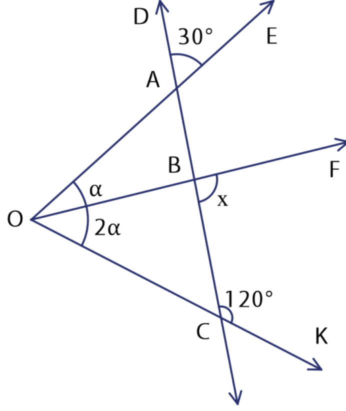
$|AF| = 2$ cm, $|FB| = 4$ cm, $|BC| = 3$ cm dir. $A(\widehat{ABC}) = A(\widehat{FBD})$ olduğuna göre $|CD| = x$ değerinin kaç cm olduğunu bulunuz

9.4. ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

1. Farkları 20° olan komşu tümler iki açıdan küçük olan açının komşu bütünler açısının ölçüsü kaç derecedir?

A) 35 B) 55 C) 125 D) 135 E) 145

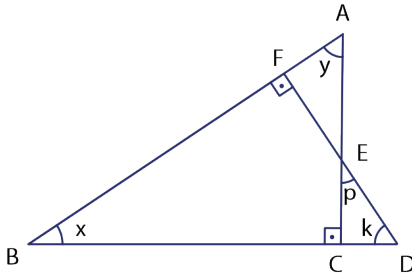
2.



Şekilde $m(\widehat{DAE}) = 30^\circ$, $m(\widehat{KCB}) = 120^\circ$, $m(\widehat{FOK}) = 2 \cdot m(\widehat{EOF}) = 2\alpha$ ise $m(\widehat{FBC}) = x$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 80° B) 90° C) 100° D) 120° E) 140°

3.



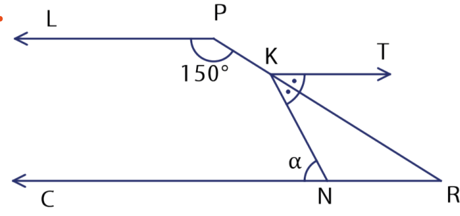
Şekilde $m(\widehat{FAE}) = y$, $m(\widehat{DEC}) = p$, $m(\widehat{EDC}) = k$, $m(\widehat{ABC}) = x$, $[DF] \perp [AB]$ ve $|AC| \perp |BD|$ dır. Buna göre aşağıda verilen

I. $x = y$,
II. $x + y + k + p = 180^\circ$
III. $y \neq k$
IV. $x = p$

ifadelerinden hangileri doğrudur?

A) I-II B) I-III C) II-IV
D) III-IV E) II-III-IV

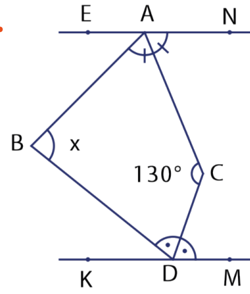
4.



$[PL] \parallel [KT] \parallel [CR]$ olmak üzere $m(\widehat{LPR}) = 150^\circ$ ve $m(\widehat{NKR}) = m(\widehat{TKR})$ ise $m(\widehat{KNC}) = \alpha$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 40° B) 60° C) 80° D) 90° E) 100°

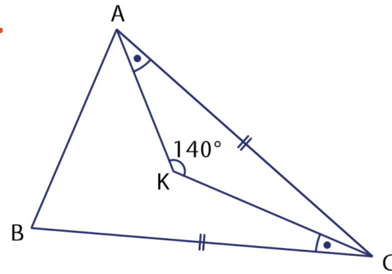
5.



$[EN] \parallel [KM]$ olmak üzere $[AC]$, $\widehat{BAN}$ nın açıortayı, $[DC]$, $\widehat{BDM}$ nın açıortayı ve $m(\widehat{ACD}) = 130^\circ$ ise $m(\widehat{ABD}) = x$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 100° B) 110° C) 120° D) 130° E) 140°

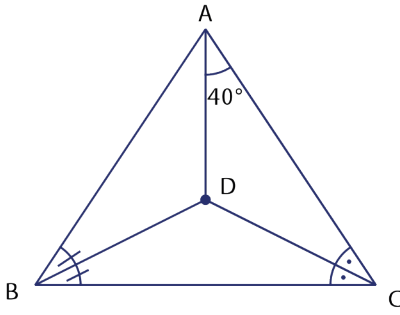
6.



$\widehat{ABC}$ için $|AC| = |BC|$, $m(\widehat{KAC}) = m(\widehat{KCB})$ ve $m(\widehat{AKC}) = 140^\circ$ ise $m(\widehat{ABC})$ kaç derecedir?

A) 55 B) 60 C) 70 D) 75 E) 80

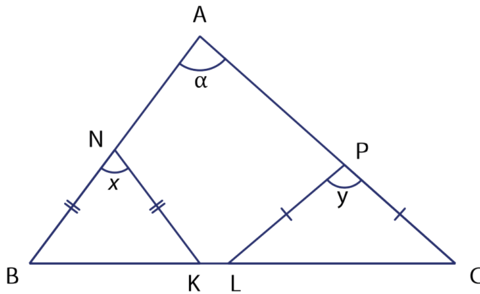
7.



ABC üçgeninde [DB], B açısının açıortayı; [DC], C açısının açıortayıdır. $m(\widehat{DAC}) = 40^\circ$ ise $m(\widehat{BDC})$ kaç derecedir?

A) 95 B) 100 C) 110 D) 120 E) 130

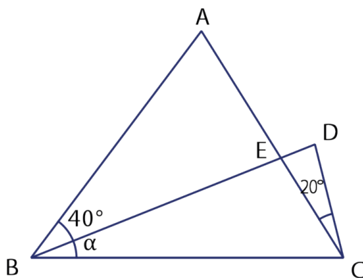
8.



Şekildeki $\widehat{ABC}$ için |BN| = |NK|, |PL| = |PC|; $m(\widehat{BNK}) = x$, $m(\widehat{LPC}) = y$ ve $x + y = 110^\circ$ ise $m(\widehat{BAC}) = \alpha$ kaç derecedir?

A) 45 B) 50 C) 55 D) 60 E) 75

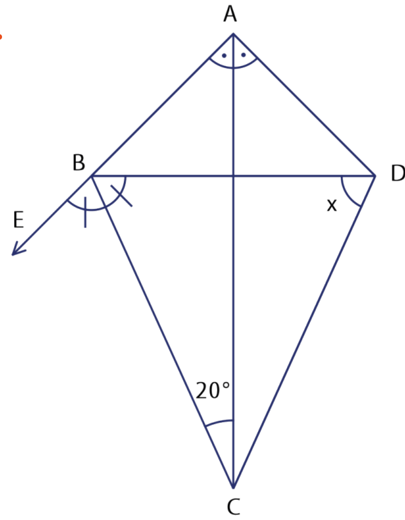
9.



Şekilde |AC| = |BD|=|BC|, $m(\widehat{ABD}) = 40^\circ$, $m(\widehat{DCA}) = 20^\circ$ ise $m(\widehat{DBC}) = \alpha$ kaç derecedir?

A) 20 B) 30 C) 40 D) 50 E) 60

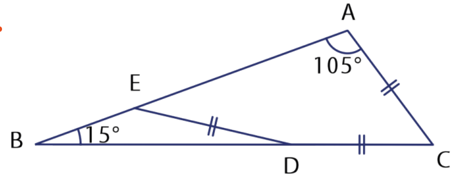
10.



Şekilde $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{CAD})$, $m(\widehat{EBC}) = m(\widehat{CBD})$ ve $m(\widehat{ACB}) = 20^\circ$ ise $m(\widehat{ABC})$ kaç derecedir?

A) 60 B) 70 C) 75 D) 80 E) 85

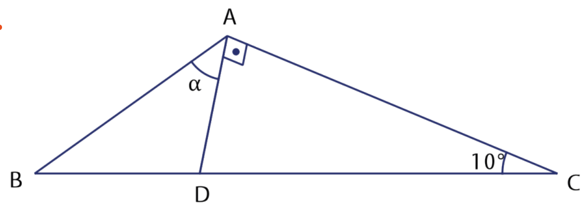
11.



$\widehat{ABC}$ için $m(\widehat{BAC}) = 105^\circ$, $m(\widehat{ABC}) = 15^\circ$ ve |ED| = |DC| = |AC| olmak üzere $m(\widehat{EDC}) = \alpha$ kaç derecedir?

A) 160 B) 150 C) 140 D) 130 E) 120

12.

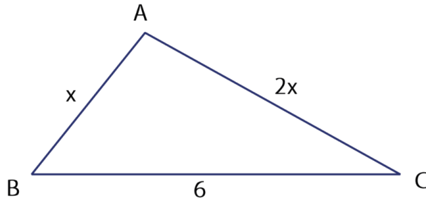


$\widehat{ABC}$ için $[DA] \perp [AC]$, $|DC| = 2 \cdot |AB|$ ve $m(\widehat{BCA}) = 10^\circ$ ise $m(\widehat{BAD}) = \alpha$ kaç derecedir?

A) 20 B) 40 C) 50 D) 60 E) 80



13.



$\widehat{ABC}$ nin kenarları birbirinden farklı tam sayılar olmak üzere çevresinin alabileceği **en küçük** tam sayı değeri kaçtır?

A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 19

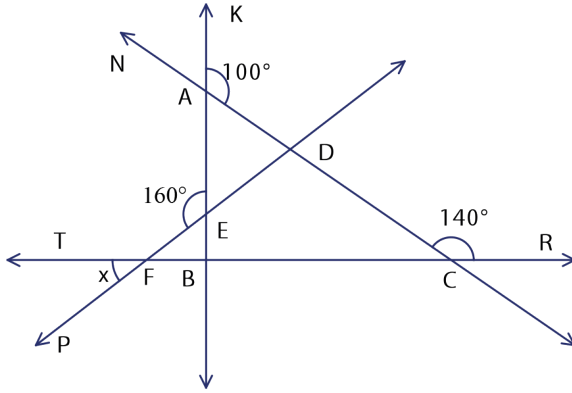
14. Bir $\widehat{ABC}$ için aşağıdaki bilgiler veriliyor.

- $m(\widehat{A}) = 20^\circ$ ve $|AB| = |AC|$ dur.
- $[AC]$ üzerinde $|AT| = |BT|$ olacak şekilde T noktası işaretlenip $[BT]$ çiziliyor.
- $\widehat{C}$ nın açıortayı ile $[BT]$, K noktasında kesişiyor.

Buna göre $m(\widehat{BKC})$ kaç derecedir?

A) 60 B) 70 C) 80 D) 90 E) 100

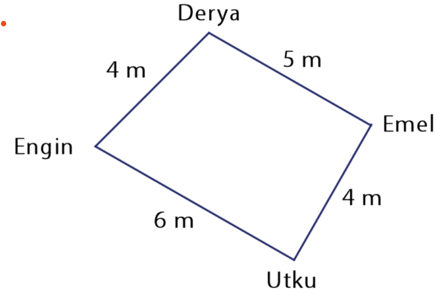
15.



Şekilde $m(\widehat{KAD}) = 100^\circ$, $m(\widehat{RCD}) = 140^\circ$ ve $m(\widehat{AEF}) = 160^\circ$ ise $m(\widehat{TFP}) = x$ kaç derecedir?

A) 70 B) 65 C) 60 D) 50 E) 40

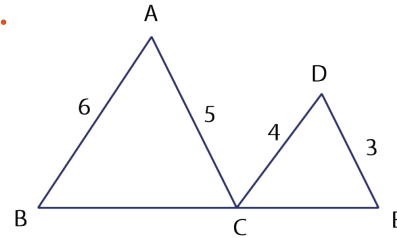
16.



Beden eğitimi dersinde Utku, Derya, Emel ve Engin voleybol oynayacaklardır. Oyuncuların dizilişleri ve aralarındaki mesafeler yukarıdaki gibidir. Üçgen eşitsizliği kuralına uyulursa Engin ile Emel arasındaki mesafe tam sayı olarak **en fazla** kaç metredir?

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

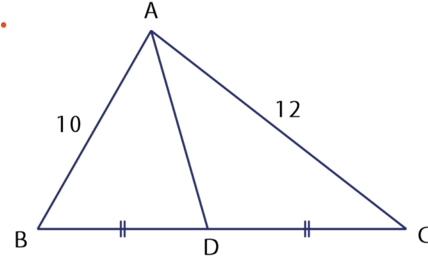
17.



B, C, E noktaları doğrusal olmak üzere |AB| = 6 birim, |AC| = 5 birim, |DC| = 4 birim ve |DE| = 3 birim olmak üzere |BE| nun **en büyük** tam sayı değeri kaç birimdir?

A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

18.

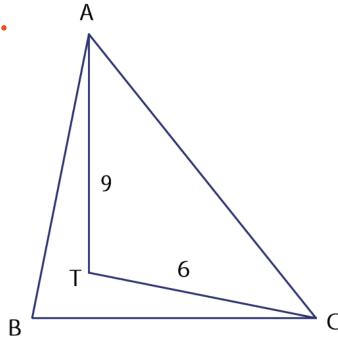


$\widehat{ABC}$ için [AD] kenarortay, $m(\widehat{BAC}) < 90^\circ$, |AB| = 10 birim ve |AC| = 12 birim olduğuna göre |AD| nun **en küçük** tam sayı değeri kaç birimdir?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9



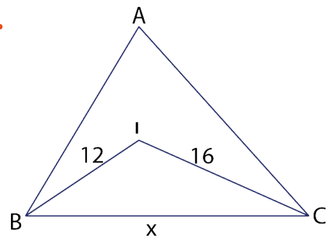
19.



Şekilde B noktası ATC üçgeninin diklik merkezidir. |TC| = 6 birim ve |AT| = 9 birim ise |AC| nun **en küçük** tam sayı değeri kaç birimdir?

A) 11 B) 10 C) 9 D) 8 E) 7

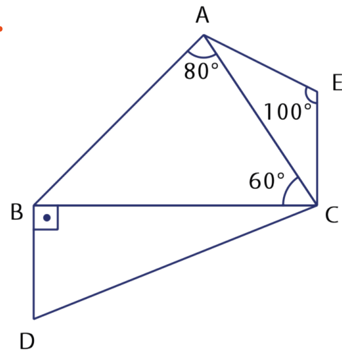
20.



I noktası iç açıortaylarının kesiştiği noktadır.
|BI| = 12 birim, |IC| = 16 birim ise
|BC| = x in alacağı **en küçük** tam sayı değeri kaçtır?

A) 19 B) 20 C) 21 D) 23 E) 27

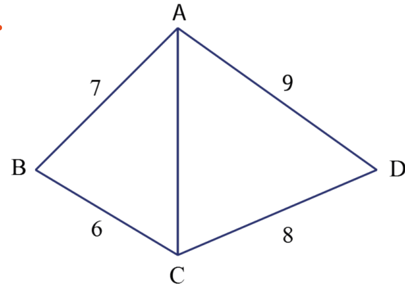
21.



Şekilde $[DB] \perp [BC]$, $m(\widehat{BAC}) = 80°$, $m(\widehat{AEC}) = 100°$, $m(\widehat{ACB}) = 60°$, $m(\widehat{DBC}) = 90°$ ise **en uzun** kenar aşağıdakilerden hangisidir?

A) [AC] B) [AB] C) [DC] D) [BC] E) [AE]

22.



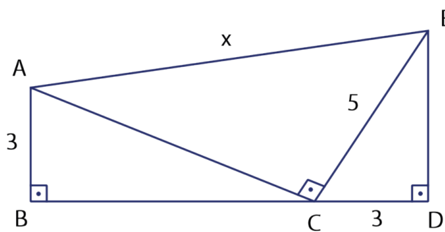
$\widehat{ABC}$ ile $\widehat{ADC}$ nin ortak kenarı [AC] dır.
$\widehat{ABC}$ için $m(\widehat{ABC}) > 90°$,
$\widehat{ADC}$ için $m(\widehat{ADC}) < 90°$ dir.
|AB| = 7 birim, |BC| = 6 birim, |AD| = 9 birim ve |DC| = 8 birim olarak veriliyor. Buna göre |AC| nun alabileceği tam sayı değerleri toplamı kaç birimdir?

A) 23 B) 33 C) 35 D) 43 E) 46

23. ABC çeşitkenar üçgeninde a > c > b ise aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $h_a = n_B = V_c$
B) $h_c < V_c < n_C$
C) $V_b < V_c < V_a$
D) $n_B < n_C < n_A$
E) $h_a < h_c < h_b$

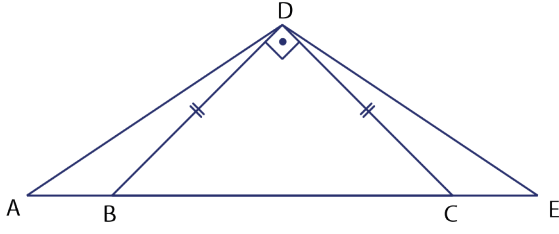
24.



Şekilde $[AB] \perp [BD]$, $[ED] \perp [BD]$, $[AC] \perp [CE]$ dır. $|AB| = |CD| = 3$ birim ve |CE| = 5 birim ise |AE| kaç birimdir?

A) $4\sqrt{2}$ B) $3\sqrt{5}$ C) 5 D) $5\sqrt{2}$ E) $10\sqrt{5}$

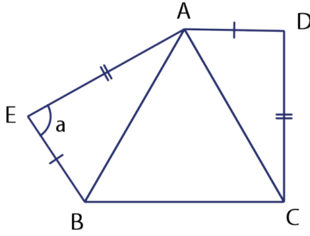
25.



Şekilde $m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{CED})$, $[BD] \perp [DC]$ ve $|DB| = |DC|$ ise $m(\widehat{ADE})$ kaç derecedir?

A) 165 B) 145 C) 135 D) 125 E) 120

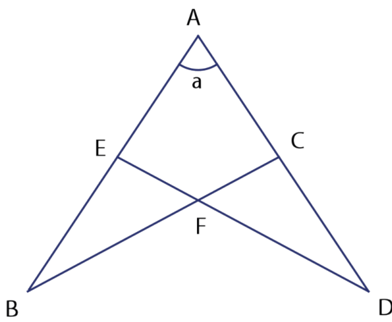
26.



ABC eşkenar üçgen olmak üzere $m(\widehat{EAD}) = 135^\circ$ $|EA| = |CD|$ ve $|BE| = |AD|$ ise $m(\widehat{AEB}) = a$ kaç derecedir?

A) 95 B) 105 C) 115 D) 120 E) 125

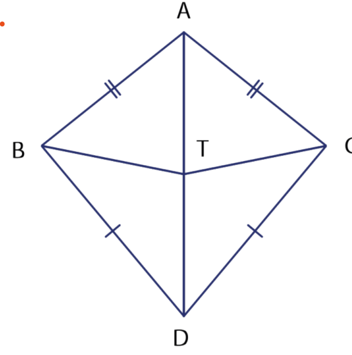
27.



Şekilde $|AC| = |AE|$, $|BE| = |CD|$ dur.
$m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{ADE}) = 70^\circ$ ve
$m(\widehat{AED}) + m(\widehat{ACB}) = 150^\circ$ ise $m(\widehat{BAC}) = a$ kaç derecedir?

A) 40 B) 50 C) 60 D) 70 E) 80

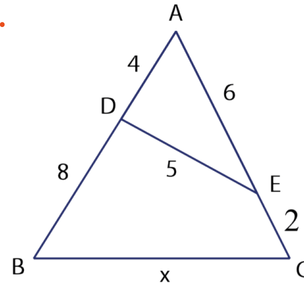
28.



$|AT| = |TD|$, $|AB| = |AC|$, $|BD| = |DC|$, $|BT| = 3x - 2$, $|TC| = x + 4$ ise $|TC|$ nun değeri kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

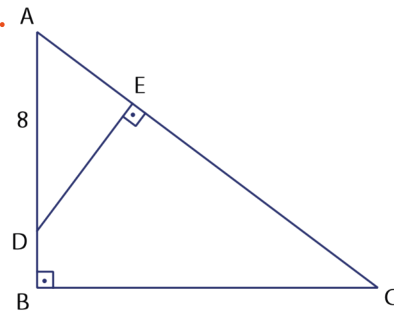
29.



$\widehat{ABC}$ için $|AB| = 3 \cdot |AD| = 12$ birim, $|AE| = 3 \cdot |EC| = 6$ birim ve $|DE| = 5$ birim olduğuna göre $|BC| = x$ değeri kaç birimdir?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 10 E) 12

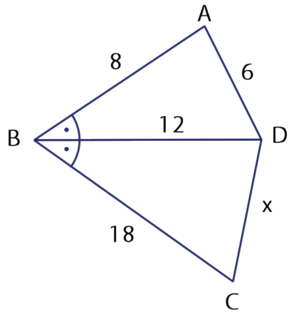
30.



$\widehat{ABC}$ için $[AB] \perp [BC]$ ve $[DE] \perp [AC]$ tir.
$3 \cdot |DE| = 2 \cdot |BC|$ ve $|AD| = 8$ birim olduğuna göre $|AC|$ kaç birimdir?

A) 9 B) 12 C) 15 D) 18 E) 24

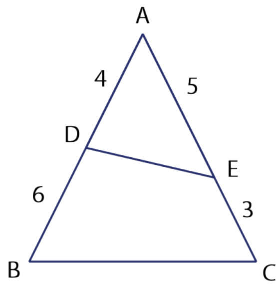
31.



Şekilde $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{DBC})$ dür. $|AB|=8$ birim, $|BD| = 12$ birim, $|AD| = 6$ birim ve $|BC| = 18$ birim ise $|DC| = x$ kaç birimdir?

A) 24 B) 18 C) 15 D) 12 E) 9

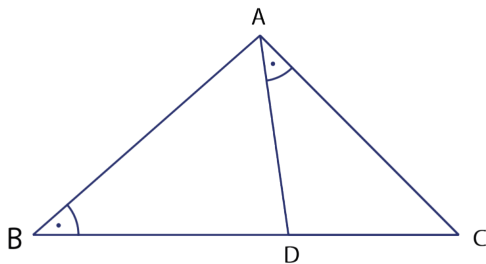
32.



$\widehat{ABC}$ için $|AD| = 4$ birim, $|AE| = 5$ birim, $|DB| = 6$ birim, $|EC| = 3$ birim ve A noktasının [DE] na uzaklığı 3 birim ise [BC] na uzaklığı kaç birimdir?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 12

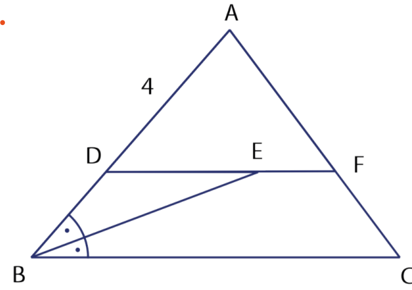
33.



$\widehat{ABC}$ için $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{ABC})$ dür.
$\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{4}{5}$ ve $|AC| = 8$ birim ise $|BC| = x$ kaç birimdir?

A) 16 B) 15 C) 14 D) 12 E) 10

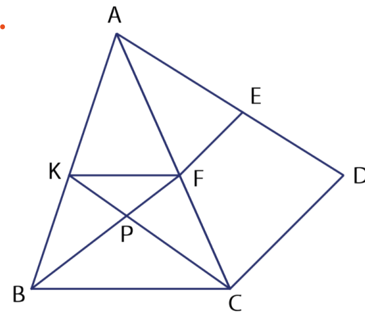
34.



$\widehat{ABC}$ için $[DF] \parallel [BC]$, $m(\widehat{DBE}) = m(\widehat{EBC})$,
$|BC| = 3 \cdot |DE| = 6 \cdot |EF|$ ve $|AD| = 4$ birim olduğuna göre $|BC|$ kaç birimdir?

A) 6 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12

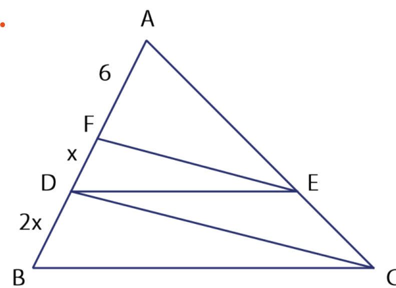
35.



$\widehat{ABC}$ için $[KF] \parallel [BC]$, $\widehat{ACD}$ için $[EF] \parallel [DC]$ olarak verilmiştir.
$\frac{|KP|}{|KC|} = \frac{2}{5}$ ve $|EF| = 4$ birim ise $|DC|$ kaç birimdir?

A) 15 B) 12 C) 9 D) 8 E) 6

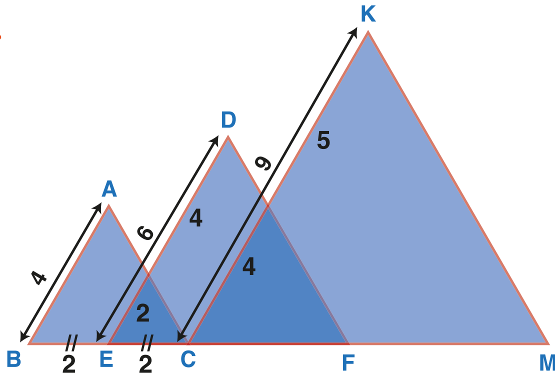
36.



$\widehat{ABC}$ için $[DE] \parallel [BC]$ ve $[FE] \parallel [DC]$ dir.
$|AF| = 6$ birim, $|BD| = 2 \cdot |DF| = 2x$ birim ise $|BF|$ kaç birimdir?

A) 24 B) 20 C) 18 D) 12 E) 6

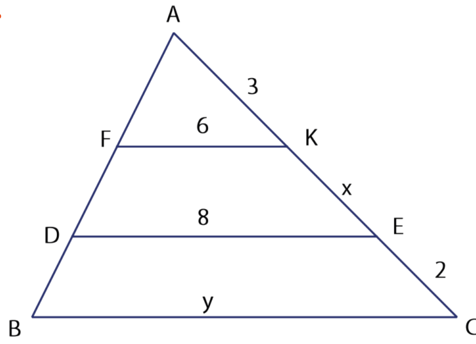
37.



Bir firma şirket logosu olarak şekildeki üçgenleri kullanıyor.
$[AB] \parallel [DE] \parallel [KC]$ ve $[AC] \parallel [DF] \parallel [KM]$ dir.
$|AB| = 4$ cm, $|DE| = 6$ cm, $|KC| = 9$ cm ve
$|BE| = |EC| = 2$ cm ise $|FM|$ kaç santimetredir?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 17 E) 8

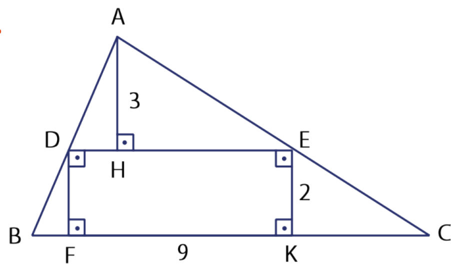
38.



$\widehat{ABC}$ için $[FK] \parallel [DE] \parallel [BC]$ dir.
$|FK| = 6$ birim, $|DE| = 8$ birim, $|AK| = 3$ birim ve
$|EC| = 2$ birimdir.b $|KE| = x$ birim ve $|BC| = y$ birim ise
$x + y$ değeri kaç birimdir?

A) 9 B) 11 C) 12 D) 13 E) 15

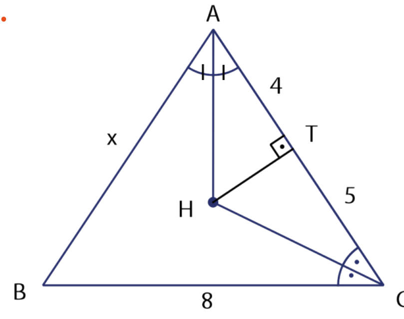
39.



$\widehat{ABC}$ için $D \in [AB]$, $E \in [AC]$ ve $[FK]$ ile $[BC]$ çakışıktır. $|AH| = 3$ birim, $|EK| = 2$ birim ve $|FK| = 9$ birim ise $|BC|$ kaç birimdir?

A) 15 B) 14 C) 13 D) 12 E) 10

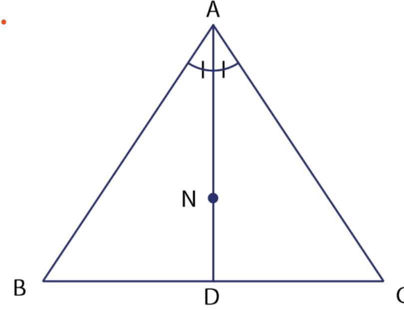
40.



$\widehat{ABC}$ için $[AH]$, $\widehat{BAC}$ nın açıortayı ve $[HC]$, $\widehat{ACB}$ nın açıortayıdır. $[AC] \perp [HT]$ olmak üzere
$|AT| = 4$ birim, $|TC| = 5$ birim ve $|BC| = 8$ birim ise
$|AB| = x$ değeri kaç birimdir?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

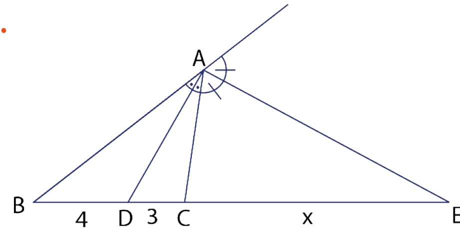
41.



N noktası, $\widehat{ABC}$ nin açıortaylarının kesiştiği noktadır. $\frac{|AN|}{|ND|} = 3$ ve $|BC| = 6$ birim ise Ç($\widehat{ABC}$) kaç birimdir?

A) 12 B) 16 C) 18 D) 20 E) 24

42.



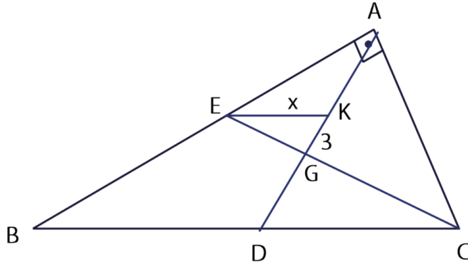
$\widehat{ABC}$ için $[AD]$, $\widehat{A}$ açısının iç açıortayı;
$[AE]$, $\widehat{A}$ açısının dış açıortayıdır.
$|BD| = 4$ birim, $|DC| = 3$ birim ise $|CE| = x$ değeri kaç birimdir?

A) 21 B) 20 C) 18 D) 15 E) 12

43. $m(\widehat{A}) = 90^\circ$, $|BC| = 10$ birim ve $|AC| = 8$ birim olacak şekilde ABC üçgeni çiziliyor. $\widehat{B}$ nin açıortayı [AC] nı T noktasında kesiyor. $\widehat{C}$ nin açıortayı [AB] nı N noktasında kesiyor. Verilenlere göre |TN| nun değeri kaç birimdir?

A) 5 B) $\sqrt{12}$ C) 4 D) $\sqrt{13}$ E) $\frac{\sqrt{145}}{3}$

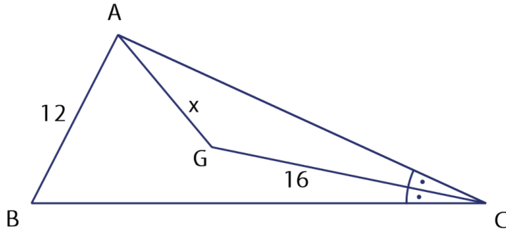
44.



$\widehat{ABC}$ için $[AB] \perp [AC]$ tir. G noktası ağırlık merkezi ve $[EK] \parallel [BC]$ olmak üzere $|KG| = 3$ birim ise $|EK| = x$ değeri kaç birimdir?

A) 6 B) 9 C) 12 D) 16 E) 18

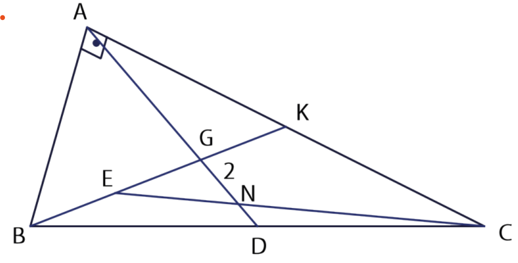
45.



$\widehat{ABC}$ için G noktası, ağırlık merkezi ve [GC], $\widehat{C}$ nın açıortayıdır. $|GC| = 16$ birim ve $|AB| = 12$ birim olduğuna göre $|AG| = x$ kaç birimdir?

A) 20 B) 18 C) 16 D) 12 E) 10

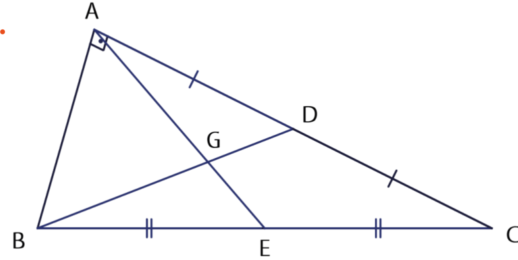
46.



$m(\widehat{A}) = 90^\circ$ olan $\widehat{ABC}$ için G noktası, ağırlık merkezidir. $|BE| = |EG|$ ve $|GN| = 2$ birim olmak üzere |BC| kaç birimdir?

A) 18 B) 16 C) 15 D) 12 E) 9

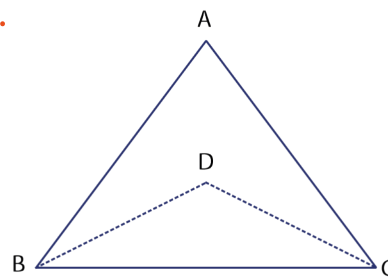
47.



$\widehat{ABC}$ için $|AD| = |DC|$ ve $|BE| = |EC|$ dur. $|GD| + |GE| = 7$ birim ise $|AG| + |BG|$ kaç birimdir?

A) 7 B) 12 C) 14 D) 15 E) 16

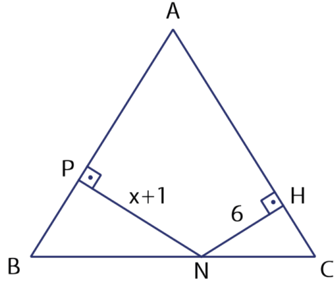
48.



D noktası $\widehat{ABC}$ nin kenar orta dikmelerinin kesim noktasıdır. $|BD| = (3x - 2)$ birim ve $|DC| = (2x + 3)$ birim ise $|DC|$ kaç birimdir?

A) 10 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

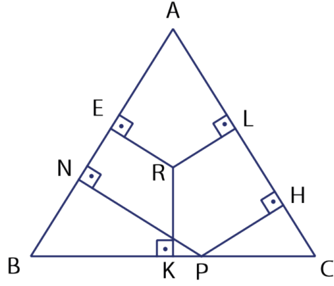
49.



$\widehat{ABC}$ için |AB| = |AC|, [NH] ⊥ [AC], [PN] ⊥ [AB], |NH| = 6 birimdir. B noktasının [AC] na uzaklığı (3x−15) birim ise |PN| kaç birimdir?

A) 6 B) 9 C) 11 D)12 E) 14

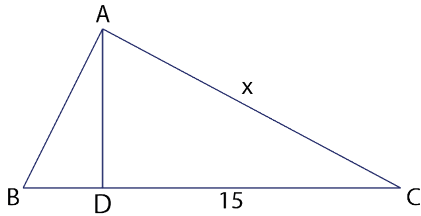
50.



$\widehat{ABC}$ eşkenar üçgendir. |PH| + |PN| = 12 birim ve |RK| + |RE| = 7 birim ise |RL| kaç birimdir?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

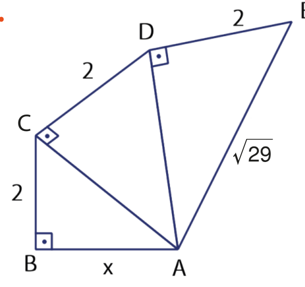
51.



$\widehat{ABC}$ için |AD| = 2 · |BD|, [AD] ⊥ [BC], |AB| = $4\sqrt{5}$ birim ve |DC| = 15 birim olduğuna göre |AC| = x değeri kaç birimdir?

A) 17 B) 18 C) 20 D) 24 E) 25

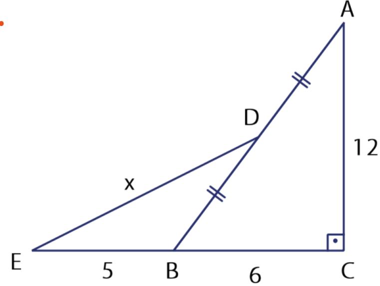
52.



Şekilde [AB] ⊥ [BC], [AC] ⊥ [CD], [AD] ⊥ [DE] tir. |BC| = |CD| =|DE| = 2 birim ve |AE| = $\sqrt{29}$ birim olduğuna göre |AB| = x değeri kaç birimdir?

A) $\sqrt{13}$ B) $\sqrt{14}$ C) $\sqrt{15}$ D) 4 E) $\sqrt{17}$

53.



Şekilde [AC] ⊥ [BC], |AD| = |DB| tir.
|AC| = 2 · |BC| = 12 birim ve |EB| = 5 birim ise |ED| =x değeri kaç birimdir?

A) 6 B) 8 C) 10 D) 15 E) 17

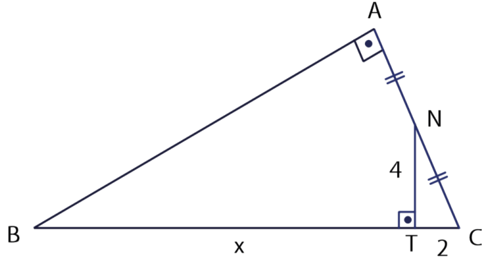
54. Aynı noktadan harekete başlayan Yiğit ile Pınar aşağıdaki komutları uyguluyorlar.

- Yiğit önce 80 m batıya, sonra 40 m güneye gidiyor.
- Pınar önce 40 m doğuya, sonra 50 m kuzeye gidiyor.

Son durumda Yiğit ile Pınar arasındaki mesafe **en az** kaç metredir?

A) 150 B) 140 C) 130 D)120 E)100

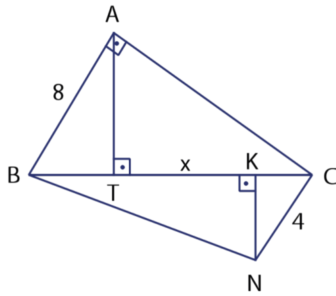
55.



$\widehat{ABC}$ için $[AB] \perp [AC]$ ve $|AN| = |NC|$ dur.
$|NT| = 2 \cdot |TC| = 4$ birim ise $|BT| = x$ değeri kaç birimdir?

A) 10 B) 12 C) 14 D) 16 E) 18

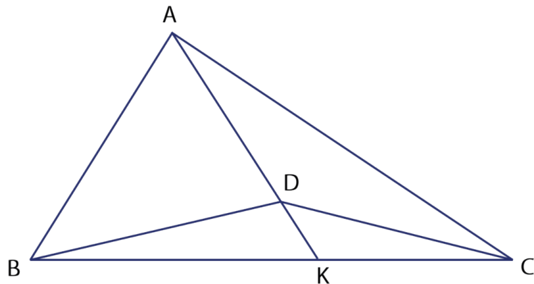
56.



Şekilde $[AB] \perp [AC]$, $[NC] \perp [BN]$, $[AT] \perp [BC]$ ve $[NK] \perp [BC]$ tir. $|AB| = 8$ birim, $|NC| = 4$ birim ve $|BC| = 16$ birim ise $|TK| = x$ değeri kaç birimdir?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

57.



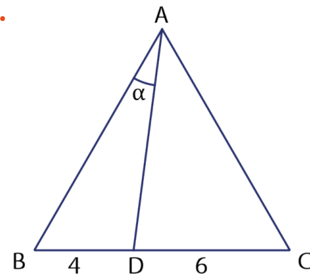
$\widehat{ABC}$ için $A(\widehat{ABC}) = 4 \cdot A(\widehat{BDC})$ tir. D noktasının [BC] na uzaklığı 4 birim ise A noktasının [BC] na uzaklığı kaç birimdir?

A) 8 B) 12 C) 16 D) 20 E) 24

58. $x + y = 90^\circ$, $\cos x = \frac{4}{5}$ olduğuna göre $\sin y + \cot y$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{31}{20}$ B) $\frac{32}{15}$ C) $\frac{15}{32}$ D) $\frac{8}{5}$ E) $\frac{5}{8}$

59.



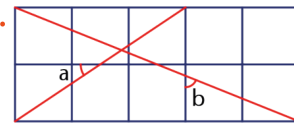
ABC eşkenar üçgeninde $|BD| = 4$ birim, $|DC| = 6$ birim ve $m(\widehat{BAD}) = \alpha$ olduğuna göre $\tan\alpha$ değeri kaçtır?

A) $\frac{\sqrt{3}}{5}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ D) $2\sqrt{3}$ E) $\sqrt{3}$

60. $\sin 30^\circ \cdot \tan 45^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cot 45^\circ$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ D) 2 E) $\frac{1}{4}$

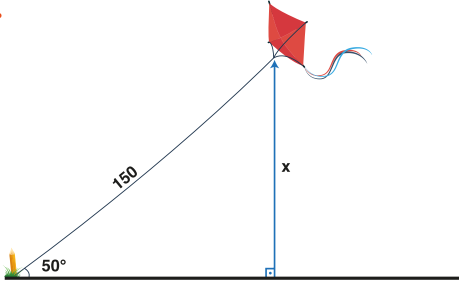
61.



10 tane birim kareden oluşan şekilde $\tan a \cdot \cot b$ değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{4}{15}$ C) $\frac{15}{16}$ D) $\frac{16}{15}$ E) $\frac{5}{3}$

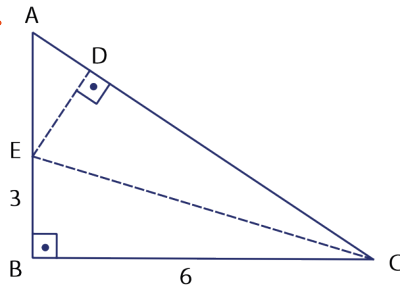
62.



Uçurtma uçuran Doğa, 150 m uzunluğundaki ipe bağlı uçurtmayı zeminde bir kazığa bağlıyor. İpin zeminle yaptığı açı 50° olduğuna göre uçurtmanın yerden yüksekliği yaklaşık kaç metredir ($\sin 50° \approx 0{,}7660$)?

A) 95 B) 105 C) 115 D) 125 E) 135

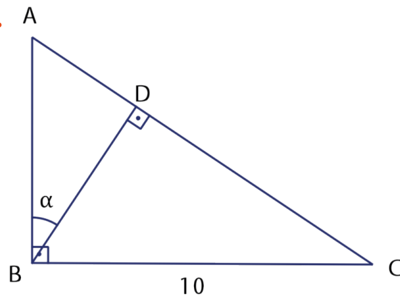
63.



$\widehat{ABC}$ için $[AB] \perp [BC]$ dır. [BC], EC ekseni boyunca katlandığında B noktası, [AC] üzerindeki D noktası ile çakışmaktadır. $|EB| = 3$ birim ve $|BC| = 6$ birim olduğuna göre $\sin(\widehat{BAC})$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{5}{3}$

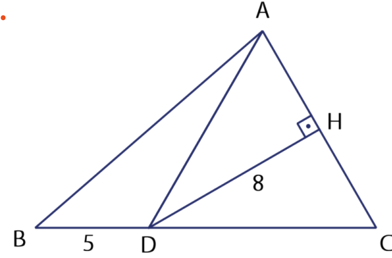
64.



$\widehat{ABC}$ için $[AB] \perp [BC]$ ve $[BD] \perp [AC]$ tir. $\tan\alpha = \frac{1}{2}$ ve $|BC| = 10$ birim ise $|AB|$ kaç birimdir?

A) 5 B) 7,5 C) 10 D) 15 E) 20

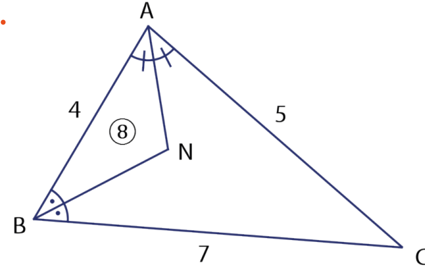
65.



$\widehat{ABC}$ için $|AC| = |DC|$ ve $[DH] \perp [AC]$ dır. $|DH| = 8$ birim ve $|BD| = 5$ birim ise $A(\widehat{ADB})$ kaç birim karedir?

A) 5 B) 10 C) 15 D) 20 E) 40

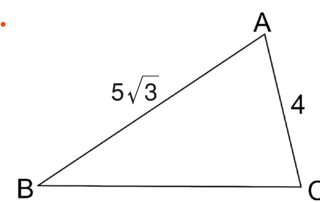
66.



N noktası $\widehat{ABC}$ nin açıortaylarının kesiştiği noktadır. $|AB| = 4$ birim, $|AC| = 5$ birim, $|BC| = 7$ birim ve $A(\widehat{ABN}) = 8$ birimkare olduğuna göre A(ANBC) kaç birimkaredir?

A) 24 B) 18 C) 16 D) 15 E) 12

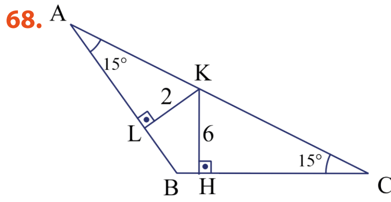
67.



Şekildeki ABC üçgeninde $m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 120°$, $|AB| = 5\sqrt{3}$ cm ve $|AC| = 4$ cm olduğuna göre ABC üçgeninin alanı kaç cm^2 dir?

A) 12 B) 15 C) 16 D) 18 E) 25

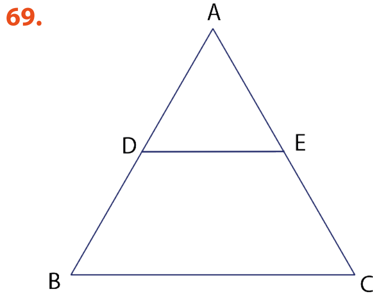
68.



$\widehat{ABC}$ için $|AB| = |BC|$ ve $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{ACB}) = 15°$ tir. $|KL| = 2$ birim ve $|KH| = 6$ birim olduğuna göre $A(\widehat{ABC})$ kaç birimkaredir?

A) 16 B) 24 C) 32 D) 48 E) 64

69.

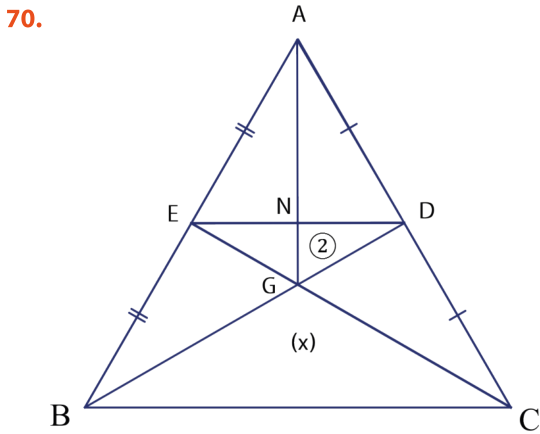


$\widehat{ABC}$ için $[DE] \parallel [BC]$ dır. $\frac{|DE|}{|BC|} = \frac{2}{3}$,

$A(BDEC) = 20\ cm^2$ ise $A(\widehat{ABC})$ kaç cm^2 dir?

A) 48 B) 36 C) 32 D) 30 E) 24

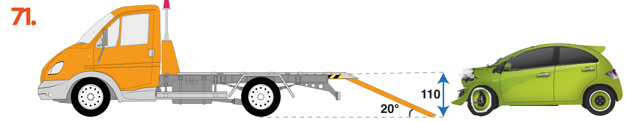
70.



$\widehat{ABC}$ için $|AE| = |EB|$ ve $|AD| = |DC|$ tir. $A(\widehat{GND}) = 2$ birimkare ise $A(\widehat{BGC}) = x$ kaç birimkaredir?

A) 6 B) 8 C) 12 D) 16 E) 18

71.



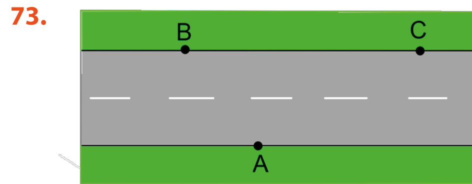
Hasarlı araçların tamirciye götürülmesi için çekici araçlara yüklenmesi gerekmektedir. Yükleme işlemi rampa kullanılarak gerçekleştirilmektedir.Çekicinin yerden yüksekliği 110 cm ve rampanın yer ile yaptığı açı 20° ise rampanın uzunluğu yaklaşık kaç cm dir? ($\sin 20° \approx 0,3420$)

A) 110 B) 118 C) 302 D) 320 E)322

72. Birim çember üzerinde verilen $A\left(k, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ noktası analitik düzlemin 2. bölgesindedir. Buna göre k değeri kaçtır?

A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 1

73.



Yukarıdaki şekilde verilen bir yolun kenarında bulunan A, B ve C noktaları ile ilgili aşağıdaki bilgiler veriliyor.

- Yolun genişliği 8 metredir.
- A noktasının B noktasına uzaklığı 10 metredir.
- A noktasının C noktasına uzaklığı 17 metredir.
- B ile C noktaları arasındaki uzaklık 9 metreden fazladır.

Buna göre

a) B ile C noktaları arasındaki uzaklığın kaç metre olduğunu bulunuz.

b) A noktasının IBCI nun orta noktasına olan uzaklığının kaç metre olduğunu bulunuz.

c) ABC üçgeninin alanının kaç metrekare olduğunu bulunuz.



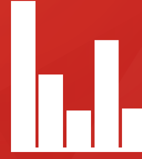
VERİ, SAYMA VE OLASILIK





27%







VERİ

9.5.1. Merkezî Eğilim ve Yayılım Ölçüleri
9.5.2. Verilerin Grafikle Gösterilmesi

9.5.VERİ



Terimler ve Kavramlar

- Veri
- Kesikli Veri
- Sürekli Veri
- Aritmetik Ortalama
- Ortanca (Medyan)
- Tepe Değer (Mod)
- Açıklık
- En Büyük Değer
- En Küçük Değer
- Standart Sapma



Sembol ve Gösterimler

$\overline{X}$, S



Son bir yıl içerisinde satışları azalan bir bilgisayar firması bir araştırma şirketine kendi hedef kitlesine uygun 1500 kişi üzerinde 10 soruluk bir anket çalışması yaptırıp bu durumun sebeplerini öğrenmek istiyor. Sizce anketi uygulayan araştırma şirketi bu 15 000 cevabı çıkarımlarda bulunmak amacıyla düzenlemek için nasıl bir yol izlemelidir?

9.5.1. Merkezî Eğilim ve Yayılım Ölçüleri

Neler Öğreneceksiniz?

- Verileri merkezî eğilim ve yayılım ölçülerini hesaplayarak yorumlamayı öğreneceksiniz.

Bir sonuç çıkarmak ya da çözüme ulaşabilmek için gözlem, deney, araştırma gibi yöntemlerle elde edilen her bilgiye **veri** adı verilir.

Kesikli Veri

Belirli bir aralıktaki her gerçek sayı değerini alamayan veri türüdür.

Okulun kantininden alışveriş yapan öğrencilerin günlere göre sayısı, nesli tükenmekte olan bir kuş türünün yıllara göre nüfus sayısı, bir gazetenin haftalık satış sayısı gibi veriler kesikli veri grubuna örnektir.

Sürekli Veri

Belirli bir aralıktaki her gerçek sayı değerini alabilen veri türüdür. Bir diğer ifadeyle aralıksız devam eden verilerdir.

Bir bitkinin yıllara göre boyunun uzaması, bir şehrin aylara göre sıcaklık değişimi, aylara göre elektrik veya su sarfiyatı değişimi sürekli veri gruplarına birer örnektir.

9.5.1.1. Verileri Merkezî Eğilim ve Yayılım Ölçülerini Hesaplayarak Yorumlama

Okulun 9-A sınıfındaki Fatih isimli öğrencinin matematik karne notunun 85 olması, bulunduğu sınıfın bu dersteki başarısı hakkında bilgi edinilmesi için yeterli değildir. Ama sınıfın matematik karne not ortalamasının 85 olması genel başarı hakkında fikir verir. Tek başına bulunduğu topluluk hakkında detaylı bilgi sunamayan veri, diğerleriyle birlikte değerlendirildiğinde anlam kazanır; ortak bir dil oluşturur. Bu dilin anlaşılabilmesi için merkezî eğilim ve yayılım ölçüleri bu dilin anlaşılabilmesinde yardımcı olur.

Merkezî eğilim ölçülerinin her biri verilerin hangi değer etrafında toplandığını gösterir. Merkezî yayılım ölçülerinin her biri ise verilerin birbirlerinden ne kadar uzak olduklarının ölçüsüdür.

Önceki yıllarda aritmetik ortalama, ortanca, tepe değer, en büyük ve en küçük değer, açıklık kavramları tanıtılmıştı.

ÖRNEK 1



Bir sınava giren 9 öğrencinin matematik netlerine ait veriler 12,10, 20, 15, 13, 12, 14, 12, 18 dir. Bu veri grubunun aritmetik ortalama, açıklık, ortanca ve tepe değerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

Aritmetik ortalama veri toplamının veri sayısına bölümü olduğundan

$$\overline{X} = \frac{12+10+20+15+13+12+14+12+18}{9} = \frac{126}{9} = 14 \text{ olur.}$$

Veri grubu küçükten büyüğe doğru sıralanırsa 10, 12, 12, 12, 13, 14, 15, 18, 20 şeklinde olur.

En büyük değer 20 ve en küçük değer 10 dur.

Açıklık ise en büyük değerden en küçük değer çıkarılarak bulunur. Bu durumda

Açıklık = 20 − 10 = 10 olur.

Ortanca ise veri grubunun eleman sayısı tek (9 tane) olduğundan ortadaki terim olan 13 tür.

Veri grubunda en çok tekrar eden sayı 12 olduğundan tepe değer 12 dir.

ÖRNEK 2

Kızılay'ın bir gezici şubesine 8 gün boyunca kan veren kişi sayısı 16, 12, 28, 20, 14, 18, 16, 20 dir. Bu veri grubunun merkezî eğilim ölçülerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Aritmetik ortalama;

$$\overline{X} = \frac{16+12+28+20+14+18+16+20}{8} = \frac{144}{8} = 18$$

bulunur. Bu ise bir günde ortalama 18 kişinin kan bağışı yaptığını gösterir.

Veriler küçükten büyüğe doğru sıralanırsa

12, 14, 16, 16, 18, 20, 20, 28 olur.

Ortanca (medyan) ise 12, 14, 16, 16, 18, 20, 20, 28 sıralamasında ortaya gelen 16 ve 18 sayılarının aritmetik ortalamasıdır.

O halde ortanca $\frac{16+18}{2} = 17$ bulunur (Ortancanın veri grubunda bulunma zorunluğu yoktur.).

Bu veri grubunda 16 ve 20 ikişer defa tekrar ettiğinden çoklu tepe (çoklu mod) değeri vardır. Bu durumda tepe değerler 16 ve 20 olur.

ÖRNEK 3

10, 71, 12, 99, 14, 53 sayılarının tepe değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Tekrar eden sayı olmadığından bu veri grubunun tepe değeri yoktur.



Merkezî Eğilim Ölçüleri

Aritmetik Ortalama

$x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ veri grubunun toplamının veri sayısına bölünmesi ile hesaplanır ve $\overline{X}$ biçiminde gösterilir. Bu durumda $\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n}$ ile bulunur.

Ortanca (Medyan)

Veri grubu küçükten büyüğe doğru sıralandığında gruptaki terim sayısı tek ise tam ortadaki sayıdır. Terim sayısı çift ise ortaya gelen iki sayının aritmetik ortalamasıdır.

Tepe Değer (Mod)

Gruptaki en çok tekrar eden veridir.

Aynı sayıda birden çok tekrar eden veri varsa birden fazla tepe değer vardır.

Eğer tekrar eden veri yoksa tepe değer yoktur.



Bazı Merkezî Yayılım Ölçüleri

En Büyük ve En Küçük Değer

Bir veri grubunda bulunan en küçük sayıya en küçük değer, en büyük sayıya en büyük değer denir.

Açıklık (Aralık)

Veri grubunda bulunan en büyük değer ile en küçük değer arasındaki farktır.



- Aritmetik ortalama veri grubunun genel durumu hakkında bir bilgi verir.
- Tepe değer ve ortanca, veri grubundaki uç değerlerden aritmetik ortalamaya göre daha az etkilenir.

ÖRNEK 4

Çalışan Sayısı	2	2	3	1	4
Satış Sayısı	5	3	4	2	6

Yukarıdaki tabloda bir otomobil firmasının satış ofisinde çalışanların otomobil satış sayıları verilmiştir. Bu satış sayılarına ait veri grubunun aritmetik ortalamasını, tepe değerini ve ortancasını bulunuz.

ÇÖZÜM

2 kişi 5 adet, 2 kişi 3 adet, 3 kişi 4 adet, 1 kişi 2 adet, 4 kişi 6 adet satış yapmıştır. Bu satış sayıları yan yana yazılırsa 5, 5, 3, 3, 4, 4, 4, 2, 6, 6, 6, 6 olur. Bu veriler küçükten büyüğe doğru sıralanırsa 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 6 şeklinde olur. Aritmetik ortalama

$$\overline{X} = \frac{2+3+3+4+4+4+5+5+6+6+6+6}{12} = \frac{54}{12} = 4{,}5 \text{ olur.}$$

Tepe değeri en çok tekrar eden 6 sayısıdır.

Ortanca ise ortadaki iki sayı olan 4 ile 5 in aritmetik ortalaması $\frac{4+5}{2} = 4{,}5$ olur.

Standart Sapma

Bir veri grubundaki sayıların birbirine yakınlığını ve uyumluluğunu ölçen bir yöntemdir. Verilerin aritmetik ortalamaya göre nasıl bir yayılım (dağılım) gösterdiğine yardımcı olur.

Bir veri grubunun standart sapmasını bulmak için

1. $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ veri grubunun aritmetik ortalaması olan $\overline{X}$ değeri bulunur.
2. Her bir verinin aritmetik ortalamadan farkının karesi alınır ve toplanır.
3. Bulunan toplam, veri sayısının bir eksiğine bölünür ve elde edilen sonucun karekökü alınır.

Standart sapma S ile gösterilir ve

$$S = \sqrt{\frac{(x_1-\overline{X})^2 + (x_2-\overline{X})^2 + (x_3-\overline{X})^2 + \ldots\ldots + (x_n-\overline{X})^2}{n-1}}$$

işlemi ile bulunur.

ÖRNEK 5

MERT	ASLI	ONUR	ZEYNEP	NİL
3	4	2	5	6



9-B sınıfında okuyan 5 öğrencinin bir okul dönemi boyunca okuduğu kitap sayıları yukarıdaki tabloda verilmiştir.

Bu veri grubunun standart sapmasını bulunuz.



ÇÖZÜM

Aritmetik ortalama $\overline{X} = \frac{3+4+2+5+6}{5} = 4$ olur.

Standart sapma ise

$$S = \sqrt{\frac{(3-4)^2+(4-4)^2+(2-4)^2+(5-4)^2+(6-4)^2}{5-1}}$$
$$= \sqrt{\frac{1+0+4+1+4}{4}}$$
$$= \sqrt{\frac{10}{4}}$$
$$\approx 1{,}5811$$

Bu durumda veri grubunun standart sapması yaklaşık olarak 1,5811 olur.

ÖRNEK 6

İdil	4	3	4	4	5
Kıvanç	5	4	3	3	5

Yukarıdaki tabloda İdil ve Kıvanç isimli iki öğrencinin bir yıl boyunca matematik dersinden aldığı yazılı notları verilmiştir. Bu öğrencilerden hangisinin yapılacak bir matematik bilgi yarışmasına gönderilmesinin daha uygun olacağına karar veriniz.

ÇÖZÜM

İdil'in notlarının aritmetik ortalaması, $\overline{X} = \frac{4+3+4+4+5}{5} = 4$ olur.

Kıvanç'ın notlarının aritmetik ortalaması, $\overline{X} = \frac{5+4+3+3+5}{5} = 4$ olur.

Her iki öğrencinin de notlarının aritmetik ortalaması 4 olduğundan aritmetik ortalama bu öğrenciler arasındaki farklılıkların yorumlanmasında yetersiz kalmaktadır. Aritmetik ortalama eşit olmasaydı notlarının aritmetik ortalaması büyük olan öğrenci seçilirdi. Fakat aritmetik ortalamalar eşit çıktığı için standart sapmaya bakılması gerekir.

Standart sapma azaldıkça verilerin dağılımı daha homojen olmakta bir diğer ifadeyle veriler arası farklılıklar azalmaktadır. Bunun için öğrencilerin notlarının standart sapmalarını hesaplanmalıdır.

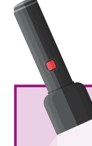
İdil'in notlarının standart sapması

$$S_1 = \sqrt{\frac{(4-4)^2+(3-4)^2+(4-4)^2+(4-4)^2+(5-4)^2}{5-1}}$$
$$S_1 = \sqrt{\frac{0+1+0+0+1}{4}}$$
$$S_1 = \sqrt{\frac{2}{4}}$$
$$S_1 \approx 0{,}707 \text{ olur.}$$

Kıvanç'ın notlarının standart sapması

$$S_2 = \sqrt{\frac{(5-4)^2+(4-4)^2+(3-4)^2+(3-4)^2+(5-4)^2}{5-1}}$$
$$S_2 = \sqrt{\frac{1+0+1+1+1}{4}}$$
$$S_2 = \sqrt{\frac{4}{4}}$$
$$S_2 = 1 \text{ olur.}$$

Notlarının standart sapması küçük olan İdil matematik dersinde daha istikrarlıdır. Bu durumda yarışmaya İdil'in gönderilmesi daha uygun olacaktır.



Türkiye'de ihtiyaç duyulan alanlarda veri ve bilgilerin derlenmesi, işlenmesi ve sonuçların yorumlanması ile ilgili kurum TÜİK (Türkiye İstatistik Kurumu) tir. Genel nüfus sayımı, genel tarım sayımı, enflasyon hesabı gibi işlemler TÜİK' in görevleri arasında yer alır.

TÜİK resmi internet sitesi "www.tuik.gov.tr" dir.



- Standart sapma sıfıra yaklaştıkça gruptaki verilerin farklılıkları azalır.
- Standart sapma veri grubundaki elemanların aritmetik ortalamaya yakınlığını ya da uzaklığını verir. Standart sapma küçüldükçe veri grubundaki değerler aritmetik ortalamaya yaklaşır.



ÖRNEK 7

Her terimi birbirine eşit olan bir veri grubunun standart sapması hakkında neler söylenebileceğini yorumlayınız.

ÇÖZÜM

Her bir terime x denirse aritmetik ortalama da x olur. Bu durumda her bir terimin aritmetik ortalamadan farkı 0 olacağından standart sapma 0 bulunur.

Standart sapmanın 0 olduğu bu grupta, ölçülen özellik bakımından verilerin eş özelliklere sahip olduğu söylenir.

ÖRNEK 8

Bir kantinci satışa sunacağı 5 farklı marka sütün seçimi için öğrencilere anket uygulayacaktır. Anket sonuçlarını değerlendirmek için aşağıdaki ölçülerden hangisini kullanması daha uygun olur?

A) Aritmetik ortalama B) Ortanca C) Tepe değer
D) Açıklık E) Standart sapma

ÇÖZÜM

Ankete katılan öğrencilerin en çok tercih ettiği süt markası en çok tekrar eden veri olup bu grubun tepe değerini oluşturduğundan cevap C şıkkıdır.

ÖRNEK 9

Elektronik ürünler satan bir mağazanın son dokuz gün içerisinde sattığı müzik çalar sayıları aşağıdaki gibidir.

23, 19, 23, 1, 20, 21, 23, 20, 21

Buna göre satılan müzik çalar sayısını temsil eden merkezî eğilim ölçüsünü bulunuz.

ÇÖZÜM

Aritmetik ortalama;

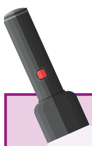
$$\overline{X} = \frac{23+19+23+1+20+21+23+20+21}{9} = \frac{171}{9} = 19 \text{ olur.}$$

Verilerin aritmetik ortalamaya uzaklıkları toplamı 36 olur.

Veri grubunun tepe değeri 23 olup verilerin tepe değerine uzaklıkları toplamı 36 olur.

Veri grubunun ortancası 21 olup verilerin ortancaya uzaklıkları toplamı 30 olur.

Bu durumda ortalamaya uzaklıkları toplamı en küçük olan ortanca değeri veri grubunu daha iyi temsil eder.



Cumhuriyet tarihimizin ilk büyük veri toplama işlemlerinden biri olan 1927 genel nüfus sayımında toplam nüfusumuzun 13 648 270 olduğunu biliyor muydunuz?



ALIŞTIRMALAR

1. 21 tane ardışık pozitif tam sayılardan oluşan bir veri grubunun aritmetik ortalamasının baştan ve sondan kaçıncı sayı olduğunu bulunuz.

2. Yaş ortalaması 15 olan 12 kişilik bir öğrenci grubundan yaşları 10 ve 16 olan iki öğrenci ayrılıyor. Kalan grubun yaş ortalamasının kaç olduğunu bulunuz.

3. 3, 5, 6, 4, 5, 7, 8 sayı dizisine x doğal sayısı eklendiğinde ortanca değişmemektedir. Bu durumda x in alacağı değerlerin kaç tane olduğunu bulunuz.

4. Elif Atatürk Lisesinde, Ömer ise Çanakkale Şehitleri Lisesinde ortak bir deneme sınavına girmiştir. Aşağıdaki tabloda bu öğrencilerin 20 soruluk bir fizik test sonuçları ve bulundukları okullarla ilgili bilgiler verilmektedir. Her iki okulda da eşit sayıda öğrenci bu sınava girdiğine göre Elif ve Ömer'in okullarındaki başarı durumlarını kıyaslayınız.

	Net Sayısı	**Okullar**	
		Aritmetik Ortalama	**Standart Sapma**
Elif	15	7	2
Ömer	15	7	5





Terimler ve Kavramlar

- Çizgi Grafiği
- Sütun Grafiği
- Daire Grafiği
- Histogram
- Grup Sayısı
- Grup Genişliği

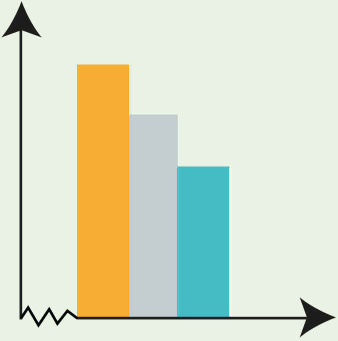
9.5.2. Verilerin Grafikle Gösterilmesi

Neler Öğreneceksiniz?

- Bir veri grubuna ilişkin histogram oluşturmayı,
- Gerçek hayat durumunu yansıtan veri gruplarını uygun grafik türleriyle temsil ederek yorumlamayı öğreneceksiniz.

9.5.2.1. Bir Veri Grubuna İlişkin Histogram Grafiği

Gruplandırılmış bir veri topluluğunda, verilerin tekrar etme sayılarının bitişik dikdörtgen şeklinde sütunlar hâlinde gösterimidir. Histogram genelde sürekli verilerin gösteriminde kullanılır.



Grafik çizimi yapılırken aşağıdaki adımlar izlenir.

1. Veriler küçükten büyüğe doğru sıralanır.
2. Açıklık bulunur.
3. İstenen grup sayısı belirlenir (Grup sayısı araştırma yapan kişiye göre değişir.).
4. $\text{Grup Genişliği} > \dfrac{\text{Açıklık}}{\text{Grup Sayısı}}$ olur.

Grup genişliği, $\dfrac{\text{Açıklık}}{\text{Grup Sayısı}}$ değerinden büyük en küçük tam sayıdır.

Örneğin bu değer;

- 4 çıkarsa grup genişliği 5,
- 4,1 çıkarsa grup genişliği 5,
- 5,8 çıkarsa grup genişliği 6 olarak alınır.

ÖRNEK 1

Bir izci kampında 24 kişinin diktiği fidan sayıları 10, 12, 14, 10, 16, 18, 20, 13, 15, 16, 20, 24, 25, 26, 8, 9, 11, 13, 17, 27, 22, 15, 17, 19 olarak verilmiştir. Bu verileri 4 gruplu histogram grafiğinde gösteriniz.

ÇÖZÜM

Çözümde kolaylık olması için veriler küçükten büyüğe doğru sıralanırsa

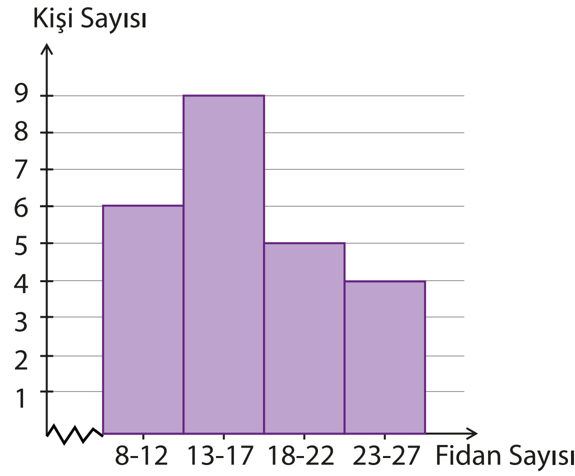
8, 9, 10, 10, 11, 12, 13, 13, 14, 15, 15, 16, 16, 17, 17, 18, 19, 20, 20, 22, 24, 25, 26, 27 şeklinde olur.

Grubun açıklığı, $27 - 8 = 19$ olur.

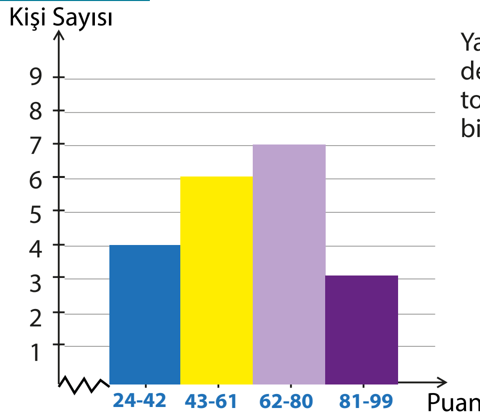
Histogram grafiğinde istenen grup sayısı 4 olduğundan grup genişliği $\dfrac{19}{4} = 4{,}75$ sayısından büyük en küçük tam sayı olan 5 alınır. Grup genişliği ve açıklığına göre sıklık tablosu oluşturulur.



Fidan sayısı	Kişi sayısı
8-12	6
13-17	9
18-22	5
23-27	4



ÖRNEK 2



Yanda 9/A sınıfı öğrencilerinin fizik dersi sınavından aldığı puanlar histogram grafiği şeklinde verilmiştir. Bu bilgilere göre

a) Açıklığın alabileceği **en büyük** tam sayı değerini bulunuz.

b) Grup genişliğini bulunuz.

c) 62 puan ve üzeri alan öğrencilerin sınıftaki yüzdesini bulunuz.

ÇÖZÜM

a) 99 ve 24 puan alan birer öğrenci olması durumunda açıklık en büyük değeri alacağından istenen değer $99-24=75$ olur.

b) Grup genişliği $\frac{42-24}{1}+1=19$ olur.

c) 62-80 aralığında puan alan öğrenci sayısı 7 dir. 81-99 aralığında puan alan öğrenci sayısı 3 tür. Bu durumda 62 puan ve üzeri alan öğrenci sayısı $7+3=10$ olur. Sınıf mevcudu $4+6+7+3=20$ olduğundan 62 puan ve üzeri alan öğrenci sayısı sınıfın %50 sidir.

9.5.2.2. Gerçek Hayat Durumunu Yansıtan Veri Gruplarını Uygun Grafik Türlerini Çizerek Yorumlama

Yaşadığınız ilde kuraklıkla mücadele amacıyla son 10 yıl içinde metrekareye düşen yağış miktarı bilgilerini araştırıp bir veri grubu oluşturarak bu bilgileri özet hâlinde bir sunum şekline getirmek ve başkalarına aktarmak için en uygun yol sizce ne olurdu?

Birden fazla verinin birbirine göre durumunu kıyaslamak, yani verilerin birbirlerine göre hangi konum ve seviyede bulunduğunu anlamak için grafikler çizilir.

Çizgi Grafiği

Sürekli verilerin yatay ve düşey eksendeki değerleri işaretlenerek bulunan noktaların düz çizgilerle birleştirilmesi sonucunda elde edilen grafik türüdür.





ÖRNEK 3

Boş bir şişeye her bir dakika içerisinde eklenen zeytinyağına ait zaman-litre verileri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

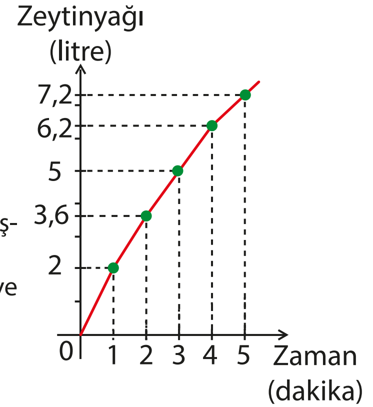
Zaman (dk.)	0	1	2	3	4	5
Litre	0	2	1,6	1,4	1,2	1

Bu verileri uygun bir grafik türü ile göstererek yorumlayınız.

ÇÖZÜM

Şişedeki yağ miktarı;
1. dakika sonunda 2 litre,
2. dakika sonunda 2 + 1,6 = 3,6 litre,
3. dakika sonunda 3,6 + 1,4 = 5 litre,
4. dakika sonunda 5 + 1,2 = 6,2 litre,
5. dakika sonunda 6,2 + 1 = 7,2 litre olur.

Şişede biriken zeytinyağı miktarı sürekli veri oluşturmaktadır.
Bu yüzden çizgi grafiği uygun bir gösterimdir ve yandaki gibi çizilebilir.



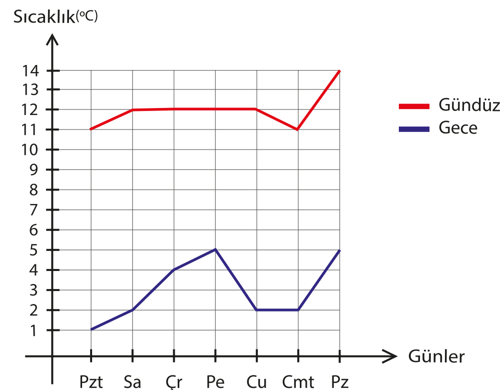
Tablodaki veriler, çizgi grafiğe aktarılması ile istenebilecek bilgilerin daha hızlı görülmesini ve yorumlanmasını sağlar. Örneğin 4. dakika sonunda şişedeki toplam zeytinyağı miktarı 6,2 litre olduğu görülür. Ayrıca 5 dakikalık zaman süresince şişedeki zeytin yağı miktarının sürekli arttığı grafiğe bakılarak yorumlanabilir.

ÖRNEK 4

Günler / Sıcaklık	Pazartesi	Salı	Çarşamba	Perşembe	Cuma	Cumartesi	Pazar
Gündüz °C	11	12	12	12	12	11	14
Gece °C	1	2	4	5	2	2	5

Yukarıdaki tablo 2017 yılının ilk haftası için Adana ilimizde beklenen gece ve gündüz ortalama hava sıcaklık tahminlerini göstermektedir. Bu verileri çizgi grafiği ile göstererek yorumlayınız.

ÇÖZÜM



Gündüzleri tahmin edilen ortalama hava sıcaklık değerleri kırmızı, geceleri tahmin edilen ortalama hava sıcaklık değerleri mavi çizgi ile gösterilmektedir.

Hava sıcaklığı herhangi iki gün arasında değişirken aralıktaki her değeri aldığından çizgi grafiği kullanılabilir.

Tablodaki verilerin çizgi grafiğe aktarılmasıyla gece ile gündüz arasındaki sıcaklık değişimleri karşılaştırılabilir. Örneğin perşembe ve cuma günü ölçülen gündüz sıcaklığı değişmezken, gece sıcaklığı tabloya göre azalmıştır.



ÖRNEK 5

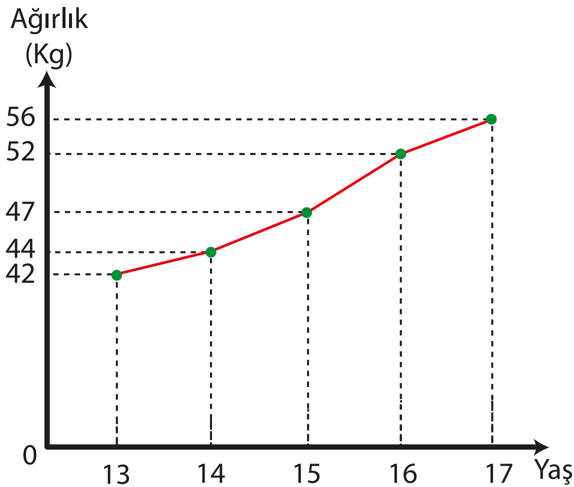
Tablo 1 de bir kişinin yaşına göre kilo değişimi verilmiştir. Bu verileri yorumlayarak uygun grafik türü ile gösteriniz.

Tablo 1

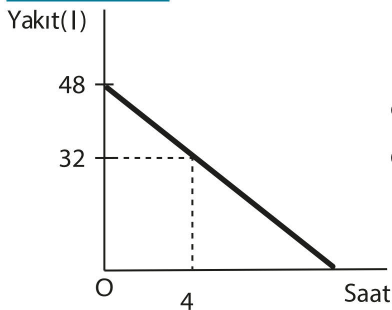
Ağırlık (kilo)	42	44	47	52	56
Yaş	13	14	15	16	17

ÇÖZÜM

Tablo 1 de kişi 42 kilodan 56 kiloya çıkarken aralıktaki tüm değerleri alarak çıkmıştır. Dolayısıyla bu tablo sürekli verilerden oluşur ve çizgi grafiği uygun bir gösterimdir.



ÖRNEK 6



Deposunda 48 litre yakıt bulunan hareket hâlindeki bir otomobilin deposunda kalan yakıt miktarının zamana göre değişimini gösteren doğrusal grafik yandaki şekilde verilmiştir.

Grafiğe göre depodaki yakıtın toplam kaç saatte bittiğini bulunuz.

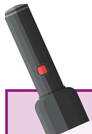
ÇÖZÜM

Depodaki 48 litre yakıt 4 saatte 32 litreye düşmüş yani 48 − 32 = 16 litre yakıt harcanmıştır. Bu ise saatte 4 litre yakıt harcandığını gösterir. Saatte 4 litre yakıt harcayarak 48 litre yakıt 48 : 4 = 12 saatte biter.





Sadece sayısal verilere bakarak veri gruplarını karşılaştırmak daha az çıkarımlar yapılmasına neden olabilir. Eğer bu veriler grafiğe aktarılırsa veri grupları daha iyi tanınabilir ve daha sağlıklı sonuçlar çıkarılabilir.



Tasarruflu ampüllerin akkor ampüllere göre 10-15 kat daha uzun ömürlü olduğunu ve ortalama yüzde 80 oranında daha az elektrik tükettiğini biliyor muydunuz?

ÖRNEK 7

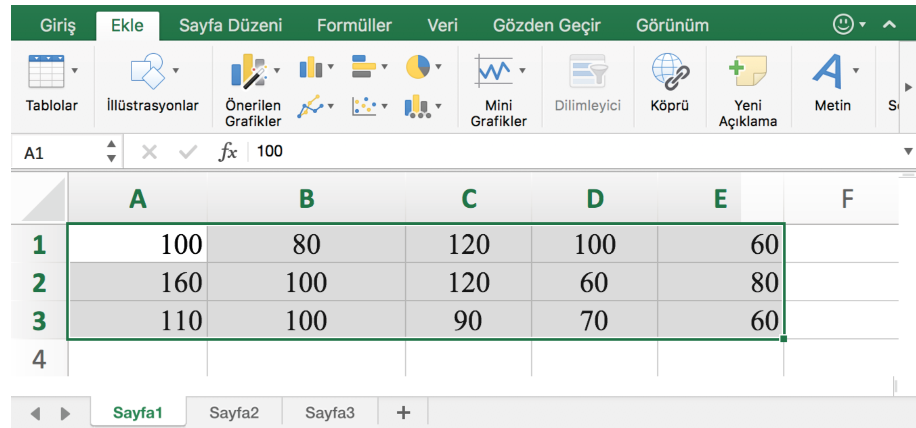
Soyadları Mavi, Kırmızı ve Yeşil olan üç ailenin hangi aylarda kaç kW (kilowatt) elektrik harcadığını gösteren tablo aşağıda verilmiştir. Tablodaki verileri bir tablolama programı olan Excel'de uygun bir grafik türü ile gösteriniz.

	OCAK	ŞUBAT	MART	NİSAN	MAYIS
Mavi ailesi	**100**	**80**	**120**	**100**	**60**
Kırmızı ailesi	160	100	120	60	80
Yeşil ailesi	**110**	**100**	**90**	**70**	**60**

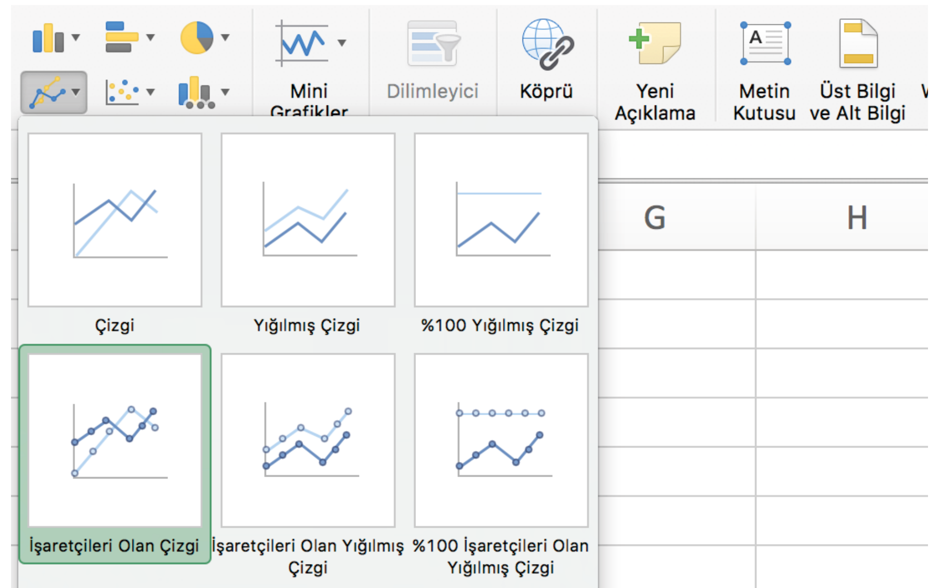
ÇÖZÜM

Elektrik sarfiyatı sürekli veri belirttiği için çizgi grafiği ile gösterilebilir.

Bir Excel sayfası açarak verileri aşağıdaki gibi yerleştiriniz ve bu hücrelerin tümünü seçerek üstteki "EKLE" sekmesine tıklayınız (Seçmek istediğiniz hücreleri fare kullanarak, sürükle bırak yöntemi ile seçebilirsiniz.).

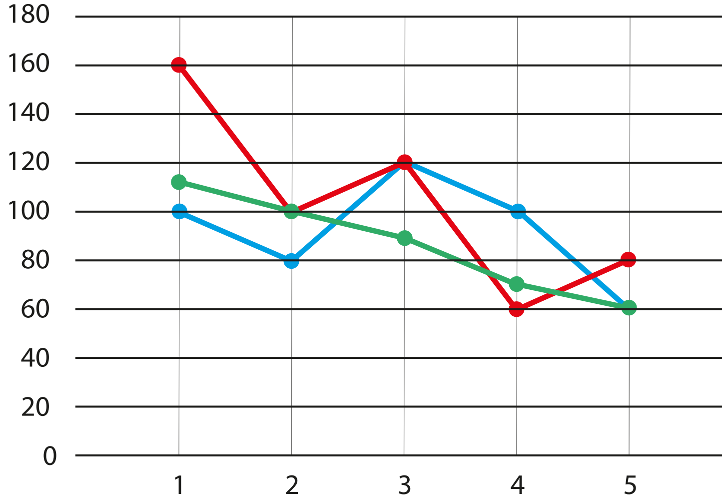


Daha sonra grafikler bölümünden çizgi grafiğine tıklayınız ve aşağıdaki görselde daha koyu renk ile görülen çizgi grafiği türüne tıklayınız.





Tüm bu işlemlerden sonra çizgi grafiği aşağıdaki gibi olacaktır.



Grafikteki mavi renk Mavi, kırmızı renk Kırmızı, yeşil renk Yeşil ailelerinin elektrik tüketimini göstermektedir.

Excel'de hücreleri seçtikten sonra grafikler bölümündeki önerilen grafikler sekmesine tıklayarak bu verilerin başka hangi grafik türleriyle gösterilebileceğini inceleyiniz.

Tabloya bakarak Mavi, Kırmızı ve Yeşil ailelerinin elektrik tüketimlerini karşılaştırmak zordur. Tablodaki verilerin yukarıdaki çizgi grafiğine aktarılmasıyla istenebilecek karşılaştırmaları yapmak daha kolay olacaktır.

Sütun Grafiği

Veri gruplarını karşılaştırmak için dik koordinat sisteminde yatay ya da düşey olacak şekilde sütun ya da çubuk kullanılarak çizilen grafik türüdür.

Sütun grafiği kesikli veriler için kullanılır.

ÖRNEK 8

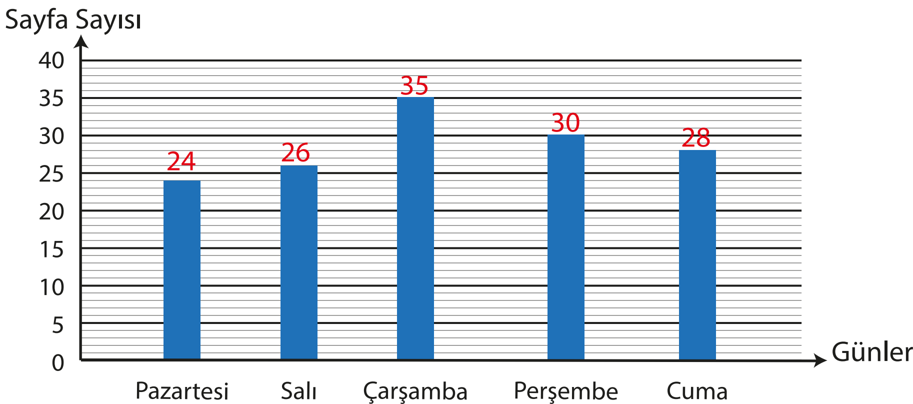
Ahmet'in günlere göre okuduğu kitap sayfa sayısı aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Günler	Pazartesi	Salı	Çarşamba	Perşembe	Cuma
Sayfa sayısı	24	26	35	30	28

Bu tablodaki verileri uygun bir grafik türü ile gösteriniz.

ÇÖZÜM

Tablo incelenirse verilerin kesikli olduğu görülür. Kesikli veriler çizgi grafiği ile gösterilemez. Kesikli olan bu veri grubu sütun (çubuk) grafiği ile gösterilebilir. Grafik aşağıda verilen şekildeki gibi olur.





Daire Grafiği

Verilerin bütüne olan oranını daire dilimleri şeklinde gösteren grafik türüdür.

Veriler daire grafiğine merkez açıyla orantılı olarak yerleştirilir.



ÖRNEK 9

Adaylar	Ata	Gizem	Sude	Cenk	Berfin
Alınan oy sayısı	135	360	270	180	135

1080 öğrencisi bulunan Cumhuriyet Anadolu Lisesinde öğrenci temsilcisi olmak için aday olan öğrenciler ve aldıkları oylar yukarıdaki tabloda verilmiştir.

Tabloyu daire grafiği ile gösteriniz.

ÇÖZÜM

Toplam oy sayısı 135 + 360 + 270 + 180 + 135 = 1080 olur. Veriler daire grafiğine 360 derecelik açıyla orantılı olarak yerleştirilir.

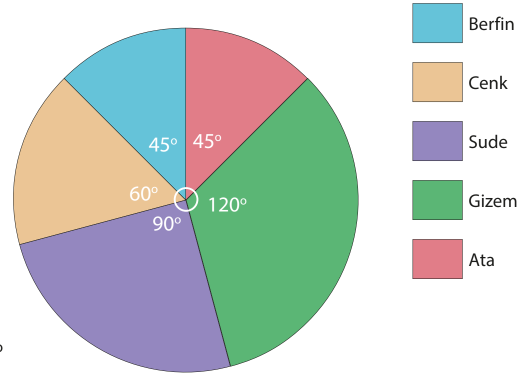
Herhangi bir verinin tüm veri toplamına bölünüp 360^0 ile çarpılmasıyla bu veriye ait merkez açı bulunur.

$360^\circ \cdot \frac{135}{1080} = 45^\circ \longrightarrow 135$
oy sayısına düşen merkez açı 45°,

$360^\circ \cdot \frac{360}{1080} = 120^\circ \longrightarrow 360$
oy sayısına düşen merkez açı 120°,

$360^\circ \cdot \frac{270}{1080} = 90^\circ \longrightarrow 270$
oy sayısına düşen merkez açı 90°,

$360^\circ \cdot \frac{180}{1080} = 60^\circ \longrightarrow 180$
oy sayısına düşen merkez açı 60° olur. Bu oylara ait açılar daire grafiği ile yandaki şekilde gösterilmiştir.



ÖRNEK 10

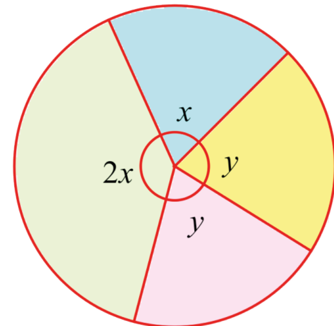
Bir köyün muhtarlık seçiminde 4 kişi aday olmuştur ve adil bir seçim yapılmıştır. Bu seçimle ilgili aşağıdaki bilgiler veriliyor.

- En çok oy alan aday en az oy alan adayın 2 katı oy almıştır.
- Diğer iki aday eşit sayıda oy almıştır ve bu adayların aldığı oy sayılarının daire grafiğinde gösterildiği daire diliminin merkez açısının ölçüşü 75° dir. Bu bilgilere göre sayılan geçerli oy sayısı 1800 ise en çok oy alan adayın aldığı oy sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM:

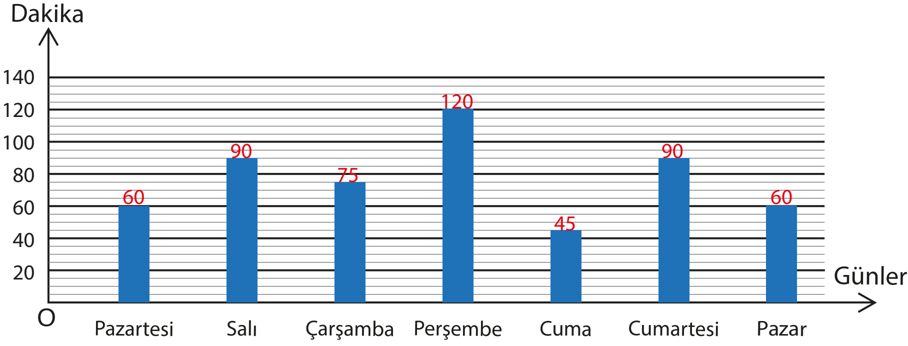
Alınan oylar daire grafiğinde yandaki gibi gösterilmiştir. Verilenlere göre y = 75° olduğundan x = 70° bulunur. Bu durumda en çok oy alan aday $1800 \cdot \frac{2x}{360^\circ} = 1800 \cdot \frac{140^\circ}{360^\circ} = 700$ oy almıştır.

Bu oylara ait açılar daire grafiği ile yandaki şekilde gösterilmiştir.



ÖRNEK 11

Aşağıdaki sütun grafiği bir televizyon kanalının yedi gün boyunca yayımladığı farklı belgesellerin sürelerini vermektedir. Bu grafikteki verileri Excel kullanarak dairesel grafikle gösteriniz.

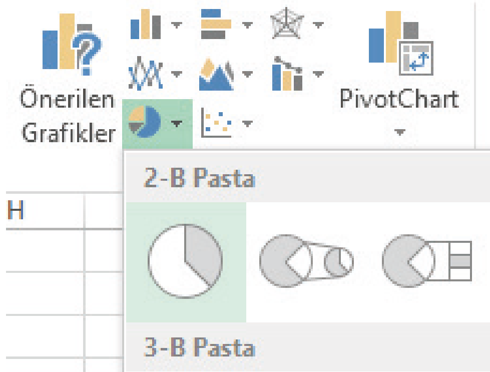


ÇÖZÜM

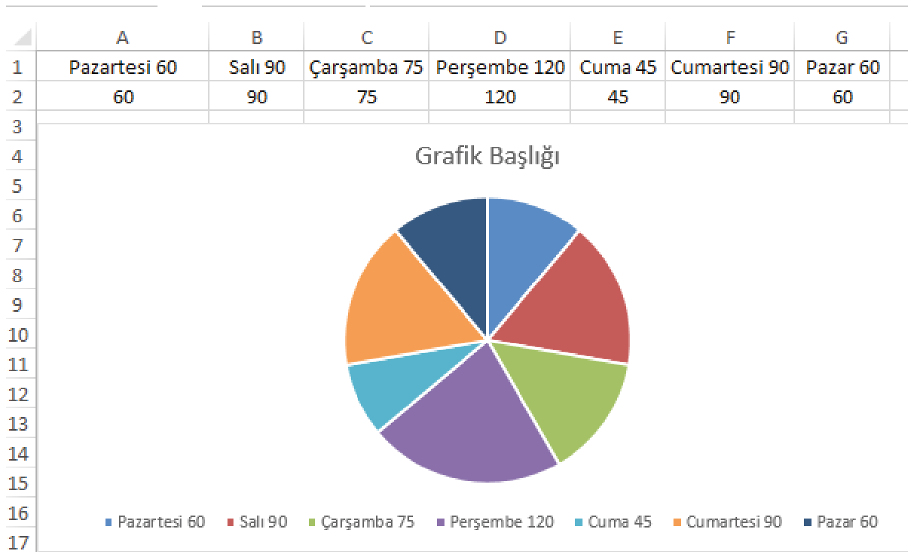
Excel dosyası açarak veriler aşağıdaki gibi yazıldığında ve hücrelerin tümü seçildiğinde

	A	B	C	D	E	F	G
1	Pazartesi 60	Salı 90	Çarşamba 75	Perşembe 120	Cuma 45	Cumartesi 90	Pazar 60
2	60	90	75	120	45	90	60

"EKLE" sekmesine tıkladıktan sonra grafikler bölümünden daire grafiğine, ardından açılan pencerede aşağıdaki gibi koyu renkle görülen grafik türüne tıklayınız.



Aşağıdaki gibi bir daire grafiği oluşacaktır.



	A	B	C	D	E	F	G
1	Pazartesi 60	Salı 90	Çarşamba 75	Perşembe 120	Cuma 45	Cumartesi 90	Pazar 60
2	60	90	75	120	45	90	60

ÖRNEK 12

Tablo1

Değerlendirme Biçimi	Gram
Bayat ekmek pizzası	800
Fırında sarımsaklı ekmek	400
Yumurtalı ekmek	600
Ekmek tatlısı	500
Bayat ekmekli köfte	700

Tablo 2

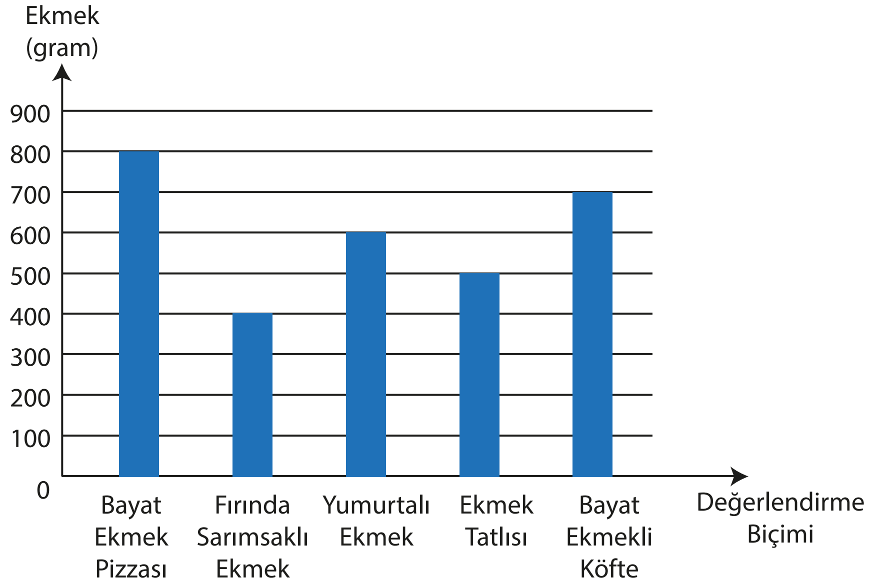
Saat	Tüketim miktarı (l)
0 — 4	0
5 — 9	50
10 — 14	100
15 — 19	80
20 — 24	20

Yukarıdaki tablo 1 de bir ailenin ekmek israfını önlemek amacıyla bir ay içerisinde bayatlayan ekmeklerden yaptığı tatlı ve yemek türleri; tablo 2 de ise bu ailenin saatlere göre günlük ortalama su tüketimi belirtilmiştir. Bu tabloları uygun grafik türleri ile ayrı ayrı gösteriniz.

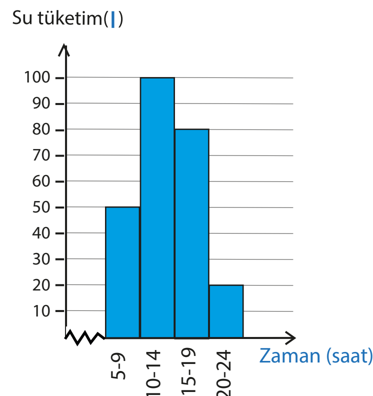
Türkiye'de bir yılda 2 milyar civarında ekmeğin çöpe atıldığını ve yapılan bu israfın parasal karşılığıyla 500 okul yapılabileceğini biliyor musunuz?

ÇÖZÜM

Tablo 1 deki tatlı ve yemek türlerine ait veriler kesikli veri olduğundan çubuk grafiği ile gösterilebilir.



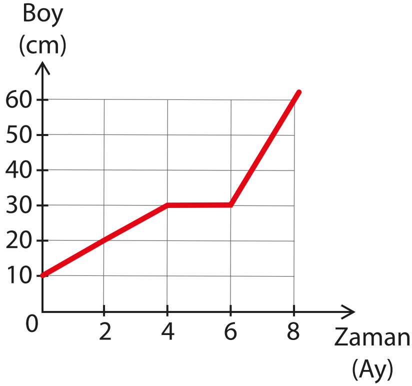
Tablo 2 deki su tüketimine ait veriler sürekli veri olduğundan histogram grafiği ile gösterilebilir.





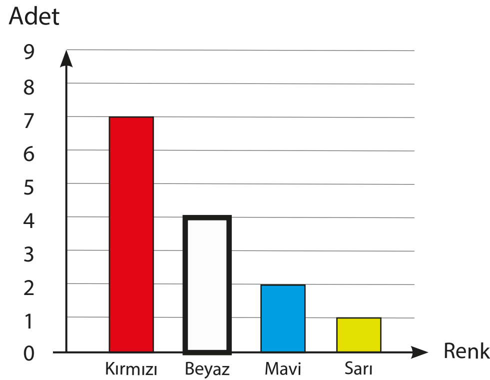
ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki şekilde bir bitkinin 8 aylık boy-zaman grafiği verilmiştir. Buna göre



a) Bu bitkinin en çok hangi aylar arasında uzadığını bulunuz.
b) Bu bitkinin hangi aylar arasında boyunda değişiklik olmadığını bulunuz.
c) Bu bitkinin 8 ay boyunca aylık ortalama kaç cm uzadığını bulunuz.

2. Aşağıdaki grafikte bir mağazada pazartesi günü hangi renkten kaç gömlek satıldığı bilgisi verilmiştir. Grafiğe göre aşağıda istenenleri yapınız.

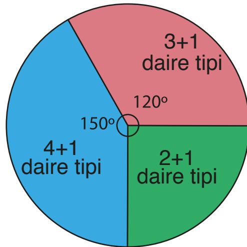


a) Grubun tepe değerini bulunuz.

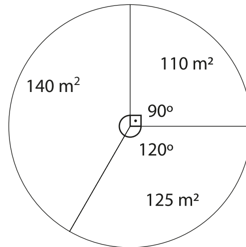
b) Verileri başka hangi grafiklerle gösterebilirsiniz? Arkadaşlarınızla tartışınız.

c) Verileri daire grafiği ile gösteriniz.

3. Bir sitedeki daire tipleri ve bu dairelerin farklı metrekareye sahip olanlarının oranıyla ilgili aşağıdaki daire grafikleri verilmiştir.



Daire Tipleri



3+1 dairelerin m² çeşitleri

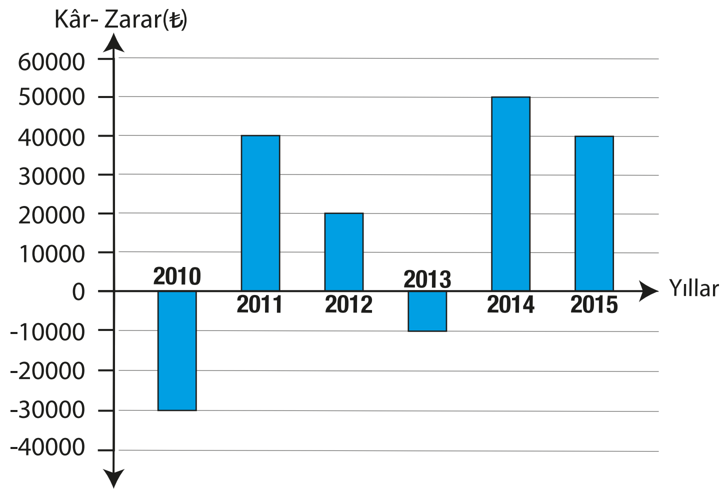
Bu sitedeki 3 + 1 dairelerin 45 tanesi 140 metrekare ise
a) Kaç tane 3 + 1 daire olduğunu bulunuz.
b) Kaç tane 2 + 1 daire olduğunu bulunuz.
c) Kaç tane 4 + 1 daire olduğunu bulunuz.



4. Bir maddenin zamana göre sıcaklık değişimi aşağıdaki tabloda verilmiştir. Tablodaki verileri bir tablolama programı olan Excel'de uygun bir grafik türü ile gösteriniz.

Zaman (dk.)	0	1	2	3	4
Sıcaklık (°C)	700	640	600	580	570

5. Aşağıdaki sütun grafiğinde bir şirketin yıllara göre kâr-zarar durumu verilmiştir.



a) Şirketin kâr ettiği yılları ve zarar ettiği yılları belirleyiniz.
b) Grafikteki yıllara göre şirketin toplamda kaç Türk lirası kâr ya da zarar ettiğini bulunuz.
c) Bu yıllarla birlikte 2016 yılının sonunda toplamda 60 000 Türk lirası kâr edilmesi için 2016 yılı zararının kaç Türk lirası olması gerektiğini bulunuz.

6. Su tasarrufu ile ilgili aşağıdaki bilgiler verilmiştir.

- Diş fırçalarken musluk sürekli açık tutulmazsa kişi başı yılda ortalama 12 ton,
- Duş süresi 1 dakika azaltılırsa kişi başı yılda ortalama 18 ton,
- 4 kişilik bir ailede bulaşık ve çamaşırlar makinede yıkanırsa yılda ortalama 40 ton,
- 4 kişilik bir ailede sebze ve meyveler çeşme altında değil de su dolu bir kapta yıkanırsa yılda ortalama 18 ton su tasarrufu yapılabilmektedir.

Bu bilgilere göre 4 kişilik bir ailenin her bireyi, yukarıdaki tedbirleri uygulamaya başlıyor. 1 ton suyun 2,5 Türk lirası olduğu bir şehirde bu ailenin bir yıl içerisinde kaç Türk lirası tasarruf edebileceğini hesaplayıp verilen her maddeye göre elde edilen yıllık tasarruf tutarını Türk lirası cinsinden sütun grafiği ile gösteriniz.



9.5. ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

1. 10, 4, 2, 6,12, x, 10, 8, 8, 10 veri grubundaki on sayının aritmetik ortalaması 8,1 ise x değeri kaçtır?

A) 11 B) 10 C) 9 D) 8 E) 7

2. 8, 8, 8, 6, 6, 6, 6, 12, 12, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2 veri grubunun ortancası ile tepe değer toplamı kaçtır?

A) 20 B) 18 C) 14 D) 10 E) 8

3. Gonca Hanım evindeki 10 günlük doğal gaz tüketimini m^3 cinsinden 10, 9, 12, 13, 13, 12, 10, 14, 10, 17 olarak not almıştır. Oluşturduğu bu veri grubunun tepe değer, ortanca ve açıklığının aritmetik ortalaması aşağıdakilerden hangisidir?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

4. Bir veri grubu 6, 3, 4, 3, 5, 3 sayılarından oluşmaktadır. Bu veri grubu için

I. Açıklığı 3 tür.
II. Ortancası 4 tür..
III. Tepe değeri 3 tür.
IV. Aritmetik ortalaması 4 tür.

Bilgilerden hangisi ya da hangileri yanlıştır?

A) I ve II B) II ve III C) I ve IV D) Yalnız II E)Yalnız III

5. 9. sınıf öğrencisi Ece'nin 1. dönem karnesindeki beş farklı derse ait notları 5, 3, 3, 4, 5 tir. Ece, bu notlarının standart sapmasını hesaplarken aşağıdaki adımları takip ediyor.

I. Aritmetik ortalama $\overline{X} = 4$ tir.

II. Aritmetik ortalamanın her bir veriden farkının kareleri toplamı;

III. $(5-4)^2 + (3-4)^2 + (3-4)^2 + (4-4)^2 + (5-4)^2 = 4$ tir.

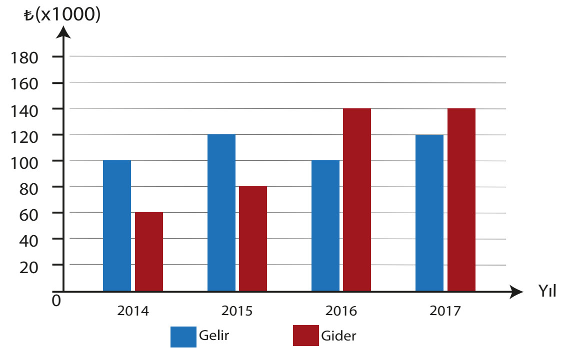
IV. $S = \sqrt{\frac{4}{5}}$ tir.

V. $S \approx 0{,}8944$ tir.

Buna göre kaçıncı adımda hata yapmıştır (Yukarıdaki işlemleri yaparken hesap makinesi kullanabilirsiniz.)?

A) I B) II C) III D) IV E) Hiçbiri

6.



Yukarıda Mutlu Ticaretin 4 yıllık gelir-gider durumu sütun grafiği ile verilmiştir. Bu 4 yıl boyunca Mutlu Ticaret'in toplam geliri toplam giderinden kaç Türk lirası fazladır?

A) 10 000 B) 20 000 C) 30 000 D) 40 000 E) 50 000



7. Bir sınıfın coğrafya dersi yazılı sınav sonuçları 70, 61, 50, 20, 28, 30, 80, 90, 95, 40, 100, 30, 35, 45, 60, 65, 85, 30, 80, 50 şeklindedir. Veri grubunun açıklık değeri tepe değerinden kaç fazladır?

A) 60 B) 50 C) 40 D) 30 E) 20

8. 3, 4, 9, A veri grubunun aritmetik ortalamasının tepe değerden 1 fazla olması için A ne olmalıdır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 9

9. Bir köyde yaşayan erkeklerin yaş ortalaması 38, kadınların yaş ortalaması ise 32 dir. Köy nüfusunun yaş ortalaması 34 ise erkek nüfusunun tüm nüfusa oranı kaçtır?

A) 1/2 B) 1/3 C) 1/4 D) 2/3 E) 3/4

10. Aşağıdaki tabloda aynı gün ve saatte farklı kanallarda yayımlanan bazı spor programlarının 4 haftalık izlenme oranları yüzde olarak verilmiştir.

	1.Hafta	2.Hafta	3.Hafta	4.Hafta
Gol Zamanı	12	18	14	20
90 Dakika	6	10	30	18
Kale Arkası	22	20	14	8
Maç Sonu	14	16	16	14
Santra	10	10	20	24

Yukarıdaki tabloya bakarak hangi programın izlenme oranı açısından daha istikrarlı olduğunu söylenebilir?

A) Gol Zamanı
B) 90 Dakika
C) Kale Arkası
D) Maç Sonu
E) Santra

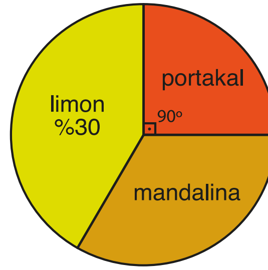
11. 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4 veri grubunun merkezî eğilim ölçülerinin sayısal değerleri A kümesini oluşturmaktadır. A kümesi ile ilgili

I. s(A) = 4 tir.
II. 1 ∈ A dır.
III. Alt küme sayısı 4 tür.

ifadelerinden hangisi ya da hangileri yanlıştır?

A) I B) II C) III D) I ve II E) I ve III

12.



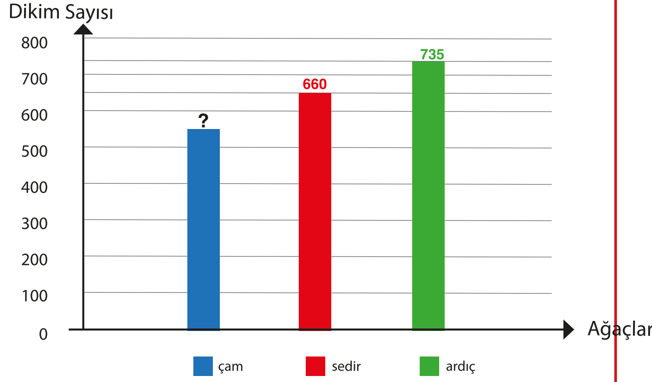
3 farklı meyve türünün toplam üretim miktarı içindeki oranları yukarıdaki dairesel grafikte gösterilmiştir. Grafikle ilgili aşağıdaki bilgiler veriliyor.

I. Mandalina üretimi tüm üretimin yüzde 45 idir.
II. Mandalina üretimine ait merkez açısının ölçüsü 162 derecedir.
III. Mandalina üretimi limon üretiminden daha azdır.

Buna göre yukarıdaki ifadelerden hangisi ya da hangileri yanlıştır?

A) I ve II B) I ve III C) II ve III D) Yalnız II E)Yalnız III

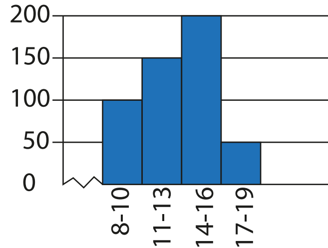
13.



Yukarıdaki sütun grafiğinde bir millî parka üç hafta boyunca dikilen bazı türdeki fidan sayıları verilmiştir. Haftalık dikilen fidan sayısı ortalama 645 ise kaç adet çam fidanı dikilmiştir?

A) 527 B) 533 C) 540 D) 548 E) 550

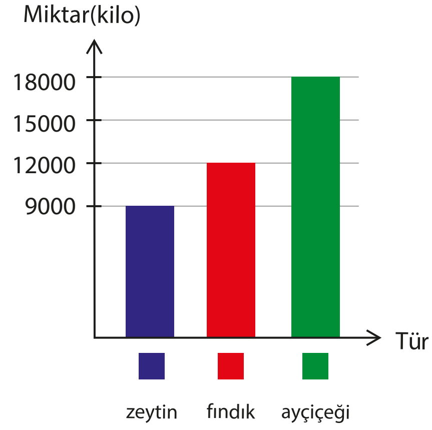
14.

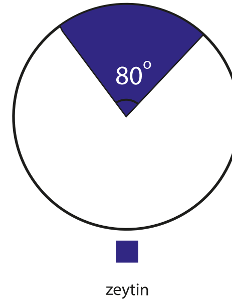


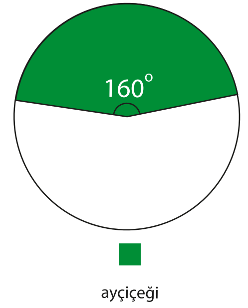
Bir okulda hangi yaş aralığında kaç öğrenci olduğuna dair histogram grafiği yukarıda verilmiştir. Verilenlere göre aşağıdakilerden hangisi kesinlikle yanlıştır?

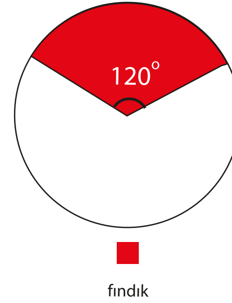
A) Grubun açıklığı en çok 11 dir.
B) 14 — 19 yaş aralığındaki öğrenci sayısı tüm grubun %50 sidir.
C) 11 — 13 yaş arasındaki öğrenci sayısı tüm grubun 3/10 unu oluşturur.
D) Grubun genişliği 50 dir.
E) 15 — 18 yaş aralığındaki öğrenci sayısı en fazla 250 dir.

15.









Yukarıdaki sütun grafiğinde üretilen zeytin, fındık ve ayçiçeği miktarları; daire grafiklerinde ise bu ürünlerden elde edilecek yağ miktarlarının oranları daire dilimi olarak verilmiştir.
Fındık, zeytin ve ayçiçeğinden elde edilen yağ miktarları aşağıdakilerden hangisinde doğru sırayla verilmiştir?

A) 8000 — 2000 — 4000
B) 4000 — 2000 — 8000
C) 8000 — 4000 — 2000
D) 4000 — 8000 — 2000
E) 2000 — 4000 — 8000

SEMBOL VE GÖSTERİMLER

p	:	p önermesi
p'	:	p önermesinin değili
$\sim p$	:	p önermesinin değili
$\equiv$	:	Denktir
$\forall$	:	Her
$\exists$	:	Bazı
$\wedge$	:	ve
$\vee$	:	veya
$\veebar$	:	ya da
$\Rightarrow$	:	ise
$\Leftrightarrow$	:	ancak ve ancak
$\in$	:	Elemanıdır
$\notin$	:	Elemanı değildir
$\cup$	:	Birleşim
$\cap$	:	Kesişim
$\supseteq$	:	Kapsar
$\subseteq$	:	Alt küme
A'	:	A nın tümleyeni
$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	:	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	:	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{Q}'$	:	İrrasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	:	Gerçek sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	:	Pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}^+$	:	Pozitif rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	:	Pozitif gerçek sayılar kümesi
$\mathbb{Q}^-$	:	Negatif rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^-$	:	Negatif tam sayılar kümesi
$\mathbb{R}^-$	:	Negatif gerçek sayılar kümesi
$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$	:	$\mathbb{R}$ kartezyen çarpım $\mathbb{R}$
$\widehat{ABC}$	:	ABC üçgeni
$m(\widehat{ABC})$	:	ABC açısının ölçüsü
$[AB]$	:	AB doğru parçası
$\lvert AB \rvert$	:	AB doğru parçasının uzunluğu
$\overline{X}$	:	Aritmetik ortalama
S	:	Standart sapma

CEVAP ANAHTARI

MANTIK

9.1.ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

1. C	6. D	11. C	16. E
2. D	7. B	12. C	17. E
3. C	8. B	13. D	18. a) Remzi, Kaan, Nilgün
4. A	9. D	14. D	b) 29
5. B	10. A	15. C	c) 1

KÜMELER

9.2. ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

1. E	8. B	15. D	22. C
2. A	9. A	16. A	23. a) 3
3. C	10. A	17. E	b)13
4. D	11. C	18. D	c)16
5. B	12. B	19. E	
6. D	13. A	20. A	
7. E	14. C	21. E	

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

9.3. ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

1. B	26. E	51. B	76. E	101. C
2. C	27. A	52. E	77. C	102. D
3. D	28. E	53. B	78. A	103. D
4. C	29. A	54. A	79. E	104. B
5. A	30. C	55. C	80. C	105. B
6. C	31. E	56. B	81. B	106. E
7. D	32. A	57. C	82. A	107. D
8. E	33. E	58. A	83. B	108. B
9. E	34. E	59. C	84. E	109. D
10. C	35. E	60. C	85. E	110. C
11. A	36. E	61. A	86. B	111. D
12. D	37. B	62. D	87. D	112. C
13. C	38. B	63. D	88. E	113. a)7
14. B	39. D	64. B	89. D	b)13
15. D	40. C	65. E	90. B	c)29
16. E	41. B	66. D	91. D	
17. D	42. B	67. A	92. C	
18. C	43. C	68. E	93. B	
19. D	44. E	69. A	94. D	
20. A	45. D	70. B	95. E	
21. E	46. E	71. D	96. A	
22. E	47. A	72. E	97. D	
23. D	48. C	73. C	98. C	
24. E	49. B	74. A	99. C	
25. B	50. E	75. D	100. B	

ÜÇGENLER

9.4. ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

1. E
2. D
3. C
4. B
5. A
6. C
7. E
8. C
9. A
10. B
11. B
12. D
13. D
14. C
15. E
16. C
17. D
18. D
19. A
20.C
21. C
22. B
23. E
24. D
25. C
26. B
27. D
28. E
29. D
30. B
31. E
32. A
33. E
34. E
35. E
36. C
37. B
38. D
39. A
40. C
41. E
42. A
43. E
44. B
45. E
46. A
47. C
48. C
49. D
50. A
51. A
52. E
53. C
54. C
55. E
56. D
57. C
58. A
59. B
60. E
61. B
62. C
63. C
64. A
65. D
66. A
67. B
68. E
69. B
70. D
71. E
72. C
73. a)21
    b) $\frac{\sqrt{337}}{2}$
    c)84

VERİ

9.5. ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

1. A
2. E
3. C
4. A
5. E
6. B
7. B
8. D
9. B
10. D
11. D
12. E
13. C
14. D
15. B

SÖZLÜK

– A –

açı : Başlangıç noktası ortak olan iki ışının birleşim kümesi.
açık önerme : İçinde değişken bulunan ve bu değişkene verilen değerlerle doğruluğu veya yanlışlığı belli olan önerme.
aksiyom : Doğruluğu ispatsız kabul edilen önerme.
alan : Bir yüzeyin bulunduğu düzlemde kapladığı yer.
alt küme : A kümesinin her elamanı B kümesinin de elemanı ise A, B nin alt kümesidir.
altın oran : Değeri $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180339887....$ olan bir irrasyonel sayı.
analitik düzlem : Üzerine koordinat sistemi yerleştirilmiş düzlem.
aralarında asal sayılar : Ortak bölenlerinin en büyüğü 1 olan en az iki tam sayıya denir.
aritmetik ortalama : Bir diziyi oluşturan sayıların toplamının dizinin terim sayısına bölünmesi ile elde edilen sayı.
asal sayı : 1 ve kendisinden başka pozitif böleni olmayan 1 den büyük pozitif tam sayılar.
ayrık kümeler : Kesişimleri boş olan kümeler.

– B –

başlangıç noktası (orijin) : Koordinat eksenlerinin kesiştikleri nokta.
bilinmeyen : Bir eşitliği sağlayan sayılara karşılık gelen sembol ya da harf.
birim : Bir niceliği ölçmek için kendi cinsinden örnek seçilen değişmez parça.
boş küme : Hiç elemanı olmayan küme.
bölen : Bir bölme işleminde bölünen sayının kaç eş parçaya ayrıldığını gösteren sayı.
bölüm : Bölme işlemi sonunda elde edilen sayı.
bölünen : Bölme işleminde eş parçalara ayrılması gereken sayı, miktar.
bütünler açılar : Ölçülerinin toplamı 180 derece olan açılar.

– C — Ç –

çap : Çemberin merkezinden geçen ve uç noktaları çember üzerinde bulunan doğru parçası.
çember : Bir düzlemdeki sabit bir noktadan eşit uzaklıkta bulunan noktaların kümesi.
çevre : Bir çokgen oluşturan doğru parçalarının uzunlukları toplamı.
çözüm kümesi : Bir açık önermeyi sağlayan değerlerin kümesi.

– D –

daire : Çember ile iç bölgesinin birleşimi.
daire dilimi : Bir dairede, merkez açının iç bölgesinin gördüğü yayla sınırlı olan kısmı.
daire grafiği : Bir bütünün parçaları hakkında bilgi sunmada kullanılan, daire şeklindeki grafik türü.
dar açı : Ölçüsü 90 dereceden küçük olan açı.
denklem sistemi : En az iki denklemin meydana getirdiği sistem.
denklem : İçinde en az bir bilinmeyenin bulunduğu eşitlik.
denklemin çözüm (doğruluk) kümesi : Bir denklemin köklerinin oluşturduğu küme.
denk önermeler : Doğruluk değerleri aynı olan önermeler.

derece : Açı ölçü birimidir. Birim çemberin çevre uzunluğunu 360 eş parçaya ayırarak her bir parçayı gören merkez açının ölçüsü.
dik kenar : Bir dik üçgende her bir dar açının karşısında bulunan kenar.
dik üçgen : Bir açısının ölçüsü 90 derece olan üçgen.
dik açı : Ölçüsü 90 derece olan açı.
doğrusal noktalar : Aynı doğru üzerindeki noktalar.
doğru orantı : Biri artarken diğeri de aynı oranda artan ya da biri azalırken diğeri de aynı oranda azalan çokluklar arasındaki orantı çeşidi.
doğru parçası : Bir doğrunun, üzerinde alınmış iki nokta ile sınırlandırılmış parçası

– E –

eleman : Kümeyi oluşturan nesnelerin her biri.
EBOB : En az iki sayma sayısının ortak bölenlerinin en büyüğü.
EKOK : En az iki sayma sayısının ortak katlarının en küçüğü.
eşlik : Eş olma durumu.
eşitlik : İçinde = sembolü bulunan matematik cümlesi.
eşitsizlik : İçinde $<, , >, \leq, \geq$ veya $\neq$ sembollerinden en az birini bulunduran matematik cümlesi.
eşitsizlik sistemi : En az iki eşitsizliğin meydana getirdiği sistem.
evrensel küme : Üzerinde çalışılan konuyla ilgili olan tüm elemanları içeren küme.

– G –

geniş açı : 90 derece ile 180 derece arasında bir ölçüye sahip olan açı.
gerektirme : p ise q şartlı önermesinin doğruluk değeri 1 ise bu önerme gerektirmedir.

– H –

hipotez : p ise q şartlı önermesinde p önermesi.
hipotenüs : Bir dik üçgende dik açının karşısındaki kenar.
histogram : Veri genişlikleri eşit olan farklı aralıklardaki veri sayılarını gösteren grafik türü.
homojen : Birbirlerine benzer karakterlere, yapıya sahip parça veya birimlerden oluşan.
hüküm : p ise q şartlı önermesinde q önermesi.

– I — İ –

iç açı : Bir çokgenin ardışık iki kenarının oluşturduğu ve çokgenin içinde bulunan açı.
iç ters açı : Parelel iki doğruyu kesen üçüncü bir doğrunun iki yanında ve parelellerin içinde altlı üstlü ortaya çıkan dört açıdan her biri.
irrasyonel sayı : Payı ve paydası birer tamsayı olan bir kesir olarak ifade edilemeyen sayı.
istatistik : Bir sonuç çıkarmak için verileri bir yönteme göre toplayıp sayı olarak belirtme işlemi.
ispat : Bilinen matematiksel kural, özellik, sonuç veya tanımları kullanarak bir yargının doğru veya yanlış olduğunun gösterilmesi.

– K –

katsayı : Bir niceliğin kaç katı alındığını gösteren sayı.
kartezyen koordinat sistemi : Düzlemde, birbirine dik iki sayı doğrusunun 0 noktasında kesişerek oluşturduğu sistem.
kesen : Paralel iki doğrunun her birini farklı bir noktada kesen üçüncü doğru.
kesir : Bir birimin bölündüğü eşit parçalardan birini veya birkaçını anlatan sayı.

– M –

merkez açı : Köşesi merkezde olup kenarları çemberle kesişen açı.
mod : Tepe değer veya en çok tekrar eden sayı.

– O –

oran : İki sayı arasındaki karşılaştırma.
orantı : İki oranın birbirine eşitliği.
ortanca değer : Bir veri grubu sıralandığında, terim sayısı tek ise ortadaki sayı, çift ise ortadaki iki sayının toplamının yarısı.

– Ö –

önerme : Doğru ya da yanlış kesin bir hüküm bildiren ifadeler.

– P –

paralel doğrular : Aynı düzlemde bulunan ve ara kesitleri boş küme olan iki doğru.

– S –

sayı doğrusu : Üzerine reel sayıların yerleştirildiği doğru.
sıralı ikili : Birinci bileşeni a, ikinci bileşeni b olan (a, b) çifti.
sonlu küme : Eleman sayısı sayılabilir çoklukta olan küme.
sonsuz küme : Eleman sayısı sayılamayan çoklukta olan küme.

– T –

terim : Bir bilim dalı içinde özel anlamı olan kelime.
tepe değer : Veri grubunda en çok tekrar eden sayı.
ters orantı : Biri artarken diğeri aynı oranda azalan ya da biri azalırken diğeri aynı oranda artan çokluklar arasındaki orantı çeşidi.
tümler açılar : Ölçülerinin toplamı 90 derece olan açılar.

– Ü –

üs : Bir sayının kaç tanesinin çarpıldığını gösteren ve bu sayının sağ üst köşesine yazılan sayı (kuvvet).

– Y –

y ekseni : Kartezyen koordinat sistemindeki dikey eksen.

KAYNAKÇA

Anton, M. (1922). *Calculus with Analytic Geometry*. New York: John Willey Sons. Inc.
Bilim ve Teknik Dergisi (1992). Ankara: TÜBİTAK Yayınları (Ağustos 1992 sayısı).
Brown, R. G. (1992). *Advanced Mathhematics*. Boston: Houghton Mifflin Company.
Cajori, F. (2015). *Matematik Tarihi*. (çev.: Deniz İlalan). Ankara: ODTÜ Yayıncılık.
İslam Tarihi Ansiklopedisi (2011). (hzl.: Yiğit, İsmail vb.). İstanbul: Kayıhan Yayınları.
Porter, D. P., Cozzens, M. B. (1987). *Mathematics with Calculus*. Toronto: D. C. Heath and Company.
Salih Zeki (2007). *Âsâr-ı Bakiye*. Cilt 3. İstanbul: Babil Yayınları.
T.C. Milli Eğitim Bakanlığı Ortaöğretim Matematik Dersi (9, 10, 11, ve 12. Sınıflar) Öğretim Programı (2018). Ankara.
Türkçe Sözlük (2012). (hzl.: Akalın, Ş. H. vb.). Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları.
Yazım Kılavuzu (2012). (hzl. Akalın, Ş. H. vb.). Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları.

GENEL AĞ KAYNAKÇASI

http://history.mcs.st-andrews.ac.uk (Erişim: 06.01.2018, 14.20)
http://journal.dogus.edu.tr/index.php/duj/article/viewFile/214/pdf_5006 (Erişim: 11.04.2017, 11.05).
http://kadiri.bilkent.edu.tr/mat.donem.odev/akya%20akarsu.karkristalleri.pdf (Erişim: 24.04.2017, 07.00).
http://sgm.gsb.gov.tr/ (Erişim: 20.03.2017, 11.35).
http://turkoloji.cu.edu.tr/GENEL/fikri_akdeniz_pisagor_pisagorculuk_felsefesi.pdf (Erişim: 20.04.2017, 07.00).
http://web.deu.edu.tr/mate-matik/m1.html (Erişim: 25.04.2017, 11.00).
http://www.cmpe.boun.edu.tr/courses/cmpe220/bingol220wiki/doku.php?id=2010-3:home (Erişim: 17.06.2017, 14.30).
http://www.matder.org.tr/index.php?option=com_content&id=28:euclides-oklid-mo-330-275-&-catid=7:unlu_matemetikciler&itemid=171 (Erişim: 18.04.2017, 08.50).
https://www.csb.gov.tr/ (Erişim: 20.03.2017, 11.35).
www.baskent.edu.tr/~tkaracay/etudio/agora/zv/2008/fibonacci3.htm (Erişim: 13.04.2017, 12.00).
www.baskent.edu.tr/~tkaracay/etudio/agora/zv/2008/fibonacci3.htm (Erişim: 13.04.2017, 12.00).
www.islamansiklopedisi.info/ (Erişim: 13.04.2017, 14.41).
www.islamansiklopedisi.info/ (Erişim: 13.04.2017, 14.41).

GÖRSEL KAYNAKÇA

1. www.shutterstock.com (Telif hakkı ödenerek satın alınmıştır.)
2. www.dreamstime.com (Telif hakkı ödenerek satın alınmıştır.)
3. Komisyonumuzun görsel tasarım uzmanlarının orijinal çizimleri.